Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin LKM

Klausur – Statik und elementare Festigkeitslehre WS 2015/16

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

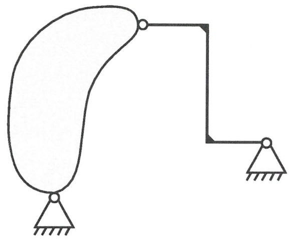
Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit (Unterschrift):

○ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor/Master)
○ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

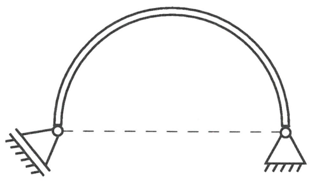
T	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Σ	

Theorieteil

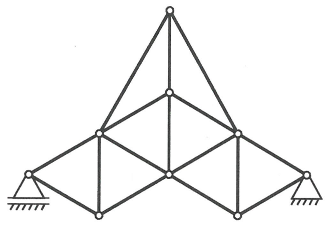
1. Für welche Systeme, bestehend aus Scheiben und/oder Stäben ist die *notwendige* Bedingung für statische Bestimmtheit erfüllt? Kreuzen Sie an (mehrere Kreuze möglich). **(1 Punkt)**



☒

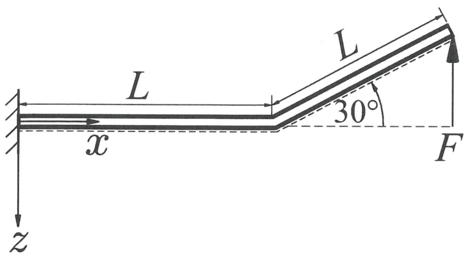


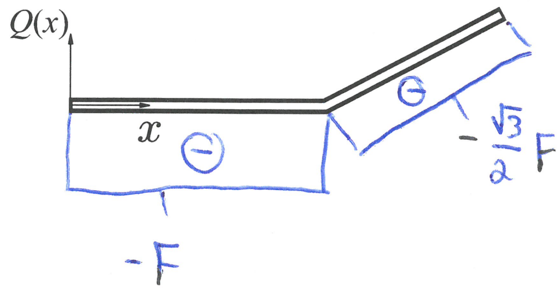
☒



☐

2. Ein einseitig fest eingespannter Träger ist an seinem freien Ende mit der Punktkraft F belastet. Ziehen Sie den Querkraftsverlauf $Q(x)$ über dem nebenstehend gezeichneten Träger auf und geben Sie markante Punkte und Vorzeichen an. **(1 Punkt)**
   Geg.: F, L, $\alpha = 30°$





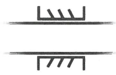
3. Geben Sie die Maßeinheiten der folgend aufgeführten Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, N, kg, m, s und K an: **(1 Punkt)**

Größe	Einheit
Schubspannung τ	$\frac{N}{m^2}$
Deviationsmoment I_{xy}	m^4
Wärmeausdehnungskoeffizient α	$\frac{1}{K}$

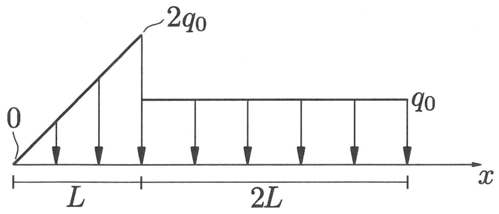
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin
LKM

4. Geben Sie jeweils die Zahl der Lagerwertigkeit an. **(1 Punkt)**

 2  1  3  2

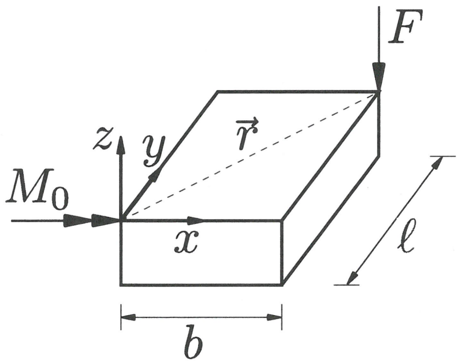
5. Bestimmen Sie den Betrag F_{res} und die Lage x_{res} der aus beiden linearen Streckenlasten resultierenden Kraft. Führen Sie eventuelle Nebenrechnungen auf einem Extrablatt durch. Geg.: q_0, L **(2 Punkte)**



