Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

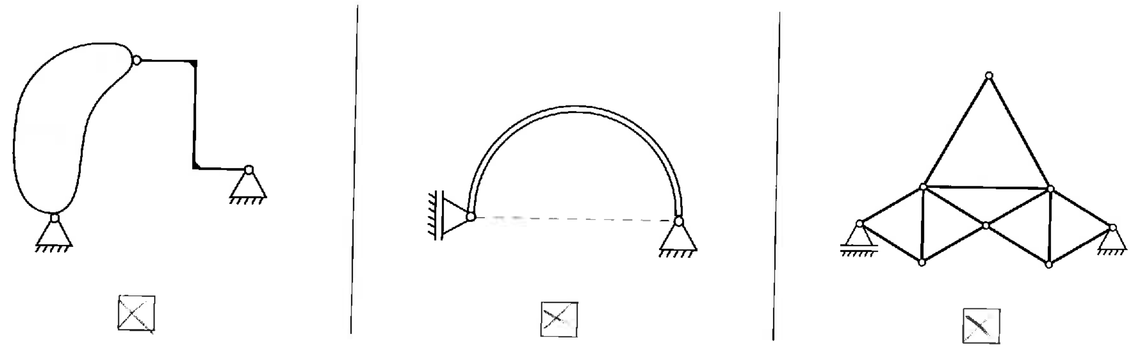
Technische Universität Berlin
LKM

Klausur – Statik und elementare Festigkeitslehre WS 2017/18

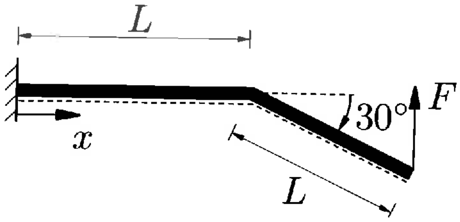
Name, Vorname: Musterlösung Matr.-Nr.:

Theorieteil

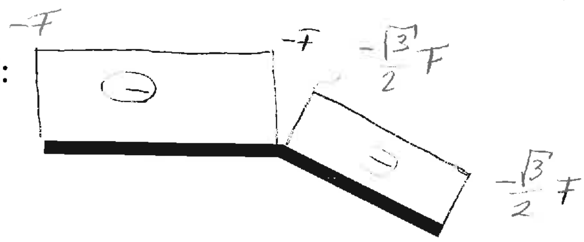
1. Für welche Systeme, bestehend aus Scheiben und/oder Stäben, ist die *notwendige* Bedingung für statische Bestimmtheit erfüllt? Kreuzen Sie an (mehrere Kreuze möglich). **(1 Punkt)**



2. Ein einseitig fest eingespannter Träger ist an seinem freien Ende mit der Punktkraft F belastet. Zeichnen Sie den Querkraftsverlauf $Q(x)$ über dem rechts gezeichneten Träger und geben Sie markante Werte vorzeichenrichtig an. **(1 Punkt)**
Geg.: F, L, $\alpha = 30°$.



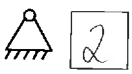
$Q(x)$:

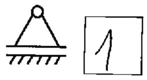


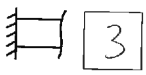
3. Geben Sie die Maßeinheiten der folgend aufgeführten Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, N, kg, m, s und K an: **(1 Punkt)**

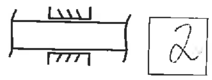
	Spannung σ	Wärmeausdehnungs-koeffizient α	Streckenlast q_0	Schubmodul G
Maßeinheit	$\frac{N}{m^2}$ / $\frac{kg}{ms^2}$	$\frac{1}{K}$	$\frac{N}{m}$ / $\frac{kg}{s^2}$	$\frac{N}{m^2}$ / $\frac{kg}{ms^2}$

4. Tragen Sie die Zahl der jeweiligen Lagerwertigkeit ein. **(1 Punkt)**



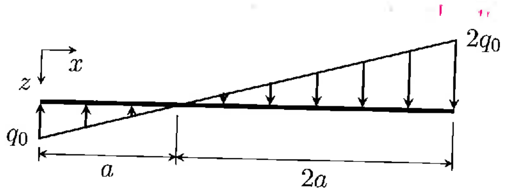






Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

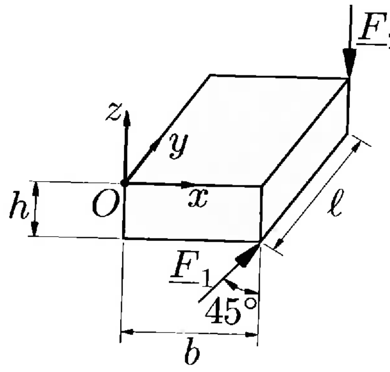
5. Bestimmen Sie den Betrag F_{res} und die Lage x_{res} der aus der *linearen* Streckenlast resultierenden Kraft. Führen Sie eventuelle Nebenrechnungen auf einem Extrablatt durch. **(2 Punkte)**
Geg.: q_0, a.



$F_{\text{res}} = \frac{3}{2} q_0 a$ 1P

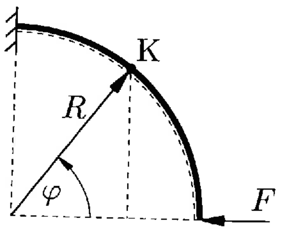
$x_{\text{res}} = 3a$ 1P

6. Geben Sie das, auf den Ursprung O wirkende Gesamtmoment $\underline{M}^{(O)}$ vektoriell und in gegebenen Größen an. *Hinweis*: Beide Kräfte greifen in einer Ebene an, die parallel zur x-z-Ebene ist. **(1 Punkt)**
Geg.: b, h, ℓ, $|\underline{F}_1| = F$, $|\underline{F}_2| = F$.



