Theorieaufgaben (10 Punkte)

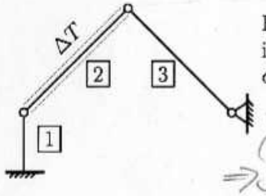
1. An einem starren Körper greift im Punkt P eine Kraft $\underline{F} = (-F, F, 2F)$ an. Geben Sie das resultierende (Kraft-)Moment bezüglich des Punktes A an. Die Ortsvektoren zu den Punkten sind mit $\underline{r}_A = (a, 2a, 3a)$ und $\underline{r}_P = (0, 3a, a)$ gegeben.

   Geg.: F, a

   $\underline{M} = \underline{r}_{AP} \times \underline{F}$ mit $\underline{r}_{AP} = \underline{r}_P - \underline{r}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -2a \end{pmatrix}$

   $$\underline{M} = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F \\ F \\ 2F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4aF \\ 4aF \\ 0 \end{pmatrix}$$

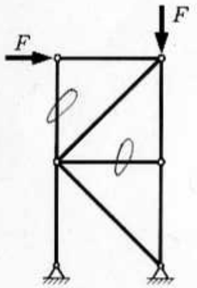
   (2 Punkte)

2. 

   Prüfen Sie, ob in dem abgebildeten System Zwangsspannungen infolge einer Temperaturbelastung im Stab 2 wie in der Skizze dargestellt, auftreten können! (Lösung muß nachvollziehbar sein)

   $f = a + v - 3 \cdot n = (3+2) + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 0$
   (kein Sonderfall d. Statik)
   $\Rightarrow$ System stat. best. $\rightarrow$ keine Zwangssp.

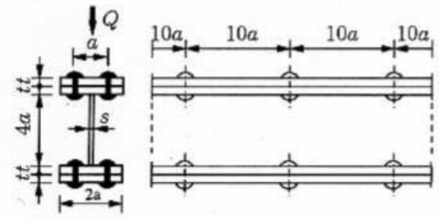
   (1 Punkt)

3. 

   Kennzeichnen Sie die Nullstäbe des idealen Fachwerkes.

   (1 Punkt)

4. Die Flansche eines Doppel-T-Trägers sind mittels zweier in gleichmäßigem Abstand angenieteter Bleche verstärkt worden. Nun soll überprüft werden, ob die Abmessungen der Niete (Querschnittsfläche eines Nietes ist A_N) für eine größere Belastung ausreichend sind. Die Formel zur Berechnung der Schubspannung infolge einer Querkraftbeanspruchung ist bekannt, sie lautet $\tau = \frac{Q \cdot S_y^*}{I_{yy} \cdot b}$. Welche Werte sind für S_y^* und b in die Formel einzutragen?

   Querschnitt Ansicht

   Anm.: Es wird neben der genaueren Formel für dünnwandige Träger auch die Näherungsformel aus dem Buch von Prof. Müller akzeptiert.

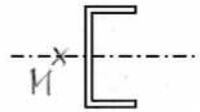
   Geg.: a, t, s, I_{yy}, Q, A_N

   Näherung Müller: $S_y^* = \boxed{2at \cdot (2a + \frac{3}{2}t)}$, $b = \boxed{2A_N / 10a}$

   gem. Theorie: $S_y^* = 2t(2a+t) \cdot \frac{a}{2}$ $b = A_N / 10a$

   (2 Punkte)

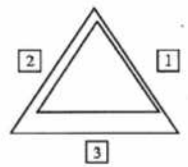
5. Der abgebildete Querschnitt soll durch eine Last beansprucht werden. Tragen Sie qualitativ den Punkt in die Skizze ein, in dem die Resultierende der Last angreifen muß, damit der Träger nicht auf Torsion beansprucht wird und benennen Sie ihn mit dem (mechanischen) Fachbegriff.

   M: Schubmittelpunkt

   (1 Punkt)

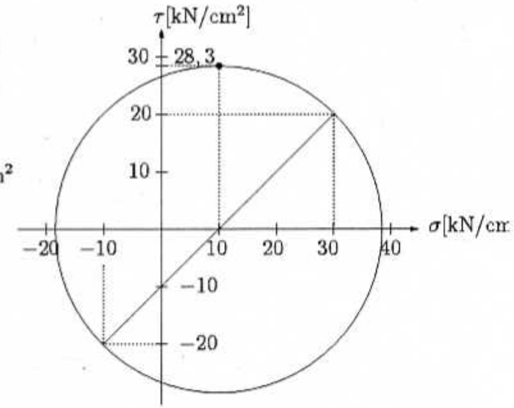
6. Dargestellt ist ein geschlossenes dünnwandiges Profil, welches aus drei Blechen unterschiedlicher Dicke zusammengeschweißt wurde. Blech $\boxed{2}$ hat die doppelte, Blech $\boxed{3}$ die dreifache Stärke von Blech $\boxed{1}$. Geben Sie an, in welchem Blech die größte Schubspannung infolge einer Belastung durch ein Torsionsmoment auftritt.