$F_{\text{res}} = 3q_0L$

$x_{\text{res}} = \frac{14}{9}L$

6. Geben Sie das auf den Ursprung wirkende Moment $\vec{M}_{\text{Ges}}$ vektoriell und ausschließlich in den gegebenen Größen an. **(2 Punkte)**

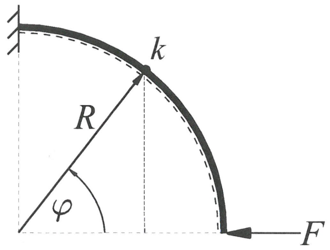


Geg.: b, ℓ, $\vec{F}=-F\,\vec{\mathbf{e}}_z$, $\vec{M}_0=M_0\,\vec{\mathbf{e}}_x$

$$\vec{M}_{\text{Ges}} = \vec{r}\times\vec{F}+\vec{M}_0 = (M_0 - F\ell)\vec{e}_x + Fb\vec{e}_y$$

$$\text{od.} = \begin{pmatrix} M_0 - F\ell \\ Fb \\ 0 \end{pmatrix}$$

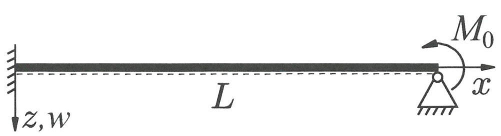
7. Geben Sie den Verlauf des Biegemoments M als Funktion des Winkels φ an. *Hinweis:* Betrachte die Momente im Punkt k mithilfe des elementaren Schnittverfahrens oder der Aufziehmethode. Geg.: F, R **(1 Punkt)**



$M(\varphi) = -F\cdot R\sin(\varphi)$

8. Kreuzen Sie die für den dargestellten Balken die gültigen Randbedingungen für die Biegeliniendifferentialgleichung $EIw^{IV}(x)=q(x)$ an. (mehrere Kreuze möglich)

Geg: L, M_0



- ☐ $w'''(0) = \frac{M_0}{L}$
- ☒ $EIw'(0) = 0$
- ☒ $w(0) = 0$
- ☐ $EIw^{IV}(0) = q_0$

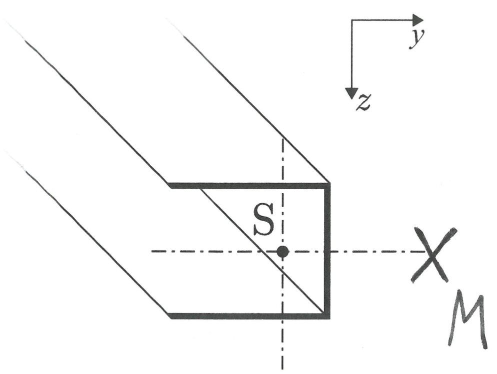
(1 Punkt)

- ☒ $w(L) = 0$
- ☐ $w''(L) = -M_0$
- ☒ $-EIw''(L) = M_0$
- ☐ $EIw'(L) = 0$

(1 Punkt)

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin
Technische Universität Berlin LKM

9.

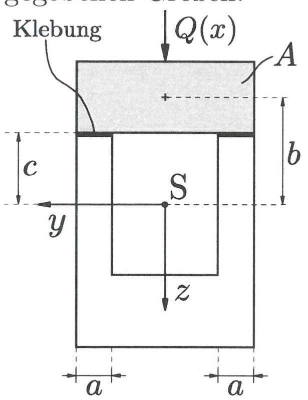


Wie heißt der Punkt im Profil eines Biegeträgers, in dem die Querkraft angreifen muss, sodass das Profil sich nicht verdreht?

Schubmittelpunkt

Zeichnen Sie diesen Punkt mit der Bezeichnung M qualitativ in die nebenstehende Skizze ein, wobei von einer Querkraft in die z-Richtung auszugehen ist.
(zusammen 1 Punkt)

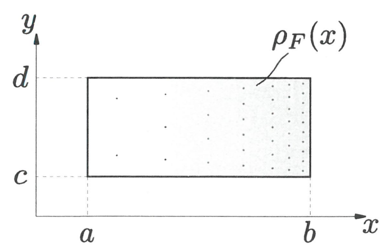
10. Ergänzen Sie die fehlenden Terme für die Schubspannungsberechnung des abgebildeten Biegeträgerprofils in gegebenen Größen. **(1 Punkt)**