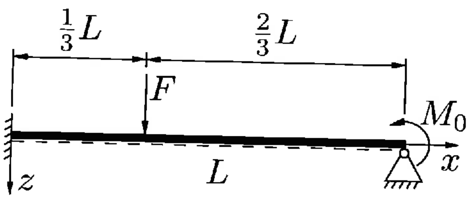
$$\underline{M}^{(O)} = \begin{bmatrix} -F\ell \\ (1-\sqrt{2}/2)Fb - \sqrt{2}/2\,Fh \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. Geben Sie den Verlauf des Biegemoments M als Funktion des Winkels φ an. *Hinweis:* Betrachten Sie die Momente im Punkt K mithilfe des elementaren Schnittverfahrens oder der Aufziehmethode. **(1 Punkt)**
Geg.: F, R.



$M(\varphi) = -FR\sin(\varphi)$

8. Kreuzen Sie die für den dargestellten Balken die gültigen Randbedingungen für die Biegeliniendifferentialgleichung vierter Ordnung an. Es sind mehrere Kreuze möglich.
Geg.: F L, M_0, EI_{yy}



- [ ] $w'''(0) = \frac{M_0}{L}$
- [x] $EI_{yy}w'(0) = 0$
- [x] $w(0) = 0$
- [ ] $EI_{yy}w'''(0) = \frac{2}{3}F$

(1 Punkt)

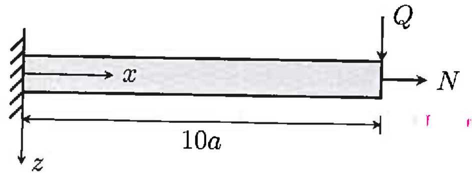
- [x] $w(L) = 0$
- [ ] $EI_{yy}w'''(L) = 0$
- [x] $-EI_{yy}w''(L) = M_0$
- [ ] $EI_{yy}w'(L) = 0$

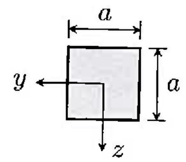
(1 Punkt)

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

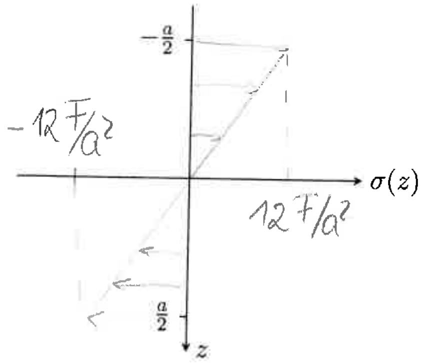
Technische Universität Berlin LKM

9. Skizzieren Sie für den dargestellten Balken den Verlauf der Normalspannung $\sigma(z)$ an der Stelle $x = 0$ für die beiden unten angegeben Fälle. Nutzen Sie die Größen a und F. Geben Sie markante Punkte in den Diagrammen an. Geg.: F, a.

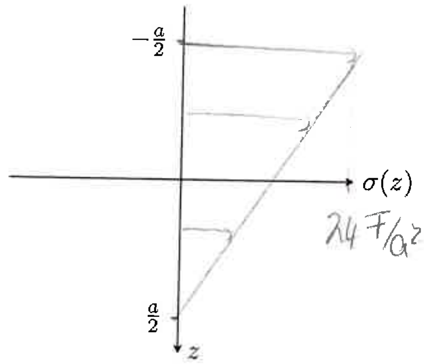




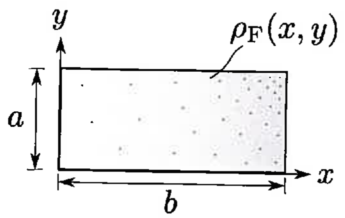
a) Falls $N = 0$ und $Q = \frac{F}{5}$: **(1 Punkt)**



b) Falls $N = 12F$ und $Q = \frac{F}{5}$: **(1 Punkt)**



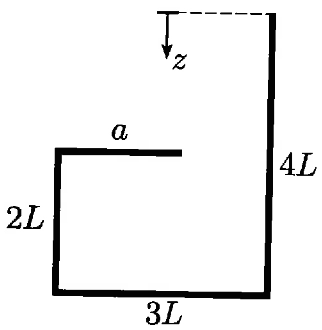
10. Die dargestellte Fläche besitzt eine gegebene inhomogene Massendichteverteilung $\rho_F(x,y)$. Berechnen Sie die Masse der Fläche m und die Position des Flächenschwerpunktes (x_S,y_S). **(2 Punkte)**
Geg.: a, b, $\rho_F(x,y) = \rho_0(1 + \frac{x}{b})^2(1 + \frac{y}{2a})$. *Hinweis*: $[\rho_F] = \text{kg}\,\text{m}^{-2}$.



