Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin LKM

Klausur zur Statik und elementaren Festigkeitslehre WS 2013/14

Name, Vorname:
Matr.-Nr.:
Studiengang:
Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit (Unterschrift):
○ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor)
○ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

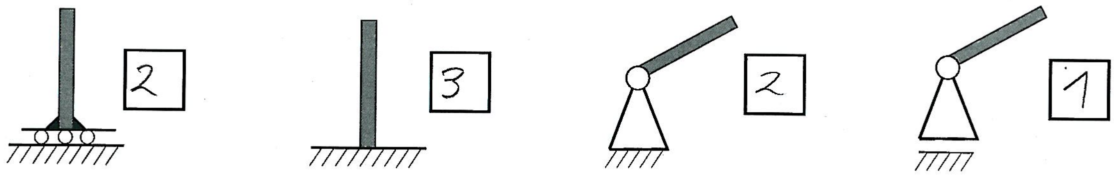
T	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Σ	

Theorieteil

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgend aufgeführter Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m, s und K an: **(2 Punkte)**

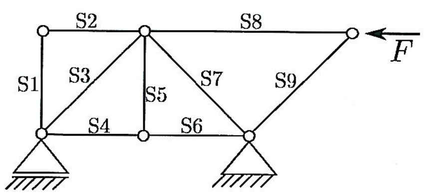
Größe	Einheit	Größe	Einheit	Größe	Einheit	Größe	Einheit
w'	1	I_p	m^4	Druck	$\frac{kg}{s^2 m}$	EI	$\frac{kg\, m^3}{s^2}$

2. Geben Sie die Wertigkeit der folgenden Lager an. **(1 Punkte)**



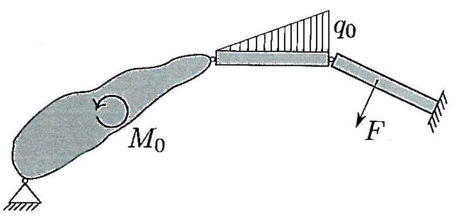
3. Geben Sie im folgenden Stabwerk alle Nullstäbe mit den zugehörigen Stabnummern an. **(2 Punkte)**

Nullstäbe: 1, 2, 5, 9



4. Ist das folgende System statisch bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der notwendigen Bedingung zur statischen Bestimmtheit. **(1 Punkt)**

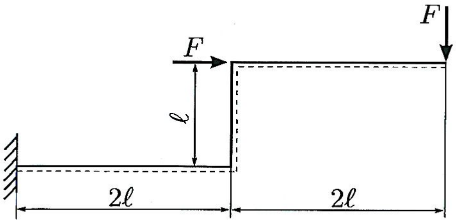
Antwort: JA, da
$3 \cdot 3 = 5 + 4 \;//\; 9 = 9$
eine wahre Aussage ist!

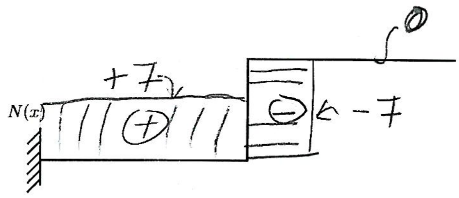


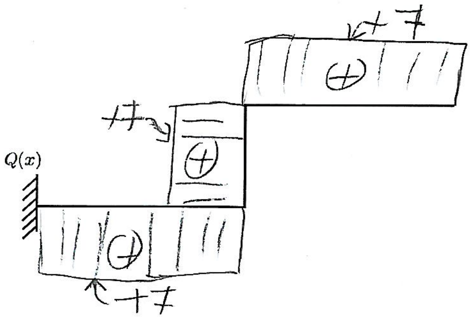
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

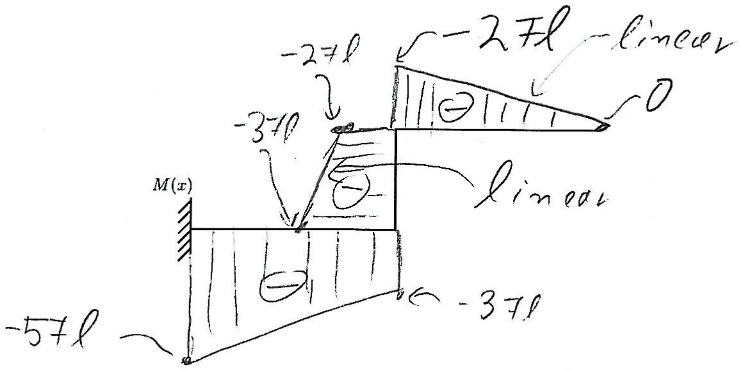
5. Skizzieren Sie für den folgenden Kragarm die Verläufe $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$. Verwenden Sie die dafür vorgesehenen Skizzen und geben Sie dort auch für markante Stellen die Funktionswerte mit richtigem Vorzeichen an. **(3 Punkte)**

Geg.: ℓ, F



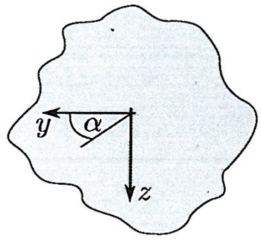






6. Für das folgende Profil wurden die Komponenten des Flächenträgheitstensors bezüglich der Schwerpunktachsen y und z berechnet. Kreuzen Sie die korrekten Winkel zu den Hauptträgheitsachsen an. *Hinweis*: Beachten Sie doppelte Winkel. **(1 Punkt)**

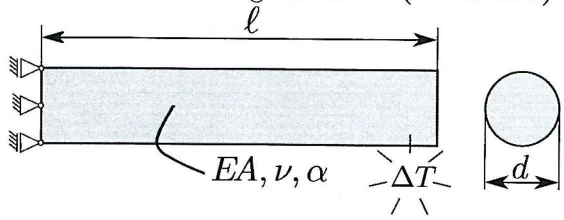
$$\underset{(y,z)}{I} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ell^4$$



$\alpha_1 = 22{,}5°$	$\alpha_1 = 22{,}5°$	$\alpha_1 = 45°$	$\alpha_1 = 45°$
$\alpha_2 = 92{,}5°$	$\alpha_2 = 112{,}5°$	$\alpha_2 = 90°$	$\alpha_2 = 135°$
☐	☒	☐	☐