Geg.: a, b, c, A

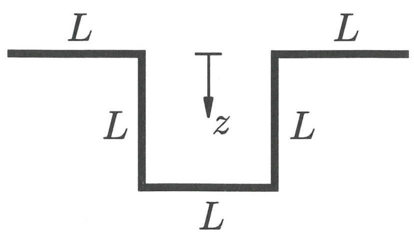
$$|\tau(x,z{=}-c)| = \frac{Q(x)\cdot(\; b\cdot A \;)}{I_{yy}\cdot(\; 2a \;)}$$

11. Die dargestellte Fläche besitzt die Massendichteverteilung $\rho_F(x)$. Ergänzen Sie die fehlenden Terme zur Bestimmung der Komponente x_{S_F} des Massenmittelpunktes. Geg.: a, b, c, d, ρ_F **(1 Punkt)**



$$x_{S_F} = \frac{\displaystyle\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} (\; \rho_F(x)\cdot x \;)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=a}^{x=b} (\; \rho_F(x) \;)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

12. Bestimmen Sie den Linienmittelpunkt z_{S_L} der Gesamtlinie, bestehend aus fünf Einzellinien der Längen L. **(1 Punkt)**

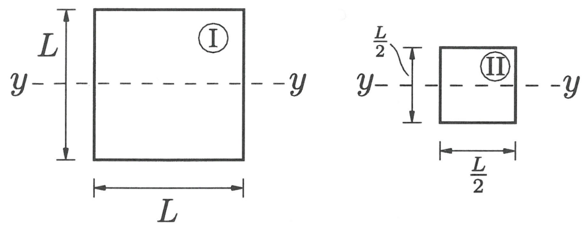


Geg.: L

$$z_{S_L} = \frac{2}{5}L$$

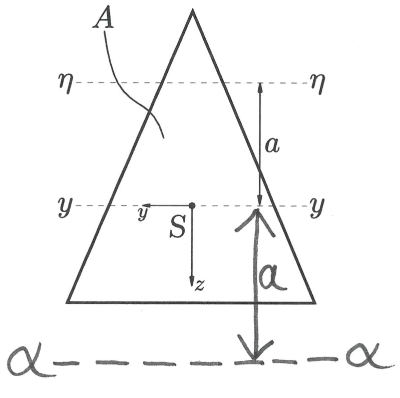
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

13. Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_{yy}^{II} des kleineren Profils? Kreuzen Sie an. **(1 Punkt)**
Geg.: $I_{yy}^{\text{I}} = 160\,\text{cm}^4$



- [ ] $I_{yy}^{\text{II}} = 80\ \text{cm}^4$
- [x] $I_{yy}^{\text{II}} = 10\ \text{cm}^4$
- [ ] $I_{yy}^{\text{II}} = 20\ \text{cm}^4$

14. a) Notieren Sie das Flächenträgheitsmoment $I_{\eta\eta}$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen. **(1 Punkt)**

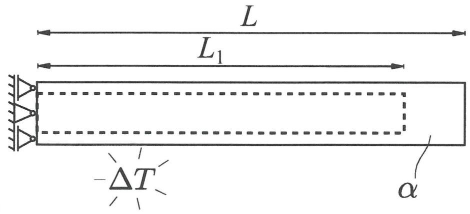


Geg.: A - Gesamtfläche des Dreicks,
a - Exzenterabstand,
I_{yy} - Flächenträgheitsmoment

$$I_{\eta\eta} = I_{yy} + a^2 \cdot A$$

b) Zeichnen Sie eine zusätzliche horizontale $\alpha\alpha$-Achse in die oben stehende Skizze ein, bezüglich der auch das Flächenträgheitsmoment $I_{\eta\eta}$ gilt. Bemaßen Sie. ($I_{\alpha\alpha} = I_{\eta\eta}$). **(1 Punkt)**

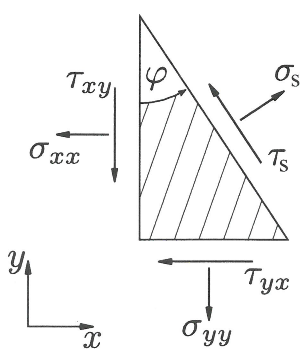
15. Der dargestellte Balken kreisförmigen Querschnitts wird um die Temperaturdifferenz ΔT abgekühlt. Geben Sie die Längenänderung ΔL in Abhängigkeit der gegebenen Größen an. **(1 Punkt)**