$m = \frac{35}{12}\rho_0 a b$ 1P

$y_S = \frac{8}{15} a$ 1P

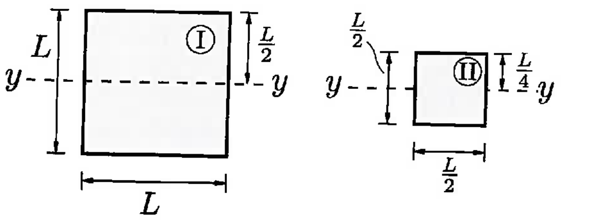
11. Bestimmen Sie die Länge a so, dass die z-Komponente des Linienmittelpunkts bei $z_{S_L} = 5/2L$ liegt. **(1 Punkt)**
Geg.: L.



$a = 7L$

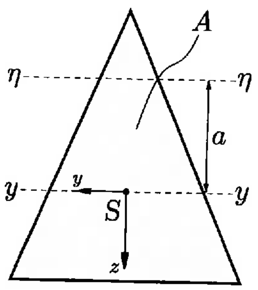
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

12. Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment I_{yy}^{II} des kleineren Profils? Kreuzen Sie an. **(1 Punkt)**
Geg.: $I_{yy}^{\mathrm{I}} = 160\,\mathrm{cm}^4$.



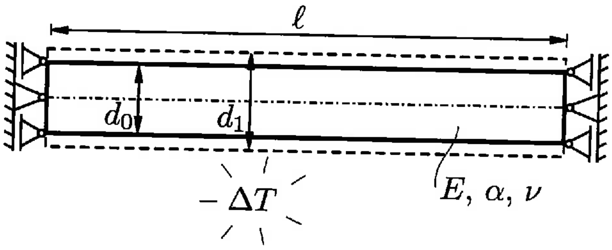
- [x] $I_{yy}^{II} = 10\,\mathrm{cm}^4$
- [ ] $I_{yy}^{II} = 20\,\mathrm{cm}^4$
- [ ] $I_{yy}^{II} = 80\,\mathrm{cm}^4$

13. Wie lautet das Flächenträgheitsmoment $I_{\eta\eta}$ der dargestellten Fläche A? **(1 Punkt)**
Geg.: A, a, I_{yy}.



$I_{\eta\eta} = I_{yy} + a^2 A$

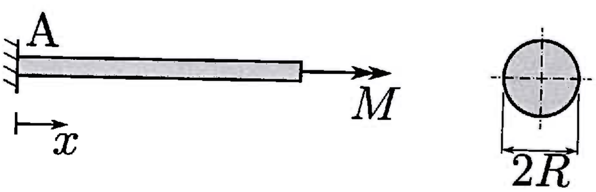
14. Der dargestellte zylindrische Balken wird aus einer spannungsfreien Ausgangssituation um die Temperaturdifferenz ΔT erwärmt. Geben Sie die axiale Spannung σ und die relative Änderung des Durchmessers an.
Geg.: E, α, ν, ΔT, ℓ. **(2 Punkte)**



$\sigma = -E\alpha\Delta T$ $\boxed{1P}$

$\frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = (1+\nu)\alpha\Delta T$ $\boxed{1P}$

15. Geben Sie für den dargestellten Vollzylinder die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ aufgrund des Torsionsmoments M an. **(1 Punkt)**
Geg.: M, R.



$\tau_{\max.} = \frac{2M}{\pi R^3}$

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

a) $S = 27, \; r = 3, \; k = 15$

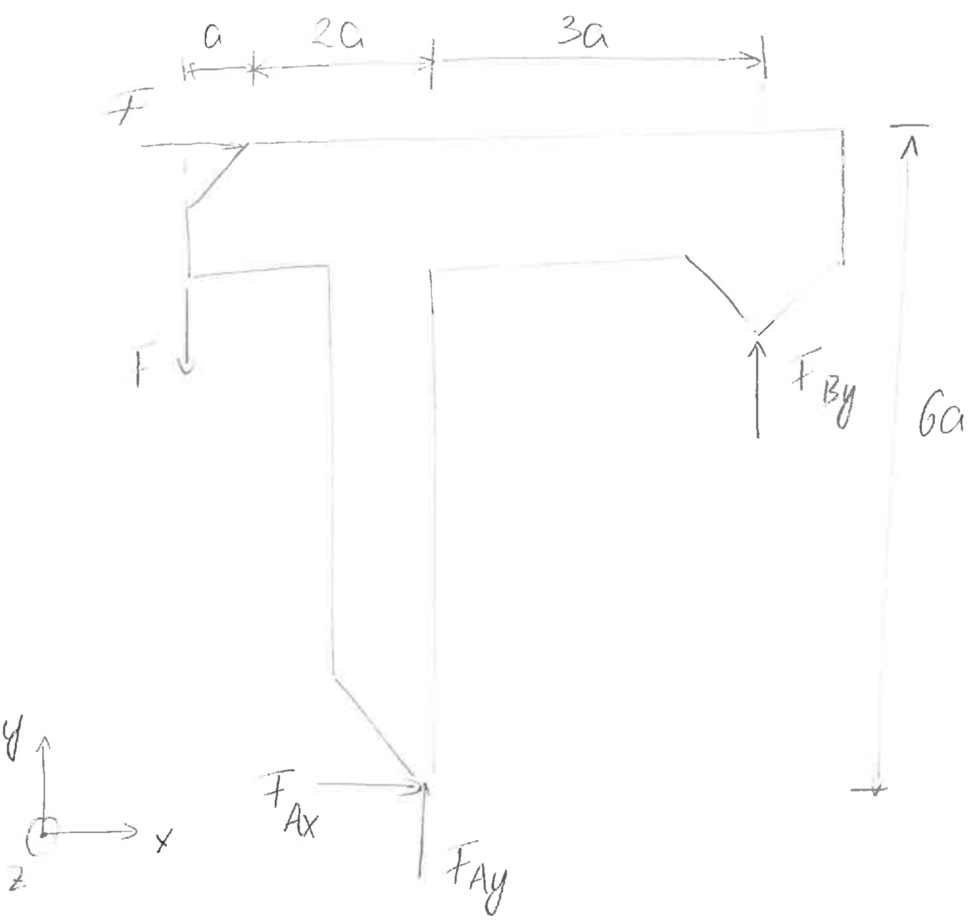
$2 \cdot 15 = 2k \overset{!}{=} r + S = 30$