7. Der folgende Rundstab der Länge ℓ mit Durchmesser d ist bei $T = T_0$ spannungsfrei gelagert. Nun stellt sich ein $\Delta T \neq 0\,\mathrm{K}$ ein. Geben Sie die Normalspannung σ und die Durchmesseränderung Δd an. **(2 Punkte)**

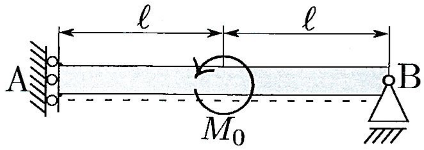
$\sigma = 0$ $\Delta d = \alpha \Delta T d$



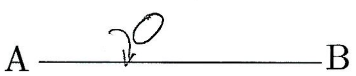
Geg.: ℓ, α, EA, ν, ΔT, d

8. Geben Sie für den folgenden Balken die Verläufe von $Q(x)$ und $M(x)$ an. Verwenden Sie die dafür vorgesehenen Skizzen und geben Sie dort auch für markante Stellen die Funktionswerte mit richtigem Vorzeichen an. *Tipp*: Das Aufziehverfahren führt schnell zum Ziel! **(2 Punkte)**

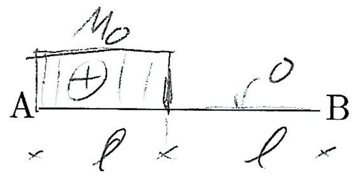
Geg: ℓ, M_0



$Q(x)$



$M(x)$



Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin LKM

Name, Vorname: **Matr.-Nr.:**

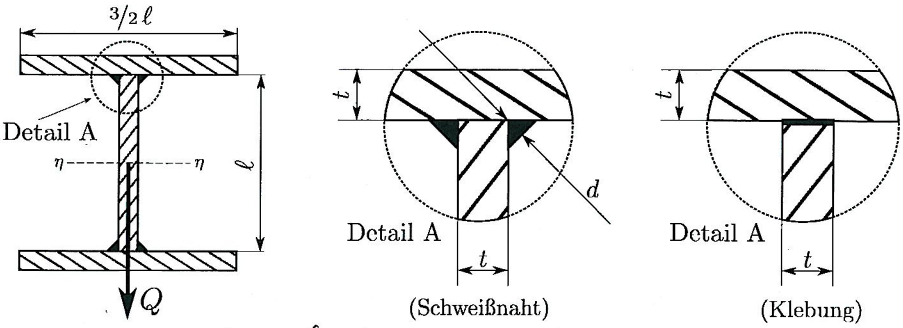
9. Bei dem folgend gezeigten symmetrischen Profil sind Steg und Flansche wie gezeigt verschweißt. Zu berechnen ist die Schubspannung, die in den Schweißnähten vorliegt. Geben Sie für dieses Profil auch die Schubspannung für eine Verklebung des Stegs mit den Flanschen an. **(2 Punkte)**

Geg.: Q, ℓ, d, t, $I_{\eta\eta}$

$A^* = \frac{3}{2}\ell t$

$z^* = \frac{\ell}{2} + \frac{t}{2} = \frac{\ell + t}{2}$

$A^* z^* = \frac{3}{4}\ell t(\ell + t)$



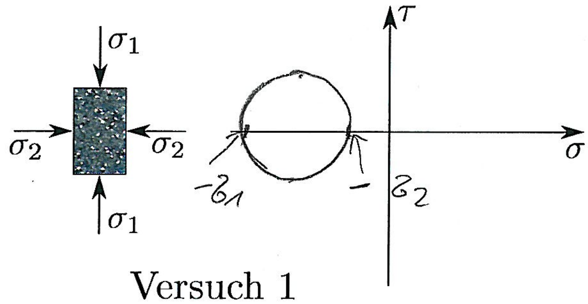
$\tau_{\text{Schweißnaht}} = \frac{Q\,3\ell t(\ell+t)}{I_{\eta\eta}\,8d}$ $\qquad \tau_{\text{Klebung}} = \frac{Q\,3\ell(\ell+t)}{I_{\eta\eta}\,4}$

10. Kreuzen Sie die korrekten gängigen Werkstoffgrößen für Stahl an. **(1 Punkt)**

$E = 210\,\text{GPa}$ $\nu = 0{,}3$	$E = 210\,\text{GPa}$ $\nu = 0{,}5$	$E = 210\,\text{MPa}$ $\nu = 0{,}3$	$E = 210\,\text{MPa}$ $\nu = 0{,}5$
☒	☐	☐	☐

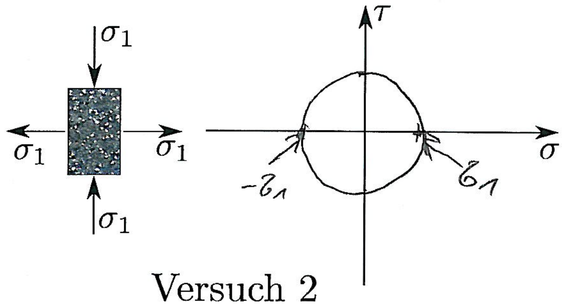
11. Eine Bodenprobe wird in zwei Versuchen wie unten skizziert belastet. Zeichnen Sie den MOHRschen Spannungskreis und geben sie die größte Schubspannung an – für jeden Versuch. Benutzen Sie zum Zeichnen die angegebenen (σ, τ)-Diagramme. **(2 Punkte)**