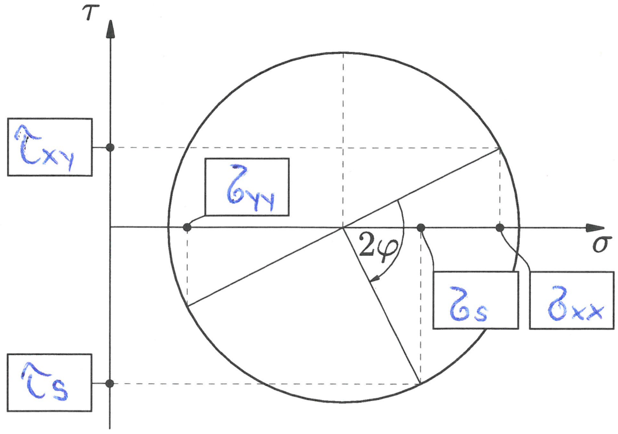


Geg.: α, $\Delta T < 0$, L

$$\Delta L = L_1 - L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

16. Eine Scheibe befindet sich im ebenen Spannungszustand. Ordnen Sie fünf der Größen aus dem Schnitt (s) unter dem Winkel φ dem nebenstehenden MOHRschen Kreis zu, wobei die Relation gilt: $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$. **(1 Punkt)**



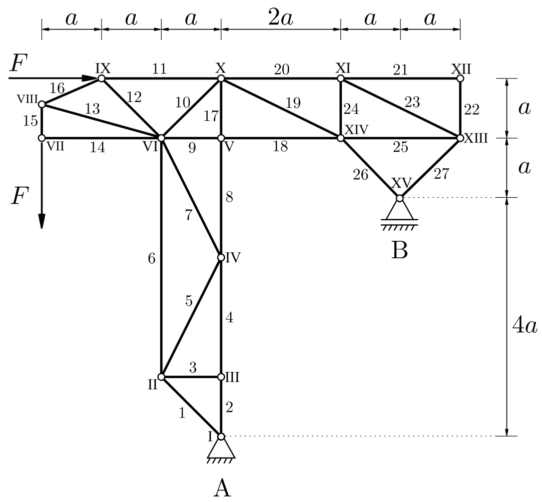


Rechenteil

Allgemeiner Hinweis: Haben Sie einen Aufgabenteil nicht gelöst, rechnen Sie mit Symbolen dafür weiter. Verwenden Sie ausschließlich die gegebenen Größen.

1 Fachwerk (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende ebene Stabwerk:



a) Beurteilen Sie die statische Bestimmtheit anhand der notwendigen Bedingung ebener Stabwerke. **(1P)**

b) Geben Sie gemäß der Nullstabsregeln die Nullstäbe an. **(1P)**

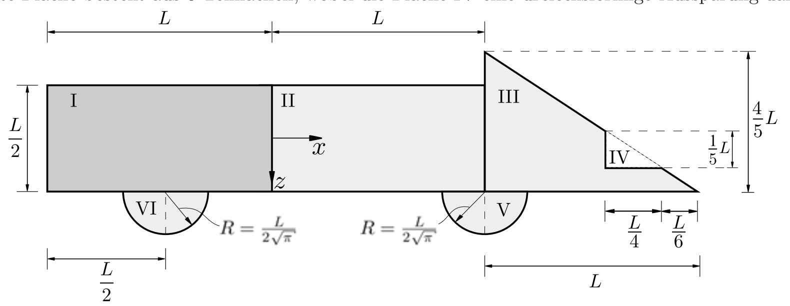
c) Fertigen Sie einen Freischnitt des Gesamtsystems an und bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B. **(4P)**

d) Bestimmen Sie die Stabkräfte der Stäbe 18, 19 und 20 mithilfe des Ritterschen Schnittverfahrens und identifizieren Sie jeweils, ob es sich um einen Zug- oder Druckstab handelt. **(4P)**

Geg.: a, F

2 Flächenmittelpunkt, Schwerpunkt (10 Punkte)

Die gezeigte Fläche besteht aus 6 Teilflächen, wobei die Fläche IV eine dreiecksförmige Aussparung darstellt.