Das System ist statisch bestimmt, da $2k = r + S$ ist. $\boxed{1P}$

b) Nullstäbe sind: $S_3, S_{14}, S_{21}, S_{22}$. $\boxed{1P}$

c)

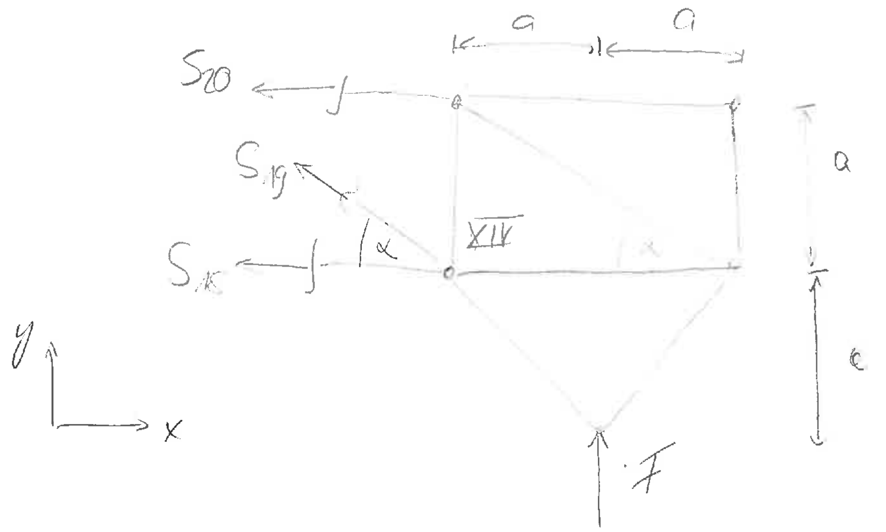
Freischnitt $\boxed{1P}$ (Bemaßung ist nicht nötig)



$$\begin{cases} \sum F_y = F_{Ay} + F_{By} - F \overset{!}{=} 0 \\ \sum F_x = F_{Ax} + F \overset{!}{=} 0 \\ \sum M_z^{(A)} = +3a\,F - 6a\,F + 3a\,F_{By} \overset{!}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} F_{Ay} = 0 \\ F_{Ax} = -F \end{array}\right\} \boxed{1P} \\ F_{By} = F \quad \boxed{1P} \end{cases}$$

d) Schnitt durch Stäbe 18, 19, 20: $\boxed{1P}$ (Bemaßung nicht nötig)



Bestimmung des Winkels: $\boxed{1P}$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{2a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

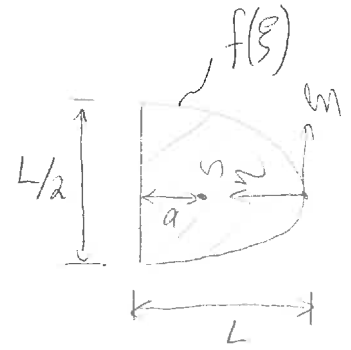
$$\begin{cases} \sum M^{(XIV)} = a\,F + a\,S_{20} \overset{!}{=} 0 \\ \sum F_x = -S_{18} - S_{20} - S_{19}\frac{2}{\sqrt{5}} \overset{!}{=} 0 \\ \sum F_y = S_{19}\frac{1}{\sqrt{5}} + F \overset{!}{=} 0 \end{cases} \iff \begin{cases} S_{20} = -F \quad \boxed{1P} \\ S_{18} = 3F \quad \boxed{1P} \\ S_{19} = -\sqrt{5}\,F \quad \boxed{1P} \end{cases}$$

$S_{18} \to$ Zug, $S_{19} \to$ Druck, $S_{20} \to$ Druck

2. Aufgabe 10 Punkte

(3)

Hilfskoordinatensystem:



$$f(\xi) = L\left(\frac{\xi}{L/4}\right)^2$$

$$\eta_F = \frac{\iint \eta \, dA}{\iint dA}$$

$$\iint \eta \, dA = \int_{-L/4}^{L/4} \int_{f(\xi)}^{L} \eta \, d\eta \, d\xi = \int_{-L/4}^{L/4} \frac{1}{2}\left(L^2 - f^2(\xi)\right) d\xi = \int_{-L/4}^{L/4} \frac{L^2}{2}\left(1 - \left(\frac{\xi}{L/4}\right)^4\right) d\xi$$

$$= \frac{L^3}{8}\left[\left(\frac{\xi}{L/4}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{\xi}{L/4}\right)^5\right]_{-L/4}^{L/4} = \frac{L^3}{8}\left(2 - \frac{2}{5}\right) = \frac{L^3}{5}$$

$$\iint dA = \int_{-L/4}^{L/4} \int_{f(\xi)}^{L} d\eta \, d\xi = \int_{-L/4}^{L/4} \left(L - f(\xi)\right) d\xi = \int_{-L/4}^{L/4} L\left(1 - \left(\frac{\xi}{L/4}\right)^2\right) d\xi$$

$$= \frac{L^2}{4}\left[\left(\xi/L/4\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{L/4}\right)^3\right]_{-L/4}^{L/4} = \frac{L^2}{4}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{L^2}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_F &= \frac{3}{5} L \\ a &= L - \eta_F = \frac{2}{5} L \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

oder Formelsammlung statt Integration

④

$$x_{F,1} = L + a = \frac{7}{5}L \quad \boxed{1P}$$

b)