   Blech $\boxed{1}$

   (1 Punkt)

7. Gegeben ist der skizzierte Mohrsche Kreis, der aus dem Spannungszustand eines Balkenelementes resultiert. Wie groß sind die Haupspannungen?

   $\sigma_I = \boxed{38{,}3}$ kN/cm², $\sigma_{II} = \boxed{-18{,}3}$ kN/cm²

   Um welchen Winkel ψ müßte das Element gedreht werden, um die maximale Schubspannung zu erhalten?

   $\psi = \boxed{22{,}5}$°

   Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist kein Lineal o.ä. erforderlich!

   (2 Punkte)

Autgabe 1

a) $GG: \sum M^{(2)} = N_1 \cdot 2l - N_3 \cdot 3l \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow N_3 = \frac{2}{3} N_1$$

$$\sum F_y = N_1 - N_2 - N_3 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow N_2 = N_1 - N_3 = N_1 - \frac{2}{3}N_1 = \frac{1}{3}N_1$$

b) Materialgesetz: $\varepsilon^{geo} = \varepsilon^{mech} + \varepsilon^{th}$

$$\frac{\Delta l_1}{h} = \frac{N_1}{3EA} + \alpha_T \Delta T$$

$$\frac{\Delta l_2}{h} = \frac{N_2}{EA} + \alpha_T \Delta T = \frac{N_1}{3EA} + \alpha_T \Delta T$$

$$\frac{\Delta l_3}{h} = \frac{N_3}{2EA} + \alpha_T \Delta T = \frac{\cancel{2}N_1}{3 \cdot \cancel{2}EA} + \alpha_T \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 =: \Delta l$$

c) kinemat. Zwangsbedingung:

$$w(x_1 = 2l) = w(x_2 = 0) \overset{!}{=} \Delta l$$

d) $M_1(x_1) = -EJ w_1''(x_1) = -\frac{1}{3} N_1 x_1 \Rightarrow w_1''(x_1) = \frac{1}{3EJ} N_1 x_1$

$M_2(x_2) = -EJ w_2''(x_2) = -\frac{2}{3} N_1 l + \frac{2}{3} N_1 x_2$

$$\Rightarrow w_2''(x_2) = \frac{2}{3EJ} N_1 l - \frac{2}{3EJ} N_1 x_2$$

e) RB: $w_1(x_1 = 0) = -\Delta l \quad (1)$

$w_2(x_2 = l) = -\Delta l \quad (2)$

ÜB $w_1'(x_1 = 2l) = w_2'(x_2 = 0) \quad (3)$

$w_1(x_1 = 2l) = w_2(x_2 = 0) \quad (4)$

noch Aufg. 1:

f) $w_1'(x_1) = \frac{1}{6EJ} N_1 x_1^2 + C_1$

$$\boxed{w_1(x_1) = \frac{1}{18EJ} N_1 x_1^3 + C_1 x + C_2}$$

$$w_2'(x_2) = \frac{2}{3EJ} N_1 l x_2 - \frac{2}{6EJ} N_1 x_2^2 + C_3$$
$$w_2(x_2) = \frac{2}{6EJ} N_1 l x_2^2 - \frac{2}{18EJ} N_1 x_2^3 + C_3 x + C_4$$

aus (1) folgt $\boxed{C_2 = -\Delta l}$

aus (2) folgt $\frac{1}{3EJ} N_1 l^3 - \frac{1}{9EJ} N_1 l^3 + C_3 l + C_4 = -\Delta l$ (2a)

$$\left.\begin{aligned} &\text{aus (3) folgt } \frac{1}{6EJ} N_1 (2l)^2 + C_1 = C_3 \\ &\text{aus (4) folgt } \frac{1}{18EJ} N_1 (2l)^3 + C_1 \cdot (2l) - \Delta l = C_4 \end{aligned}\right\} \text{in (2a)}$$