a) Bestimmen Sie die Koordinate x_F des Flächenmittelpunktes der Gesamtfläche, bezogen auf das eingezeichnete Koordinatensystem. Nutzen Sie das Tabellenverfahren. **(5P)**

b) Nur die Fläche I hat die Massendichte ρ_1. Der Rest der Gesamtfläche hat die Massendichte ρ_2. Bestimmen Sie die Komponente des Massenmittelpunkts x_S der Gesamtfläche. **(3P)**

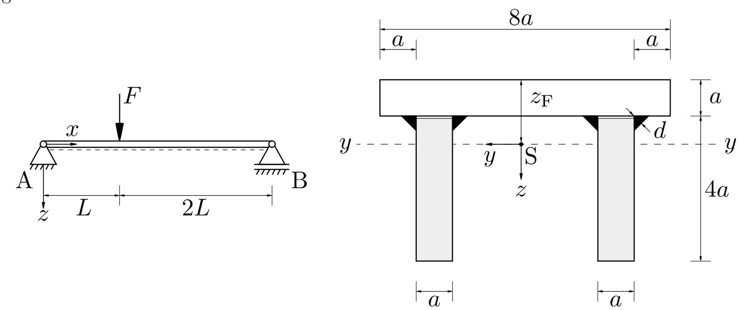
c) Wie müsste das Dichteverhältnis $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ gewählt werden, damit x_S genau im Ursprung der x-Achse liegt? **(2P)**

Geg.: L, ρ_1, ρ_2, $R = \frac{L}{2\sqrt{\pi}}$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 Flächenträgheitsmoment, Spannungsnachweis (13 Punkte)

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Balken symmetrischen Querschnitts ist wie dargestellt mit einer Einzelkraft F belastet. Stege und Flansch sind miteinander verschweißt.



a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B. Zeichnen Sie die Querkrafts- und Momentenflächen gleich welchen Verfahrens und geben Sie markante Punkte an. **(4P)**

b) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_{yy} mithilfe des Tabellenverfahrens. *Anmerkung*: Gehen Sie vom gegebenen Flächenmittelpunkt S aus, welcher um $z_F = \frac{7}{4}a$ entfernt vom Obergurt des Profils liegt. **(4P)**

Hinweis: Nehmen Sie im Weiteren I_{yy} als eine gegebene Konstante an.

c) Geben Sie im Bauteil den maximalen Schubspannungsbetrag $|\tau|_{\max}$ in Höhe der vier Schweißnähte an. **(2P)**

d) Geben Sie ebenfalls die im Bauteil herrschenden maximalen Biegespannungen im Ober- sowie im Untergurt $\sigma_{\max,o}$ und $\sigma_{\max,u}$ an. Identifizieren Sie Zug- und Druckspannungen. **(3P)**

Geg.: L, F, a, d, $z_F = \frac{7}{4}a$

4 Biegeliniendifferentialgleichung (17 Punkte)

Der abgebildete schlanke Balken ist rechts fest eingespannt und links über ein Loslager an die Umgebung gekoppelt. Der Balken wird durch eine lineare Streckenlast $q(x)$ und die Kraft F belastet.

a) Wie lautet die Differentialgleichung vierter Ordnung für die Durchsenkung $w(x)$? Geben Sie $q(x)$ an. **(2P)**

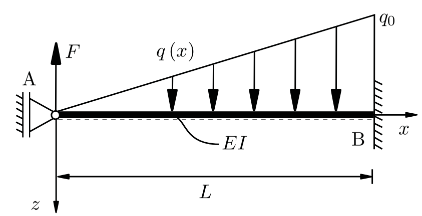
b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung unter dieser Streckenlast. **(4P)**

c) Wie lauten die Randbedingungen des abgebildeten Systems? **(2P)**

d) Bestimmen Sie die unbekannten Konstanten aus b) und geben Sie die Biegelinie an. **(5P)**

e) Bestimmen Sie den Biegewinkel φ_A im Lager A. **(2P)**

f) Wie muss die Kraft F gewählt werden, damit die Durchbiegung im Lager A Null ist. **(2P)**