Geg.: σ_1, σ_2, $\sigma_1 > \sigma_2$



Versuch 1

$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



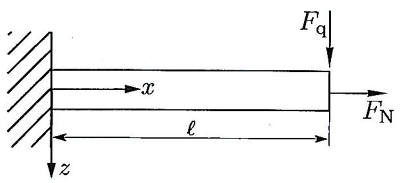
Versuch 2

$\tau_{\max} = \sigma_1$

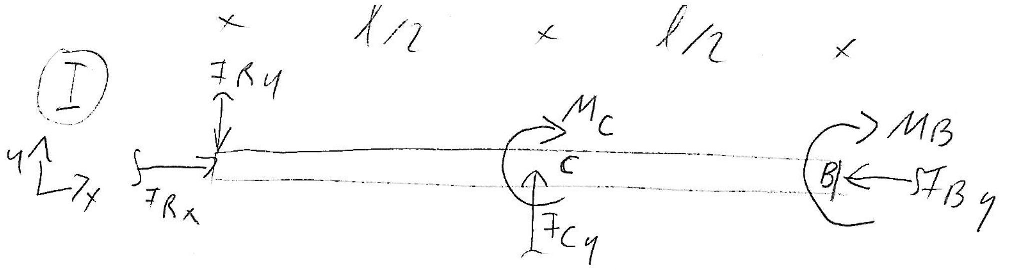
12. Der gegebene *symmetrische Doppel-T-Träger* wird durch eine Quer- und Normalkraft belastet. Wie groß muss F_N sein, sodass keine Druckspannung im Balken auftritt? **(1 Punkt)**

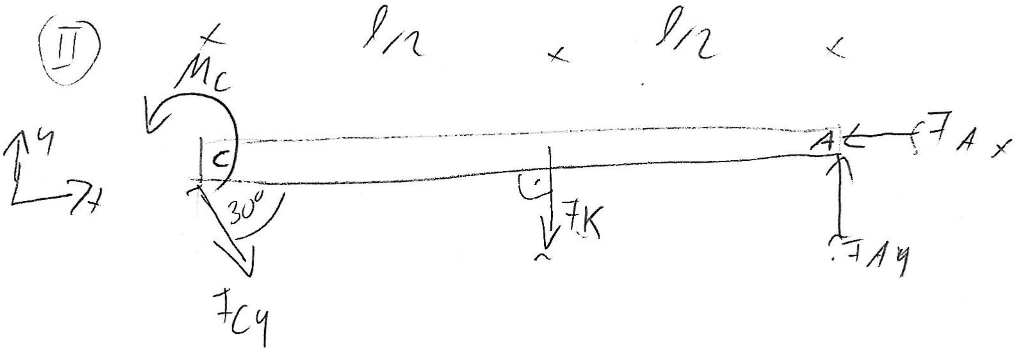
$F_N \geq \frac{F_q\,\ell\,A}{W_{min}}$

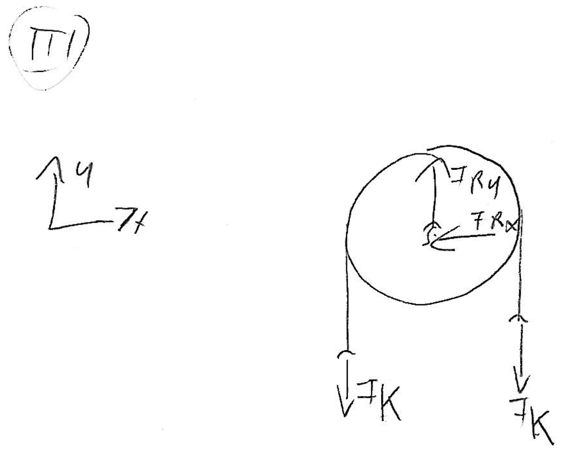
Geg.: W_{min}, A, F_q, ℓ

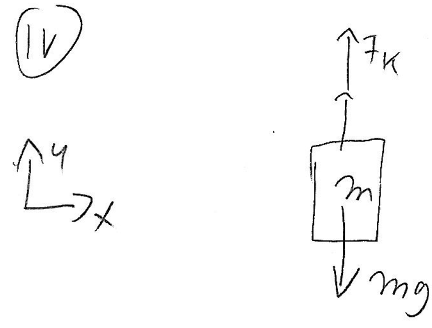


1 a)









b) Freischnitt (IV): $\sum F_{iy} = 0 = F_K - mg \Rightarrow \boxed{F_K = mg}$

FS (III): $\sum F_{ix} = 0 = F_{Rx} \Rightarrow \boxed{F_{Rx} = 0}$

$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ry} - 2F_K \Rightarrow \boxed{F_{Ry} = 2mg}$

c) „3·Scheiben = LR + GR" $3 \cdot 2 = 4 + 2$ // $6 = 6$

Ja, statisch bestimmt!

d) FS (I): $\sum F_{ix} = 0 = F_{Rx} - F_{By} = -F_{By}$ (1)

$\sum F_{iy} = 0 = -F_{Ry} + F_{Cy} = -2mg + F_{Cy}$ (2)

$\sum M^{(C)} = 0 = F_{Ry}\, l/2 - M_C - M_B = mgl - M_C - M_B$ (3)

FS (II): $\sum F_{ix} = 0 = \cos(30^\circ) F_{Cy} - F_{Ax}$ (4)

$\sum F_{iy} = 0 = -\sin(30^\circ) F_{Cy} - F_K + F_{Ay} = -\sin(30^\circ) F_{Cy} - mg + F_{Ay}$ (5)

$\sum M^{(C)} = 0 = M_C - F_K\, l/2 + F_{Ay}\, l = M_C - mg\, l/2 + F_{Ay}\, l$ (6)

e) aus (1): $\boxed{F_{By} = 0}$

aus (2): $\boxed{F_{Cy} = 2mg}$

aus (4): $\boxed{F_{Ax} = \frac{\sqrt{3}}{2} 2mg = \sqrt{3}\, mg}$

aus (5): $\boxed{F_{Ay} = mg + \frac{1}{2} 2mg = 2mg}$

aus (6): $\boxed{M_C = mg\frac{l}{2} - 2mgl = -\frac{3}{2} mgl}$

aus (3): $\boxed{M_B = -M_C + mgl = +\frac{3}{2} mgl + mgl = \frac{5}{2} mgl}$

2 a)

#	y_i/a	z_i/a	A_i/a^2	$A_i y_i/a^3$	$A_i z_i/a^3$
I	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
II	0	$-\frac{1}{2}$	6	0	-3
III	0	1	6	0	6
IV	0	1	$-\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$
			(1)	(2)	(3)

$$\frac{(1)}{a^2} = 13 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(52-\pi)$$

$$\frac{(2)}{a^3} = -\frac{5}{2} = -\frac{10}{4}$$

$$\frac{(3)}{a^3} = -\frac{6}{4} - \frac{12}{4} + \frac{24}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(6-\pi)$$

$$y_7 = \frac{(2)}{(1)} = \underline{\underline{\frac{-10a}{52-\pi}}} \qquad z_7 = \frac{(3)}{(1)} = \underline{\underline{\frac{6-\pi}{52-\pi}a}}$$

b)