Teilfläche	$x_{F,i}$	A_i	$x_{F,i} A_i$	c) ρ_i	$\rho_i x_{F,i} A_i$	$\rho_i A_i$
I	$7/5\, L$	$L^2/3$	$\frac{7}{15} L^3$	ρ_1	$\frac{7}{15}\rho_1 L^3$	$\rho_1 L^2/3$
II	0	L^2	0	ρ_2	0	$\rho_2 L^2$
III	$L/2$	$L^2/8$	$L^3/16$	ρ_2	$\rho_2 \frac{L^3}{16}$	$\rho_2 L^2/8$
IV	$-L/2$	$L^2/8$	$-L^3/16$	ρ_2	$-\rho_2 \frac{L^3}{16}$	$\rho_2 L^2/8$
V	0	$-L^2/4$	0	ρ_2	0	$-\rho_2 L^2/4$
Σ		$\frac{4}{3} L^2$	$\frac{7}{15} L^3$		$\frac{7}{15}\rho_1 L^3$	$\frac{\rho_1 L^2}{3} + \rho_2 L^2$
		$\boxed{1P}$ für Spalte	$\boxed{1P}$ für Spalte	$\boxed{1P}$	$\boxed{1P}$	

b)

$$x_F = \frac{\sum_i x_{F,i} A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\frac{7}{15} L^3}{\frac{4}{3} L^2} = \frac{7}{20} L \quad \boxed{1P}$$

c)

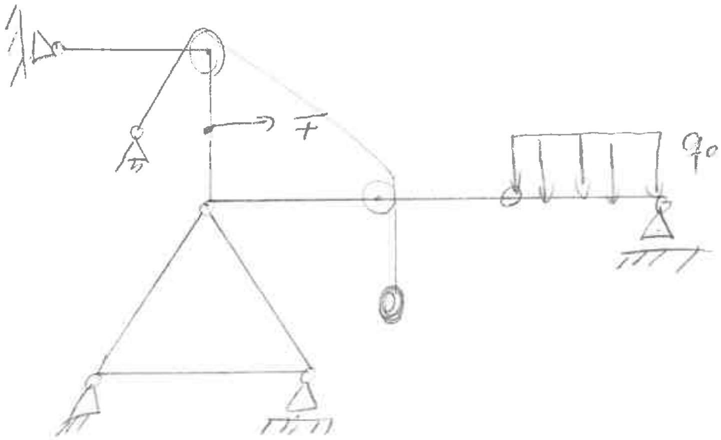
$$x_S = \frac{\sum_i \rho_i x_{F,i} A_i}{\sum_i \rho_i A_i} = \frac{\frac{7}{15}\rho_1 L^3}{\frac{\rho_1 L^2}{3} + \rho_2 L^2} = \frac{7}{5} \frac{\rho_1}{\rho_1 + 3\rho_2} L \quad \boxed{1P}$$

d) Bedingung : $x_S = L$ $\boxed{1P}$ (5)

$$x_S = L \Leftrightarrow \frac{7}{5}\,\frac{S_1}{S_1 + 3S_2}\,L = L \Leftrightarrow \frac{7}{5}S_1 = S_1 + 3S_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}S_1 = 3S_2 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{15}{2} \quad \boxed{1P}$$