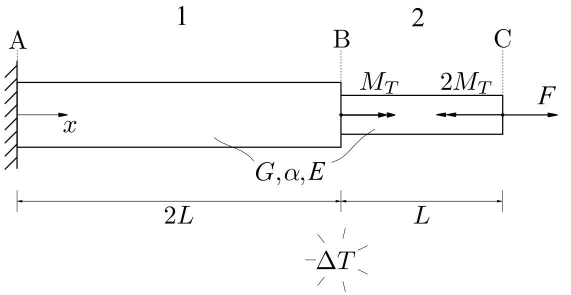


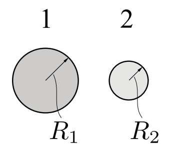
Geg.: q_0, L, EI, F

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5 Torsion, Thermospannung (13 Punkte)

Gegeben ist eine einseitig fest eingespannte Welle mit zwei unterschiedlich starken Vollkreisprofilen des selben Materials. Am Übergang B und am freien Ende bei C greifen die Torsionsmomente M_T und $2M_T$ an. In C wird zudem eine Zugkraft F eingeleitet. Beide Bereiche der Welle erfahren die Temperaturänderung ΔT.





a) Stellen Sie den Verlauf des Torsionsmomentes $M_T(x)$ dar, gleich welchen Verfahrens. Geben Sie $M_T(x)$ bereichsweise an. **(2P)**

b) Bestimmen Sie bereichsweise den Verlauf des Verdrehwinkels $\varphi(x)$ infolge der Torsion unter der Randbedingung: $\varphi_A = 0$. Geben Sie den Verdrehwinkel bei C an. **(4P)**

c) Wie groß müsste das Verhältnis der Radien $\frac{R_1}{R_2}$ gewählt werden, damit die Schubspannungen $\tau_{1,2}$ in den Bereichen 1 und 2 am Außenbereich gleich groß sind? **(3P)**

d) Wie lautet das Hookesche Gesetz inklusive thermischer Dehnung in jedem Bereich? Geben Sie die jeweilige Längenänderung ΔL_1 und ΔL_2 in gegebenen Größen an. **(3P)**

e) Wie müsste die Temperaturänderung ΔT gewählt werden, damit sich eine Gesamtlängenänderung von Null, $\Delta L_{\mathrm{Ges}} = 0$, ergibt? **(1P)**

Geg.: G, E, α, L, M_T, $F > 0$, R_1, R_2, ΔT

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

6 Träger, Streckenlast, Schnittlasten (17 Punkte)

Der dargestellte Träger in Form des Berliner Fernsehturms ist mit einem Lager A im Boden verankert. Die Turmkugel soll als Punktmasse M betrachtet werden. Der senkrecht stehende Träger hat ein Hohlkreisprofil, dessen Radius $r(x)$ sich linear in der Höhe (x-Koordinate) ändert. Der Turm ist in Querrichtung mit einer sinusförmigen Windlast der Form: $q(x) = q_0 \sin(\frac{\pi}{2h}x)$ beaufschlagt. In x-Richtung wird er durch sein Eigengewicht und die Einzelkraft der Kugel belastet.

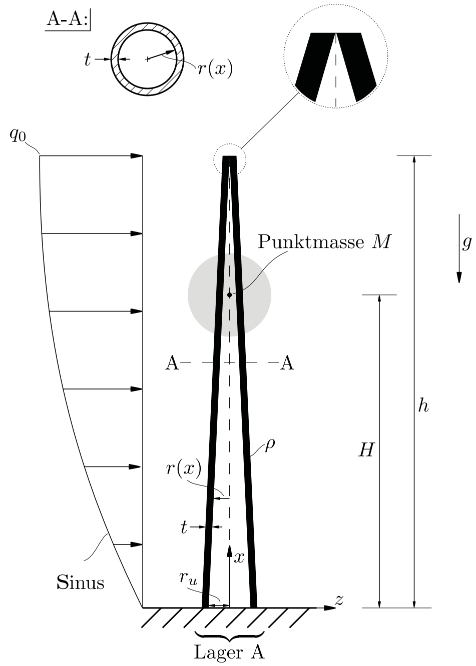
a) Berechnen Sie die Größe F_{res} und Lage x_{res} der Resultierenden der Windlast. **(3P)**
Hinweis: Nutzen Sie ggf. den Zusammenhang bei der partiellen Integration:
$\int_0^h x q(x)\mathrm{d}x = \left[-x\frac{2q_0h}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2h}x)\right]_0^h + \int_0^h \frac{2q_0h}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2h}x)\mathrm{d}x$