#	y_i/a	z_i/a	ρ_i	$A_i\rho_i/a^2$	$A_i y_i \rho_i/a^3$	$A_i z_i \rho_i/a^3$
I	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	ρ_1	ρ_1	$-\frac{5}{2}\rho_1$	$-\frac{3}{2}\rho_1$
II	0	$-\frac{1}{2}$	ρ_1	$6\rho_2$	0	$-3\rho_1$
III	0	1	ρ_2	$6\rho_2$	0	$6\rho_2$
IV	0	1	ρ_2	$-\frac{\pi}{4}\rho_2$	0	$-\frac{\pi}{4}\rho_2$
				(1)	(2)	(3)

$$\frac{(1)}{a^2} = 7\rho_1 + 6\rho_2 - \frac{\pi}{4}\rho_2 = \frac{1}{4}(28\rho_1 + (24-\pi)\rho_2)$$

$$\frac{(2)}{a^3} = -\frac{5}{2}\rho_1 = -\frac{10}{4}\rho_1$$

$$\frac{(3)}{a^3} = -\frac{6}{4}\rho_1 - \frac{12}{4}\rho_1 + \frac{24}{4}\rho_2 - \frac{\pi}{4}\rho_2 = \frac{1}{4}(-18\rho_1 + (24-\pi)\rho_2)$$

$$y^S = \frac{(2)}{(1)} = \frac{-10\rho_1 a}{28\rho_1 + (24-\pi)\rho_2} \qquad z^S = \frac{(3)}{(1)} = \frac{-18\rho_1 + (24-\pi)\rho_2}{28\rho_1 + (24-\pi)\rho_2}a$$

c) $z^S \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -18\rho_1 + (24-\pi)\rho_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{24-\pi}{18}$$

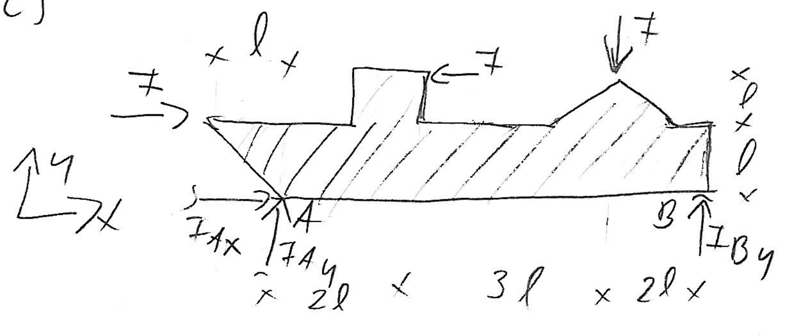
3 a)

„2 · Knoten = LR + Stäbe" $2 \cdot 17 = 3 + 31 \quad // \quad 34 = 34$

ja, statisch bestimmt!

b) Regel „A": S1   Regel „B": S30, S31   Regel „C": S3, S11, S15, S24

c)



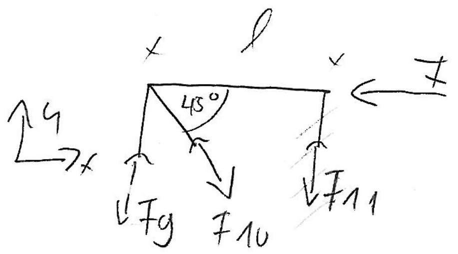
$$\sum M^{(A)} = 0 = -Fl + 2Fl - 5Fl + 7F_{By}l$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{By} = \frac{4}{7}F}}$$

$$\sum F_{ix} = 0 = F_{Ax} + F - F \Rightarrow \underline{\underline{F_{Ax} = 0}}$$

$$\sum F_{iy} = 0 = F_{Ay} + F_{By} - F \Rightarrow F_{Ay} = F - \frac{4}{7}F = \underline{\underline{\frac{3}{7}F}}$$

d) S 9, 10, 11



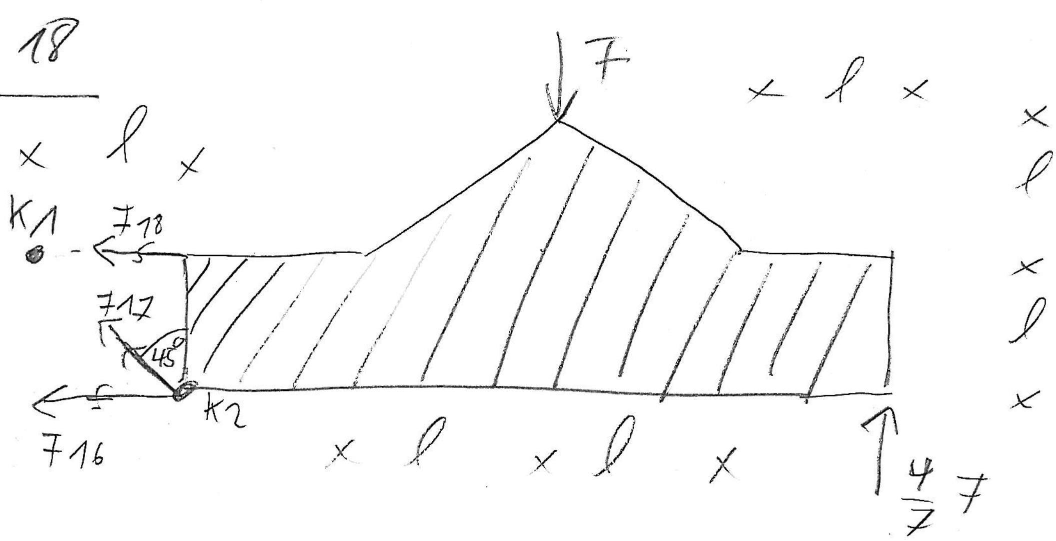
S11 ist Nullstab, $\underline{\underline{F_{11} = 0}}$!