3) ⑥



a) Körper : $k = 3$

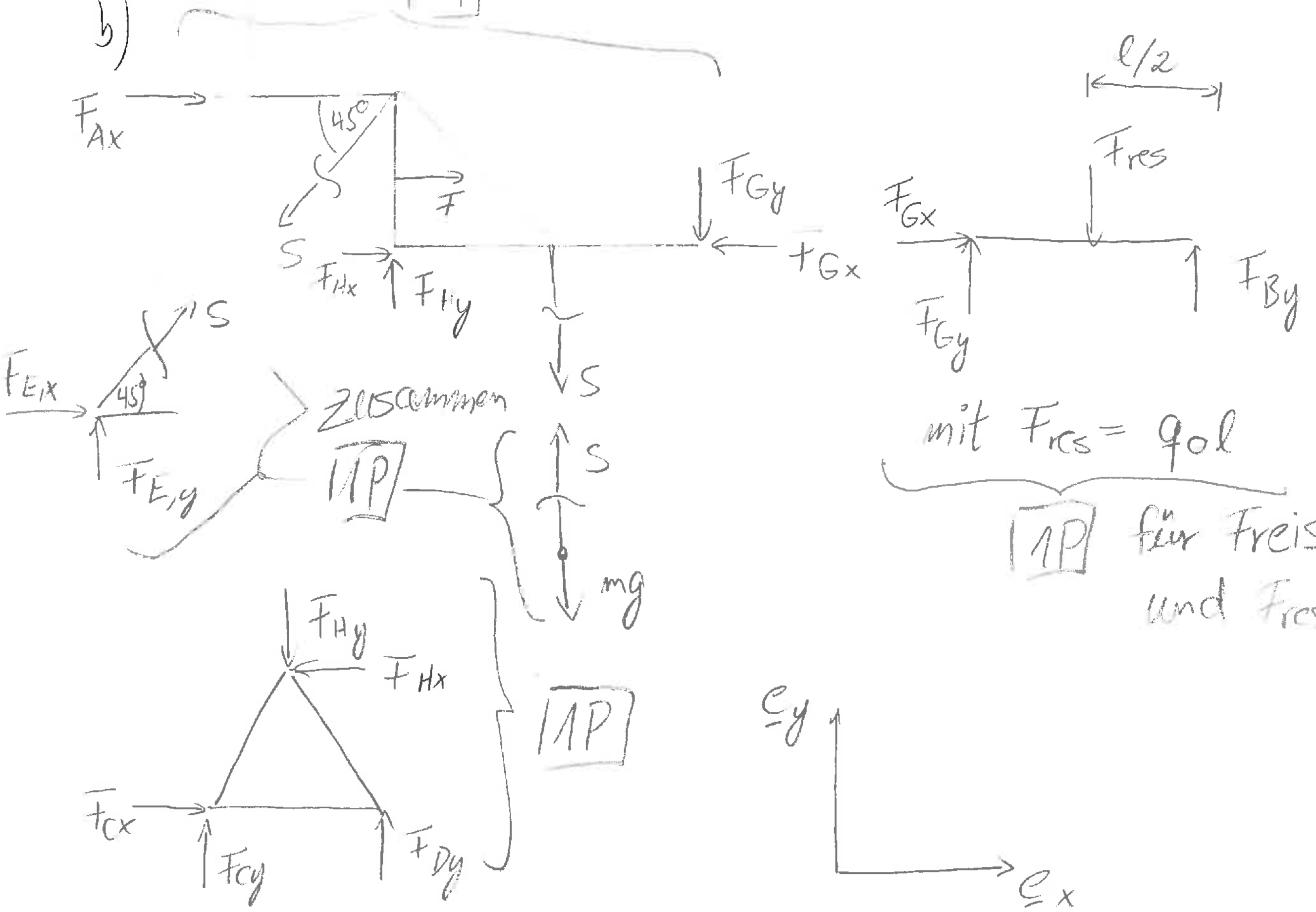
Lagerreaktionen : $r = 5$

Verbindungsreaktionen : $v = 4$

$\boxed{1P}$ $3k = r + v \Leftrightarrow 9 = 9$ ✓

Ja, das System ist statisch bestimmt, ① da $3k = r + v$ ist.

b) $\boxed{1P}$



zusammen $\boxed{1P}$

$\boxed{1P}$

mit $F_{res} = q_0 l$

$\boxed{1P}$ für Freischnitt und F_{res}, x_{res}

c) Winkelträger:

$$\sum F_x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Ax} + F - F_{Gx} + F_{Hx} - \frac{\sqrt{2}}{2} S \overset{!}{=} 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Hy} - F_{Gy} - S - \frac{\sqrt{2}}{2} S = 0 \quad (2)$$

$$\sum M^{(H)} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -F_{Ax} l + \frac{\sqrt{2}}{2} Sl - \frac{Fl}{2} - Sl - 2F_{Gy} l \overset{!}{=} 0 \quad (3)$$

1P

Dreiecksscheibe:

$$\sum F_x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Cx} - F_{Hx} \overset{!}{=} 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Cy} + F_{Dy} - F_{Hy} \overset{!}{=} 0 \quad (5)$$

$$\sum M^{C} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Dy} l - \frac{1}{2} F_{Hy} l + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Hx} l \overset{!}{=} 0 \quad (6)$$

1P

Träger:

$$\sum F_x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Gx} = 0 \quad (7)$$

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{By} + F_{Gy} - q_0 l = 0 \quad (8)$$

$$\sum M^{B} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -F_{Gy} l + \frac{1}{2} q_0 l^2 \overset{!}{=} 0 \quad (9)$$

1P

Seil / Lager E

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow S - mg \overset{!}{=} 0$$

$$\sum F_x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Ex} + \frac{\sqrt{2}}{2} S \overset{!}{=} 0$$

$$\sum F_y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow F_{Ey} + \frac{\sqrt{2}}{2} S \overset{!}{=} 0$$

1P

8

d) (9): $F_{Gy} = \underline{\underline{\frac{q_0 l}{2}}}$ und (7): $F_{Gx} = \underline{\underline{0}}$ $\Big\}$ $\boxed{1P}$

(8) $\Rightarrow$ $F_{By} = q_0 l - F_{Gy} = \underline{\underline{\frac{1}{2} q_0 l}}$ $\boxed{1P}$