b) Fertigen Sie einen Freischnitt des Trägers an und bestimmen Sie nur die Horizontalkraft F_{A_z} und das Moment M_A im Lager A. **(3P)**

c) Bestimmen Sie die Gleichungen für den Querkrafts- und Momentenverlauf $Q(x)$ und $M(x)$ unter Nutzung der Schnittlast-Differentialgleichungen. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten. **(5P)**

d) Geben Sie die Gleichungen für die Innenradien $r(x)$ und die Querschnittsflächen $A(x)$ an. **(2P)**

e) Wie lautet die Schnittlast-Differentialgleichung der Normalkraft? Welcher Ordnung sind die Polynome $n(x) = -\rho g A(x)$ und $N(x)$? Stellen Sie den Normalkraftsverlauf qualitativ über x dar.
Anmerkung: Berücksichtigen Sie die Punktmasse M der Kugel. **(4P)**



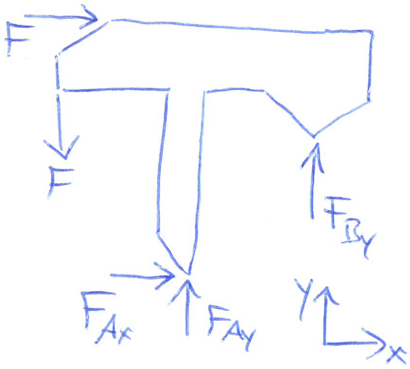
Geg.: r_u, t, h, H, M, ρ, g, $q(x) = q_0 \sin(\frac{\pi}{2h}x)$

1

a) $30 = 30$ erfüllt

b) 3, 14, 21, 22

c)



$F_{By} = F$

$F_{Ay} = 0$

$F_{Ax} = -F$

d) $S_{18} = 3F$ (Zug)

$S_{19} = -\sqrt{5}F$ (Druck)

$S_{20} = -F$ (Druck)

2

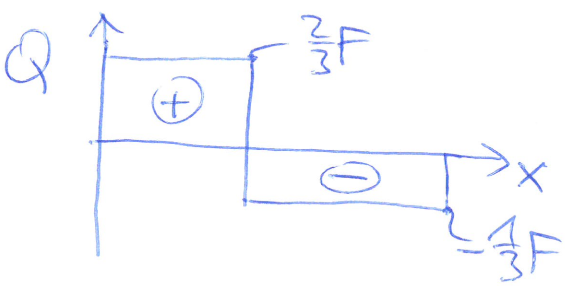
a) $x_F = \frac{133}{390} L$

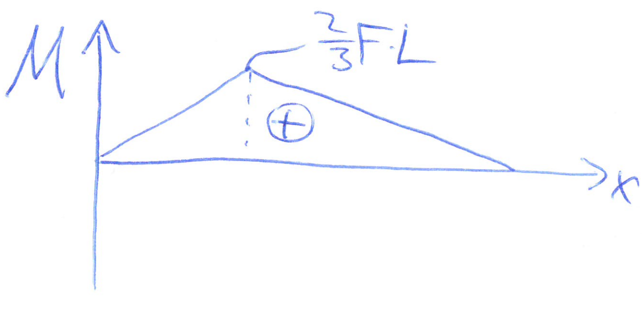
b) $x_S = \dfrac{-\rho_1 \frac{1}{4} L^3 + \rho_2 \frac{193}{240} L^3}{\rho_1 \frac{1}{2} L^2 + \rho_2 \frac{9}{8} L^2}$

c) $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{193}{60}$

3

a) $F_{Ax} = 0$, $F_{By} = \frac{1}{3}F$, $F_{Ay} = \frac{2}{3}F$





b) $I_{yy} = \dfrac{109}{3} a^4$

c) $|\tau|_{max} = \dfrac{5}{3} \dfrac{F a^3}{I_{yy} d}$

d) $\sigma^{o}_{max} = -\dfrac{7}{6} \dfrac{F L a}{I_{yy}}$ (Druck)

$\sigma^{u}_{max} = \dfrac{13}{6} \dfrac{F L a}{I_{yy}}$ (Zug)