$$\sum F_{ix} = 0 = \cos(45°) F_{10} - F$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{10} = \frac{2}{\sqrt{2}} F}} \quad \text{(Zugstab)}$$

$$\sum F_{iy} = 0 = -F_9 - \sin(45°) F_{10} \Rightarrow F_9 = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} F = -F}} \quad \text{(Druckstab)}$$

S 16, 17, 18



$$\sum M^{(K1)} = 0 = -F_{16}\, l - 3Fl + 5l \cdot \frac{4}{7}F$$

$$= -F_{16}\, l - \frac{21}{7}Fl + \frac{20}{7}Fl$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{16} = -\frac{F}{7}}} \quad (\text{Druckstab})$$

$$\sum M^{(K2)} = 0 = F_{18}\, l - 2Fl + 4l \cdot \frac{4}{7}F = F_{18}\, l - \frac{14}{7}Fl + \frac{16}{7}Fl$$

$$\Rightarrow F_{18} = -\frac{2}{7}F \quad (\text{Druckstab})$$

$$\sum F_{iy} = 0 = \cos(45°)F_{17} - F + \frac{4}{7}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F_{17} - \frac{7}{7}F + \frac{4}{7}F$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{17} = \frac{3}{7}\frac{2}{\sqrt{2}}F = \frac{3\sqrt{2}}{7}F}} \quad (\text{Zugstab})$$

4 a) $\underline{A-B}$

$\overset{(1)}{w}(x_1=0)=0 \rightsquigarrow EI\,\overset{(1)}{w}(x_1=0)=0$ (R1)

$\overset{(1)}{w}'(x_1=0)=0 \rightsquigarrow EI\,\overset{(1)}{w}'(x_1=0)=0$ (R2)

$\overset{(1)}{w}(x_1=l)=0 \rightsquigarrow EI\,\overset{(1)}{w}(x_1=l)=0$ (R3)

<u>Kopplung A-B & B-C</u>

(EI in beiden Bereichen gleich!)

$\overset{(1)}{w}'(x_1=l)=\overset{(2)}{w}'(x_2=0) \rightsquigarrow EI\,\overset{(1)}{w}'(x_1=l)=EI\,\overset{(2)}{w}'(x_2=0)$ (R4)

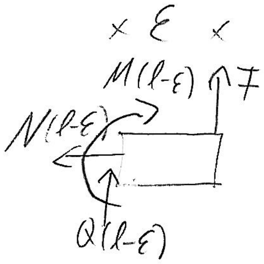
$\overset{(1)}{M}(x_1=l)=\overset{(2)}{M}(x_2=0) \rightsquigarrow EI\,\overset{(1)}{w}''(x_1=l)=EI\,\overset{(2)}{w}''(x_2=0)$ (R5)

$\underline{B-C}$

$\overset{(2)}{w}(x_2=0)=0 \rightsquigarrow EI\,\overset{(2)}{w}(x_2=0)=0$ (R6)

$\overset{(2)}{M}(x_2=l)=0 \rightsquigarrow EI\,\overset{(2)}{w}''(x_2=l)=0$ (R7)

$\overset{(2)}{Q}(x_2=l)=-F \rightsquigarrow EI\,\overset{(2)}{w}'''(x_2=l)=F$ (R8)



$\varepsilon \to 0:\ Q(l)=-F$

b) A-B

Ansatz: $\overset{(1)}{q}(x_1)=A\cos(Bx_1+C) \rightsquigarrow \overset{(1)}{q}'(x_1)=-AB\sin(Bx_1+C)$

RBn: $\overset{(1)}{q}(x_1=0)=q_0$ (1)

$\overset{(1)}{q}'(x_1=0)=0$ (2)

$\overset{(1)}{q}(x_1=l)=0$ (3)

aus (2): $\sin(C)=0$
$\Rightarrow \underline{C=0}$

aus (1): $\underline{A=q_0}$

aus (3): $0=\cos(Bl) \rightsquigarrow Bl=\frac{\pi}{2}+n\pi$

n=0 die erste Halbwelle
$\Rightarrow \underline{B=\frac{1}{l}\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{\overset{(1)}{q}(x_1)=q_0\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right)}$

$\boxed{\overset{(2)}{q}(x_2)=0}$ aus Skizze erkennbar.

c) A–B

$$EI\,w^{(1)IV}(x_1) = q^{(1)}(x_1) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right)$$

$$EI\,w^{(1)'''}(x_1) = q_0 l \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) + C_1^{(1)}$$

$$EI\,w^{(1)''}(x_1) = -q_0 l^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) + C_1^{(1)} l \frac{x_1}{l} + C_2^{(1)}$$

$$EI\,w^{(1)'}(x_1) = -q_0 l^3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) + \frac{C_1^{(1)} l^2}{2}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2 + C_2^{(1)} l \frac{x_1}{l} + C_3^{(1)}$$

$$EI\,w^{(1)}(x_1) = +q_0 l^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) + \frac{C_1^{(1)} l^3}{6}\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + \frac{C_2^{(1)} l^2}{2}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2 + C_3^{(1)} l \frac{x_1}{l} + C_4^{(1)}$$

B – C

$$EI\,w^{(2)IV}(x_2) = q^{(2)}(x_2) = 0$$

$$EI\,w^{(2)'''}(x_2) = C_1^{(2)}$$

$$EI\,w^{(2)''}(x_2) = C_1^{(2)} l \frac{x_2}{l} + C_2^{(2)}$$

$$EI\,w^{(2)'}(x_2) = \frac{C_1^{(2)} l^2}{2}\left(\frac{x_2}{l}\right)^2 + C_2^{(2)} l \frac{x_2}{l} + C_3^{(2)}$$

$$EI\,w^{(2)}(x_2) = \frac{C_1^{(2)} l^3}{6}\left(\frac{x_2}{l}\right)^3 + \frac{C_2^{(2)} l^2}{2}\left(\frac{x_2}{l}\right)^2 + C_3^{(2)} l \frac{x_2}{l} + C_4^{(2)}$$

d) aus (R1): $\cancel{EI}\, w^{(1)}(x_1=0) = 0 = q_0 l^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 + C_4^{(1)}$

$$\Rightarrow \boxed{C_4^{(1)} = -q_0 l^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4}$$