$$\frac{2}{9EJ} N_1 l^3 + \underbrace{\frac{2}{3EJ}}_{=4/3} N_1 l^3 + C_1 l + \frac{4}{9EJ} N_1 l^3 + 2C_1 l - \Delta l = -\Delta l$$

$$\Rightarrow \frac{N_1 l^3}{EJ} \overbrace{\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)} + 3C_1 l = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{4 N_1 l^3}{3EJ \cdot 3l} = -\frac{4}{9} \frac{N_1 l^2}{EJ}}$$

g) $w_1(x_1 = 2l) = \frac{1}{18EJ} N_1 (2l)^3 - \frac{4}{9} \frac{N_1 l^2}{EJ} \cdot (2l) - \Delta l \overset{!}{=} \Delta l$

$$\Rightarrow -\frac{4}{9EJ} N_1 l^3 = 2\Delta l$$

$$\Rightarrow \Delta l = -\frac{2}{9} \frac{N_1 l^3}{EJ}$$

Einsetzen in Materialgesetz:

$$h\left(\frac{N_1}{3EA} + \alpha_T \Delta T\right) = -\frac{2}{9} \frac{N_1 l^3}{EJ}$$

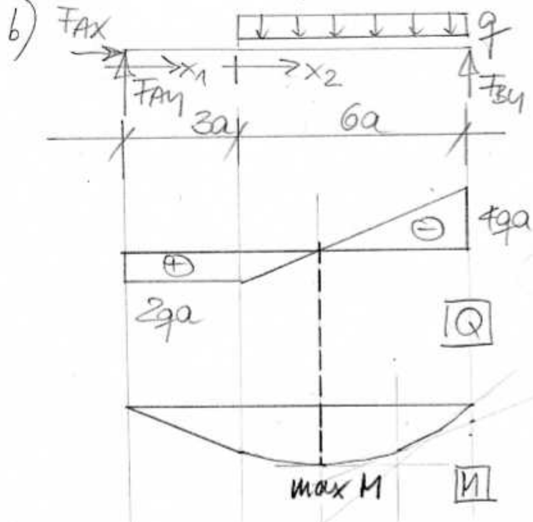
$$\Rightarrow N_1 \left(\frac{h}{3EA} + \frac{2}{9} \frac{l^3}{EJ}\right) = -h \alpha_T \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = -\frac{h \cdot \alpha_T \cdot \Delta T}{\frac{h}{3EA} + \frac{2}{9} \frac{l^3}{EJ}}}$$

Aufgabe 2:

a) $\sigma(x) = \dfrac{M_y(x)}{J_{yy}(x)} \cdot z(x)$

b)



$\sum M^{(A)} = F_{By} \cdot 9a - q \cdot 6a \cdot 6a \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F_{By} = \frac{36}{9} qa = 4qa$

$\sum F_y = F_{Ay} + F_{By} - 6qa \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F_{Ay} = 6qa - F_{By} = 2qa$

max M an d. Stelle $2qa - qx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2a$

$\max M = 2qa \cdot 3a + \frac{1}{2} \cdot 2qa \cdot 2a = 8qa^2$

c) $M_I(x_1) = 2qa\, x_1$

$z(x_1) = \pm \dfrac{h(x)}{2}$ mit $h(x) = \dfrac{4h_0 - h_0}{3a} x + h_0 = \dfrac{h_0}{a} x + h_0 = h_0\left(\dfrac{x}{a} + 1\right)$

$J_{yy}(x_1) = \dfrac{b \cdot h^3(x)}{12}$

d) $\max \sigma(x_1) = \dfrac{12\, M(x_1) \cdot h(x_1)}{2b \cdot h^3(x_1)} = \dfrac{6 \cdot 2qa}{b} \cdot \dfrac{x_1}{\left(h_0\left(\frac{x}{a}+1\right)\right)^2} = 12 \dfrac{qa}{bh_0^2} \dfrac{x_1}{\left(\frac{x}{a}+1\right)^2}$

notw. Bed. f. Extremum: $\sigma'(x_1) \overset{!}{=} 0$

$$\left[\frac{x}{\left(\frac{x}{a}+1\right)^2}\right]' = \frac{1 \cdot \left(\frac{x}{a}+1\right)^2 - x \cdot 2\left(\frac{x}{a}+1\right) \cdot \frac{1}{a}}{\left(\frac{x}{a}+1\right)^4} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{x_1}{a}+1\right)\left(\frac{x_1}{a}+1 - \frac{2x_1}{a}\right) = 0$