4

a) $q(x) = \dfrac{q_0}{L} \cdot x$

b) $EI\, w(x) = \dfrac{q_0 L^4}{120} \left(\dfrac{x}{L}\right)^5 + C_1 \dfrac{L^3}{6} \left(\dfrac{x}{L}\right)^3 + C_2 \dfrac{L^2}{2} \left(\dfrac{x}{L}\right)^2 + C_3 L \left(\dfrac{x}{L}\right) + C_4$

c) $\boxed{-EI\, w''(0) = 0}$, $\boxed{-EI\, w'''(0) = F}$, $\boxed{w'(L) = 0}$, $\boxed{w(L) = 0}$

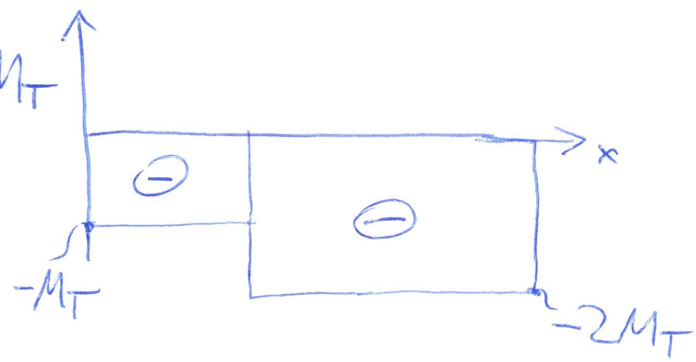
d) $w(x) = \dfrac{1}{EI} \left[\dfrac{q_0 L^4}{120} \left(\dfrac{x}{L}\right)^5 - \dfrac{F L^3}{6} \left(\dfrac{x}{L}\right)^3 + \left(\dfrac{F L^2}{2} - \dfrac{q_0 L^4}{24}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{L}\right) + \dfrac{1}{30} q_0 L^4 - \dfrac{1}{3} F L^3 \right]$

e) $\varphi_A = \dfrac{1}{EI} \left(\dfrac{F L^2}{2} - \dfrac{q_0 L^3}{24} \right)$

f) $F = \dfrac{1}{10} q_0 L$

5

a)



$M_T^{(1)}(x_1) = -M_T$

$M_T^{(2)}(x_2) = -2M_T$

b) $\varphi_1(x_1) = -2\frac{M_T}{G\pi R_1^4} x_1$, $\varphi_2(x_2) = -\frac{4M_T}{G\pi R_2^4} x_2 - \frac{4M_T}{G\pi R_1^4} L$

$$\text{ÜB:} \quad \varphi_1(x_1 = 2L) \overset{!}{=} \varphi_2(x_2 = 0)$$

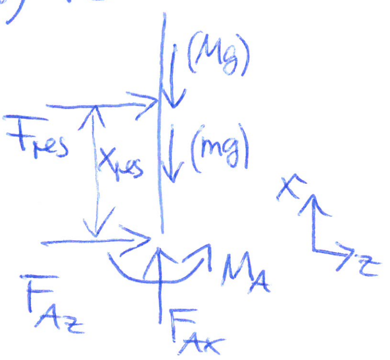
c) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\Delta L_1 = \frac{2FL}{E\pi R_1^2} + 2\alpha\Delta T \cdot L$, $\Delta L_2 = \frac{FL}{E\pi R_2^2} + \alpha\Delta T L$

e) $\Delta T = -\frac{F}{3\alpha\pi E}\left(\frac{1}{R_2^2} + \frac{2}{R_1^2}\right)$

6 a) $F_{res} = \frac{2q_0 h}{\pi}$, $x_{res} = \frac{2h}{\pi}$

b) FS:



$F_{Az} = -\frac{2q_0 h}{\pi}$

$M_A = \frac{4q_0 h^2}{\pi^2}$

c) $Q(x) = \frac{2q_0 h}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2h} x\right)$

$M(x) = \frac{4q_0 h^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2h} x\right) - \frac{4q_0 h^2}{\pi^2}$

d) $r(x) = r_u\left(1 - \frac{x}{h}\right)$

$A(x) = \pi \cdot \left(t + 2r_u\left(1 - \frac{x}{h}\right)\right) t$

e) $\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) = \varrho g \pi \left(t + 2r_u\left(1 - \frac{x}{h}\right)\right) t$

$n(x)$ ... linear (1. Ordnung)

$N(x)$ ... quadratisch (2. Ordnung)