aus (R2): $EI\,w^{(1)'}(x_1=0) = 0 = C_3^{(1)} \Rightarrow \boxed{C_3^{(1)} = 0}$

aus (R6): $EI\,w^{(2)}(x_2=0) = 0 = C_4^{(2)} \Rightarrow \boxed{C_4^{(2)} = 0}$

aus (R8): $EI\,w^{(2)'''}(x_2=l) = F = C_1^{(2)} \Rightarrow \boxed{C_1^{(2)} = F}$

aus (R7): $EI\,w^{(2)''}(x_2=l) = 0 = Fl + C_2^{(2)} \Rightarrow \boxed{C_2^{(2)} = -Fl}$

aus (R3):

$$EI\, w^{(1)}(x_1=l) = 0 = \frac{c_1^{(1)} l^3}{6} + \frac{c_2^{(1)} l^2}{2} - q_0 l^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \qquad (*_1)$$

aus (R5):

$$EI\, w^{(1)}(x_1=l) = c_1^{(1)} l + c_2^{(1)} = EI\, w^{(2)}(x_2=0) = -Fl \qquad (*_2)$$

$(*_1) \cdot 6/l^2$, umstellen, paaren mit $(*_2)$:

$$c_1^{(1)} l + 3 c_2^{(1)} = 6 q_0 l^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4$$

$$c_1^{(1)} l + c_2^{(1)} = -Fl$$

voneinander abziehen

$$\Rightarrow 2 c_2^{(1)} = 6 q_0 l^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 + Fl \Rightarrow \boxed{c_2^{(1)} = \frac{Fl}{2} + 3 q_0 l^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4}$$

$$c_1^{(1)} = -F - c_2^{(1)}/l = -F - \frac{F}{2} - 3 q_0 l \left(\frac{2}{\pi}\right)^4$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1^{(1)} = -\frac{3}{2} F - 3 q_0 l \left(\frac{2}{\pi}\right)^4}$$

aus (R4):

$$EI\, w^{(1)\prime}(x_1=l) = -q_0 l^3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 + \frac{l^2}{2}\left(-\frac{3}{2}F - 3 q_0 l \left(\frac{2}{\pi}\right)^4\right) +$$

$$+ l\left(\frac{1}{2} Fl + 3 q_0 l^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4\right) = EI\, w^{(2)\prime}(x_2=0) = c_3^{(2)}$$

$$\Rightarrow c_3^{(2)} = q_0 l^3 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \left[-1 - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right) + 3\left(\frac{2}{\pi}\right)\right] + Fl^2\left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{c_3^{(2)} = \frac{q_0 l^3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \left[3\left(\frac{2}{\pi}\right) - 2\right] - \frac{Fl^2}{4}}$$

Zusammenstellen $\qquad$ A – B

$$EI\,w^{(1)}(x_1) = q_0 l^4 \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) + \frac{l^3}{6}\left(\frac{x_1}{l}\right)^3\left(-\frac{3}{2}F - 3q_0 l\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\right) +$$

$$+ \frac{l^2}{2}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(\frac{1}{2}Fl + 3q_0 l^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\right) - q_0 l^4\left(\frac{2}{\pi}\right)^4$$

$$= \frac{q_0 l^4}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) - 2 - \left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x_1}{l}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{Fl^3}{4}\left[-\left(\frac{x_1}{l}\right)^3 + \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\right]$$

$$= \frac{q_0 l^4}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\left[2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) - 1\right\} + \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left\{-\left(\frac{x_1}{l}\right) + 3\right\}\right] +$$

$$+ \frac{Fl^3}{4}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left\{1 - \frac{x_1}{l}\right\}$$

$$\Rightarrow w^{(1)}(x_1) = \frac{q_0 l^4}{2EI}\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x_1}{l}\right) - 1\right) + \left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(3 - \frac{x_1}{l}\right)\right] + \frac{Fl^3}{4EI}\left(\frac{x_1}{l}\right)^2\left(1 - \frac{x_1}{l}\right)$$

Weiterführung mit $w^{(2)}(x_2)$

B – C

$$EI\,w^{(2)}(x_2) = \frac{\ell^3}{6}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)^3 (F) + \frac{\ell^2}{2}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)^2(-F\ell) + \ell\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left(\frac{q_0\ell^3}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(3\left(\frac{2}{\pi}\right)-2\right)\right) -$$

$$- \frac{F\ell^3}{4}\left(\frac{x_2}{\ell}\right) + 0$$

$$= \frac{q_0\ell^4}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left(3\left(\frac{2}{\pi}\right)-2\right) + \frac{F\ell^3}{12}\left(2\left(\frac{x_2}{\ell}\right)^3 - 6\left(\frac{x_2}{\ell}\right)^2 - 3\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\right)$$

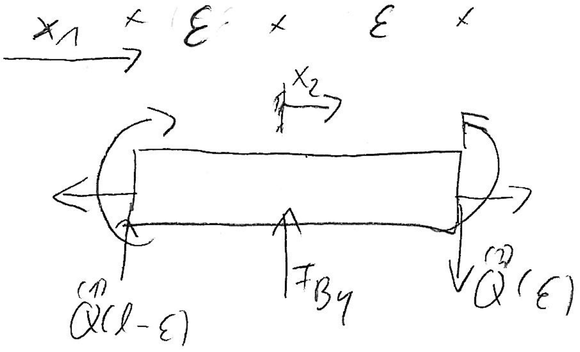
$$= -\frac{q_0\ell^4}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left(2-3\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) + \frac{F\ell^3}{12}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left[-3 + \left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left\{-6 + 2\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\right\}\right]$$

$$w^{(2)}(x_2) = \frac{-q_0\ell^4}{2EI}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left(2-3\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) - \frac{F\ell^3}{12EI}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left[3 + \left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left\{6 - 2\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\right\}\right]$$

e) $w^{(2)}(x_2=\ell) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -6q_0\ell^4\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(2-3\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) = 7F\ell^3$

$$\Rightarrow F = -\frac{6}{7}q_0\ell\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(2-3\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$$

f)