$\Rightarrow x_{1_1} = -a \notin D$

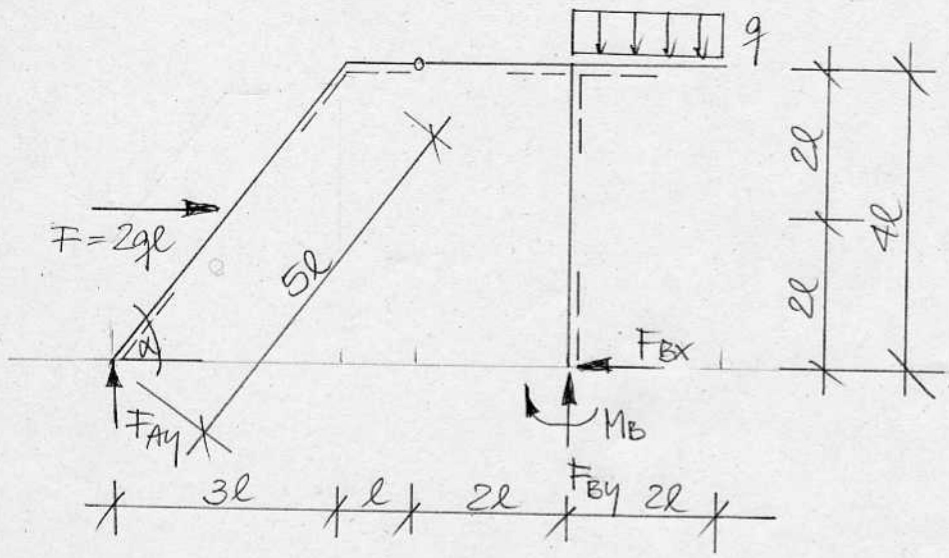
$\underline{\underline{x_{1_2} = +a}}$

$\Rightarrow \max \sigma_I = 12 \dfrac{qa}{bh_0^2} \cdot \dfrac{a}{\left(\frac{a}{a}+1\right)^2} = 3 \dfrac{qa^2}{bh_0^2}$

e) $z = 2h_0$, $J_{yy} = \dfrac{b \cdot (4h_0)^3}{12} \Rightarrow \dfrac{J_{yy}}{z} = W_{yy} = \dfrac{b(4h_0)^2}{6}$

$\Rightarrow \max \sigma_{II} = \cancel{8}qa^2 \cdot \dfrac{6}{{}_2\cancel{16}bh_0^2} = 3 \dfrac{qa^2}{bh_0^2}$

Aufgabe 3



a) Auflagerreaktionen:

$$\sum F_x = F - F_{Bx} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F_{Bx} = F = 2ql$$

$$\sum M^{(g,l)} = -F_{Ay}\cdot 4l + F\cdot 2l \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F_{Ay} = \frac{F\cdot 2l}{4l} = ql$$

$$\sum F_y = F_{Ay} + F_{By} - 2ql \overset{!}{=} 0 \Rightarrow F_{By} = 2ql - F_{Ay} = ql$$

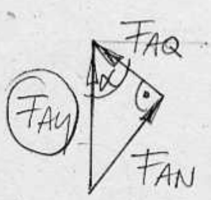
$$\sum M^{(g,r)} = F_{By}\cdot 2l - F_{Bx}\cdot 4l - M_B - 2ql\cdot 3l \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow M_B = 2F_{By}\cdot l - 4F_{Bx}\cdot l - 6ql^2 = 2ql^2 - 8ql^2 - 6ql^2$$

$$= -12ql^2$$

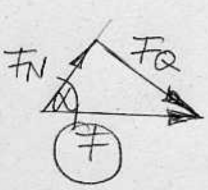
b) Schnittgrößen

Nebenrechnung zu Aufg. 3
(nicht Bestandteil d. Lsg.)



$$F_{AN} = F_{Ay}\cdot \sin\alpha = F_{Ay}\cdot\frac{4l}{5l} = \frac{4}{5}ql$$

$$F_{AQ} = F_{Ay}\cdot \cos\alpha = F_{Ay}\cdot\frac{3l}{5l} = \frac{3}{5}ql$$



$$F_N = F\cdot\cos\alpha = \frac{3}{5}F = \frac{6}{5}ql$$

$$F_Q = F\cdot\sin\alpha = \frac{4}{5}F = \frac{8}{5}ql$$

noch Aufgabe 3

b)