(3) $\Rightarrow$ $F_{Ax} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) S - \frac{q_0 l}{2} - 2 \frac{q_0 l}{2} = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right) mg - \frac{3}{2} q_0 l}}$ $\boxed{1P}$

$$\left.\begin{aligned}
&(2) \Rightarrow \quad F_{Hy} = F_{Gy} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) S \\
&\qquad\qquad = \underline{\underline{\frac{q_0 l}{2} + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) mg}} \\
&(1) \Rightarrow \quad F_{Hx} = \frac{\sqrt{2}}{2} S - q_0 l - F_{Ax} + F_{Gx}^{\nearrow 0} \\
&\qquad\qquad = \frac{\sqrt{2}}{2} mg - q_0 l - \left(\frac{\sqrt{2}-2}{2}\right) mg + \frac{3}{2} q_0 l \\
&\qquad\qquad = \underline{\underline{\frac{1}{2} q_0 l + mg}}
\end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

(4) $\Rightarrow F_{Cx} = F_{Hx} = \underline{\underline{\frac{1}{2} q_0 l + mg}}$

(6) $\Rightarrow$ $F_{Dy} = \frac{1}{2} F_{Hy} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Hx} = \frac{1}{2}\left(\frac{q_0 l}{2} + \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) mg - \frac{\sqrt{3}\, q_0 l}{2} - \sqrt{3}\, mg\right)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} q_0 l + \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) mg\right)}}$ $\boxed{1P}$

(5) $\Rightarrow$ $F_{Cy} = F_{Hy} - F_{Dy} = \frac{1}{2} F_{Hy} + \frac{\sqrt{3}}{2} F_{Hx}$

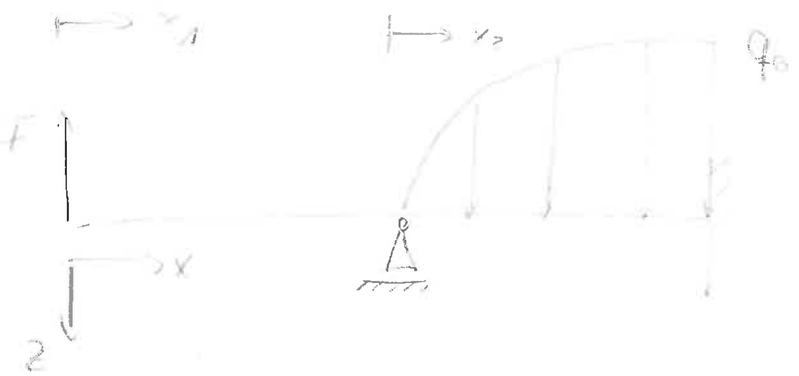
$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} q_0 l + \left(1 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) mg\right)}}$ $\boxed{1P}$ mit F_{Cx}

9

$$\left.\begin{aligned} F_{Ex} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\, mg \\ F_{Ey} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\, mg \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

4. Aufgabe 19 Punkte 10

a) Bereichseinteilung:
- Bereich I: $0 \le x < L$
- Bereich II: $L \le x < 2L$



$\boxed{1P}$

b) Ansatz:

$$q(x_2) = a x_2^2 + b x_2 + c \qquad \boxed{1P}$$

Randbedingungen:

$q(x_2=0)=0$, $q'(x_2=L)=0$

$q(x_2=L)=q_0$

$$\begin{cases} c = 0 \\ 2aL + b = 0 \\ aL^2 + bL = q_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{q_0}{L^2}, \; b = \frac{2q_0}{L} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$q(x_2) = -\frac{q_0}{L^2} x_2^2 + 2\frac{q_0}{L} x_2 = q_0\left(\frac{x_2}{L}\right)\left(2 - \frac{x_2}{L}\right) \qquad \boxed{1P}$$

c) Bereich I:

$$EI_{yy}\, w_1''(x_1) = -M_1(x_1) = -FL\left(\frac{x_1}{L}\right) \qquad \boxed{1P}$$

$$\left.\begin{aligned} EI_{yy}\, w_1'(x_1) &= -\frac{FL^2}{2}\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 + C_1 \\ EI_{yy}\, w_1(x_1) &= -\frac{FL^3}{6}\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 + C_1 L\left(\frac{x_1}{L}\right) + C_2 \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

Bereich II

$$EI_{yy}\, w_2^{IV}(x_2) = q(x_2) = q_0\left(2\frac{x_2}{L} - \left(\frac{x_2}{L}\right)^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} EI_{yy}\, w_2'''(x_2) &= q_0 L\left[\left(\frac{x_2}{L}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{L}\right)^3\right] + D_1 \\ EI_{yy}\, w_2''(x_2) &= q_0 L^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{L}\right)^3 - \frac{1}{12}\left(\frac{x_2}{L}\right)^4\right] + D_1 L\left(\frac{x_2}{L}\right) + D_2 \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

$$EI_{yy}\, w_2'(x_2) = q_0 L^3\left[\frac{1}{12}\left(\frac{x_2}{L}\right)^4 - \frac{1}{60}\left(\frac{x_2}{L}\right)^5\right] + \frac{D_1 L^2}{2}\left(\frac{x_2}{L}\right)^2 + D_2 L\frac{x_2}{L} + D_3$$

$$EI_{yy}\, w_2(x_2) = \frac{q_0 L^4}{15}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{x_2}{L}\right)^5 - \frac{1}{24}\left(\frac{x_2}{L}\right)^6\right] + \frac{D_1 L^3}{6}\left(\frac{x_2}{L}\right)^3 + \frac{D_2 L^2}{2}\left(\frac{x_2}{L}\right)^2 + D_3 L\frac{x_2}{L} + D_4$$

$\boxed{1P}$

$$= \frac{q_0 L^4}{60}\left[\left(\frac{x_2}{L}\right)^5 - \frac{1}{6}\left(\frac{x_2}{L}\right)^6\right] + \frac{D_1 L^3}{6}\left(\frac{x_2}{L}\right)^3 + \frac{D_2 L^2}{2}\left(\frac{x_2}{L}\right)^2 + D_3 L\frac{x_2}{L} + D_4$$

d)

Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} w(x=2L) &= 0 \\ w'(x=2L) &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

$$\left(\begin{aligned} M(x=0) &= 0 \\ Q(x=0) &= F \end{aligned}\right)$$

redundant, da Aufzählverfahren für $M_1(x_1)$ genutzt.