$\varepsilon \to 0$

$$\sum F_{iz} = 0 = \overset{(2)}{Q}(0) - \overset{(1)}{Q}(l) - F_{By}$$

$$\Rightarrow F_{By} = \overset{(2)}{Q}(0) - \overset{(1)}{Q}(l)$$

$$\overset{(2)}{Q}(0) = -EI\, \overset{(2)}{w}{}'''(0) = -\overset{(2)}{C_1} = -F$$

$$\overset{(1)}{Q}(l) = -EI\, \overset{(1)}{w}{}'''(l) = -q_0 l \frac{2}{\pi} - \overset{(1)}{C_1}$$

$$= -q_0 l \frac{2}{\pi} + \frac{3}{2} F + 3 q_0 l \left(\frac{2}{\pi}\right)^4$$

$$= -q_0 l \frac{2}{\pi}\left(1 - 3\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\right) + \frac{3}{2} F$$

$$F_{By} = -F + q_0 l \frac{2}{\pi}\left(1 - 3\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\right) - \frac{3}{2} F = \underline{\underline{q_0 l \frac{2}{\pi}\left(1 - 3\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\right) - \frac{5}{2} F}}$$

$\boxed{5}$ a) A – B

$$I_p^{(1)} = \frac{\pi}{2} R^4$$

B – C

$$I_p^{(2)} = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - \left(\frac{R}{2}\right)^4\right) = \frac{\pi}{2} R^4 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{15}{32} \pi R^4$$

b) Über Aufzieh methode

in B–C ist $M_T^{(2)} = Fa$

in A–B ist $M_T^{(1)} = Fa + Fa - 4Fa = -2Fa$

c) Für B:

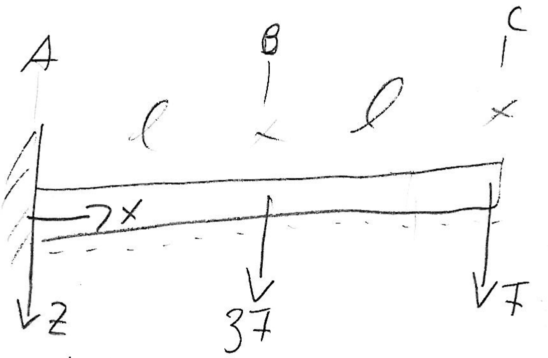
$$\varphi(l) = \frac{M_T^{(1)} l}{G I_p^{(1)}} = \frac{-2Fa l \, 2}{G \pi R^4} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{Fal}{GR^4}$$

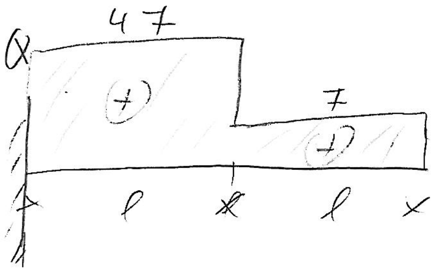
Für C:

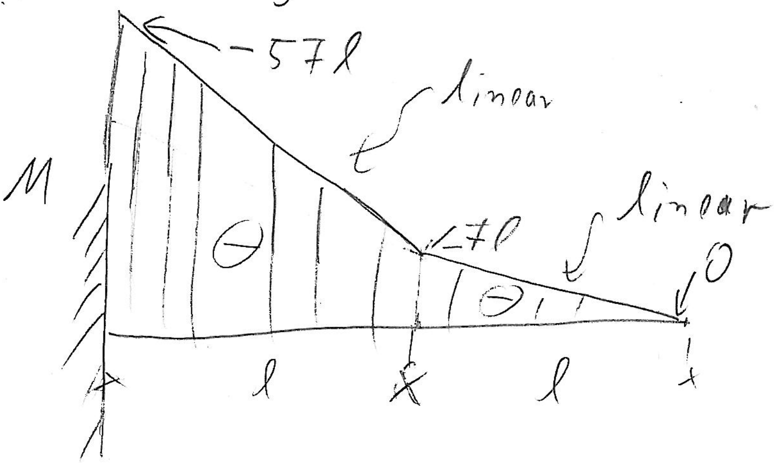
$$\varphi(2l) = \frac{M_T^{(1)} l}{G I_p^{(1)}} + \frac{M_T^{(2)} l}{G I_p^{(2)}} = -\frac{4}{\pi} \frac{Fal}{GR^4} + \frac{Fal \, 32}{G \, 15 \pi R^4}$$

$$= \frac{Fal}{G\pi R^4}\left(-4 + \frac{32}{15}\right) = -\frac{28}{15} \frac{Fal}{G\pi R^4}$$

d) Auf ziehmethode







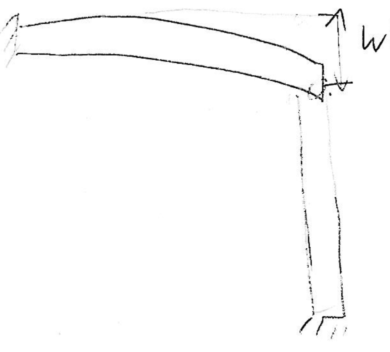
$\boxed{6}$

a) Ansatz: $q(x) = Ax + B$

RBs: $q(x=0) = 0 \leadsto B = 0$

$q(x=l) = q_0 \leadsto A = \frac{q_0}{l}$ $\Big\}$ $q(x) = q_0 \frac{x}{l}$

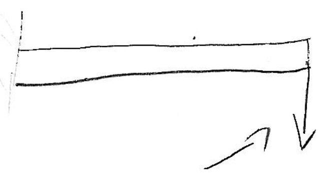
b)



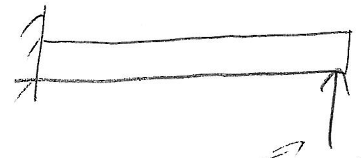
c) $F_{Stab} = EA\left(\frac{\Delta l}{l} - \alpha\Delta T\right) = EA\left(-\frac{w(l)}{l} - \alpha\Delta T\right) = -\frac{EA}{l}(w(l) + \alpha\Delta T l)$

$\Rightarrow$ $w(l)$ positiv oder $\Delta T > 0$ erzeugen Druckkraft!

Entweder



oder



d) $w(x=0) = 0 \leadsto EI\,w(x=0) = 0$ (R1)

$w'(x=0) = 0 \leadsto EI\,w'(x=0) = 0$ (R2)

$M(x=l) = 0 \leadsto EI\,w''(x=l) = 0$ (R3)

$Q(x=l) = -\frac{EA}{l}(w(l) + \alpha\Delta T l) \leadsto EI\,w'''(x=l) = \frac{EA}{l}(w(l) + \alpha\Delta T l)$ (R4)

e) $EI\,w^{IV}(x) = q(x) = q_0 \frac{x}{l}$

$$EI\,w'''(x) = \frac{q_0 l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_1$$

$$EI\,w''(x) = \frac{q_0 l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + C_1 l \frac{x}{l} + C_2$$

$$EI\,w'(x) = \frac{q_0 l^3}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{C_1 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_2 l\left(\frac{x}{l}\right) + C_3$$

$$EI\,w(x) = \frac{q_0 l^4}{120}\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{C_1 l^3}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{C_2 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_3 l \frac{x}{l} + C_4$$

aus (R1): $EI\,w(0) = 0 = C_4 \Rightarrow \boxed{C_4 = 0}$

aus (R2): $EI\,w'(0) = 0 = C_3 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$

aus (R4): $EI\,w'''(l) = \frac{EA}{l}\left(w(l) + \alpha \Delta T l\right) =$

$$= \frac{EA}{l}\left[\frac{q_0 l^4}{EI\,120} + \frac{C_1 l^3}{EI\,6} + \frac{C_2 l^2}{EI\,2} + \alpha \Delta T l\right] =$$

$$= \frac{q_0 l}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{q_0 l^4}{120 EI} + \frac{l^3}{6EI} C_1 + \frac{l^2}{2EI} C_2 + \alpha \Delta T l = \frac{q_0 l^2}{2EA} + \frac{l C_1}{EA} \qquad (*1)$$

aus (R3)

$$EI\,w''(l) = 0 = \frac{q_0 l^2}{6} + C_1 l + C_2 :$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{q_0 l^2}{6} - C_1 l \qquad (*2)$$

(*2) in (*1):

$$\frac{q_0 l^4}{120EI} + \frac{l^3}{6EI} c_1 - \frac{q_0 l^4}{12EI} - \frac{c_1 l^3}{2EI} + \alpha \Delta T l = \frac{q_0 l^2}{2EA} + \frac{l}{EA} c_1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{9 q_0 l^4}{120 EI} - \frac{q_0 l^2}{2EA} + \alpha \Delta T l = \frac{l}{EA} c_1 + \frac{l^3}{3EI} c_1 = \frac{l}{3EA}\left(3 + \frac{l^2 EA}{EI}\right) c_1$$

$$= -\frac{q_0 l^2}{120 EA}\left[9 \frac{EAl^2}{EI} + 60\right] + \alpha \Delta T l$$

$$\Rightarrow \quad \left(3 + \frac{l^2 EA}{EI}\right) c_1 = \frac{-q_0 l}{40}\left[9 \frac{EAl^2}{EI} + 60\right] + 3 EA \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{-q_0 l}{40} \frac{9 \frac{EAl^2}{EI} + 60}{\frac{EAl^2}{EI} + 3} + \frac{3}{\frac{EAl^2}{EI} + 3} EA \alpha \Delta T}$$

$$c_2 = -\frac{q_0 l^2}{6} + \frac{q_0 l^2}{40} \frac{9 \frac{EAl^2}{EI} + 60}{\frac{EAl^2}{EI} + 3} - \frac{3}{\frac{EAl^2}{EI} + 3} EA \alpha \Delta T l$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{q_0 l^2}{120} \frac{23 \frac{EAl^2}{EI} + 177}{\frac{EAl^2}{EI} + 3} - \frac{3}{\frac{EAl^2}{EI} + 3} EA \alpha \Delta T l$$

Abkürzung: $\gamma = \dfrac{EAl^2}{EI}$

$$\Rightarrow \quad c_1 = -\frac{q_0 l}{40}\,\frac{9\gamma+60}{\gamma+3} + 3\left[\gamma+3\right]^{-1} EA\alpha\Delta T$$

$$c_2 = \frac{q_0 l^2}{120}\,\frac{23\cdot\gamma+177}{\gamma+3} - 3\left[\gamma+3\right]^{-1} EA\alpha\Delta T\, l$$

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120EI}\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{l^3}{6EI}\left(-\frac{q_0 l}{40}\,\frac{9\gamma+60}{\gamma+3} + 3\left[\gamma+3\right]^{-1} EA\alpha\Delta T\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 +$$

$$+ \frac{l^2}{2EI}\left(\frac{q_0 l^2}{120}\,\frac{23\gamma+177}{\gamma+3} - 3\left[\gamma+3\right]^{-1} EA\alpha\Delta T\, l\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$= \frac{q_0 l^4}{240EI}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^5 - \frac{9\gamma+60}{\gamma+3}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{23\gamma+177}{\gamma+3}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{EA\alpha\Delta T l^3}{6EI}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

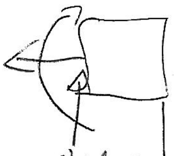
$$= \frac{q_0 l^4}{240EI}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left[\frac{23\gamma+177}{\gamma+3} - \frac{9\gamma+60}{\gamma+3}\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] +$$

$$+ \frac{\gamma l\alpha\Delta T}{6}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

f) Entweder $w(l)$ in $F_{Stab} = -\frac{EA}{l}(w(l) + \alpha \Delta T\, l)$ einsetzen oder Actio = Reactio nutzen und

$Q(l) = -EI\, w'''(l)$ berechnen

$\times\ \varepsilon\ \times$



$\varepsilon \to 0$

$Q(l-\varepsilon)$ $\downarrow F_S = -\frac{\alpha \Delta T}{l}(w(l) + \alpha \Delta T\, l)$

$Q(l) = F_S$

$$Q(l) = -EI\, w'''(l) = -\frac{q_0 l}{2} - C_1 = -\frac{q_0 l}{2} + \frac{q_0 l}{40}\,\frac{9\gamma + 60}{\gamma + 3} - 3[\gamma + 3]^{-1} EA\alpha\Delta T$$

$$\boxed{= -\frac{q_0 l}{40}\left[20 - \frac{9\gamma + 60}{\gamma + 3}\right] - 3[\gamma + 3]^{-1} \alpha \Delta T}$$