Übergangsbedingungen

$$\left.\begin{aligned} w_1(x_1=L) &= w_2(x_2=0) \\ w_1'(x_1=L) &= w_2'(x_2=0) \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

$$M_1(x_1=L) = M_2(x_2=0) \quad \boxed{1P}$$

$$w_1(x_2=0) = 0 \quad \boxed{1P}$$

e) $$w(x=2L) = w_2(x_2=L) = \frac{5}{360} q_0 L^4 + \frac{D_1 L^3}{6} + \frac{D_2 L^2}{2} + D_3 L + D_4 = 0$$

$$w'(x=2L) = w_2'(x_2=L) = \frac{4 q_0 L^3}{60} + \frac{D_1 L^2}{2} + D_2 L + D_3 = 0$$

$$w_1(x_1=L) = w_2(x_2=0) \Leftrightarrow -\frac{FL^3}{6} + C_1 L + C_2 = D_4$$

$$w_1'(x_1=L) = w_2'(x_2=0) \Leftrightarrow -\frac{FL^2}{2} + C_1 = D_3$$

$$M_1(x_1=L) = M_2(x_2=0) \Leftrightarrow w_1''(x_1=L) = w_2''(x_2=0) \Leftrightarrow -FL = D_2$$

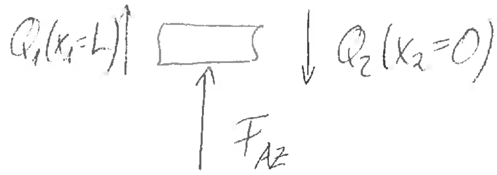
$$w_1(x_2=0) = 0 \Leftrightarrow D_4 = 0$$

Sammeln der Gleichungen und Lösen

$$\left\{\begin{aligned} C_1 L + C_2 &= \frac{FL^3}{6} \\ C_1 - D_3 &= \frac{FL^2}{2} \\ D_2 &= FL \\ D_4 &= 0 \\ \frac{D_1 L^3}{6} + \frac{D_2 L^2}{2} + D_3 L &= -\frac{1}{72} q_0 L^4 \\ \frac{D_1 L^2}{2} + D_2 L + D_3 &= -\frac{1}{15} q_0 L^3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &-\text{''}- \\ &D_1 L^2 + 3 D_2 L + 6 D_3 = -\frac{1}{12} q_0 L^3 \\ &D_1 L^2 + 2 D_2 L + 2 D_3 = -\frac{2}{15} q_0 L^3 \end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} C_2 &= \frac{FL^3}{6} - \frac{3}{4} FL^3 - \frac{q_0 L^4}{80} = -\frac{q_0 L^4}{80} - \frac{7}{12} FL^3 \quad \boxed{1P} \\ C_1 &= \frac{FL^2}{2} + \frac{q_0 L^3}{80} + \frac{FL^2}{4} = \frac{q_0 L^3}{80} + \frac{3}{4} FL^2 \quad \boxed{1P} \\ D_2 &= FL \quad \boxed{1P} \\ D_4 &= 0 \quad \boxed{1P} \\ D_1 &= -\frac{1}{12} q_0 L - \frac{3}{40} q_0 L - \frac{3}{2} F - F = -\frac{19}{120} q_0 L - \frac{5}{2} F \quad \boxed{1P} \\ D_3 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{15}\right) q_0 L^3 + \frac{FL^2}{4} = \frac{q_0 L^3}{80} + \frac{FL^2}{4} \quad \boxed{1P} \end{aligned}\right.$$

f) Freischnitt am Punkt A:



1P

$\sum F_z \overset{!}{=} 0 \qquad F_{Az} = Q_2(x_2=0) - Q_1(x_1=L)$

mit $Q_2(x_2=0) = -EI_{yy}\, w'''(x_2=0) = -D_1 = +\frac{19}{120} q_0 L + \frac{5}{2} F$

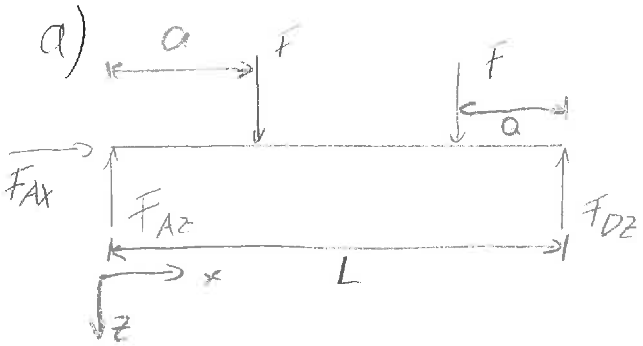
$Q_1(x_1=0) = F$

$F_{Az} = \frac{19}{120} q_0 L + \frac{3}{2} F$ 1P

5. Aufgabe 14 Punkte

14

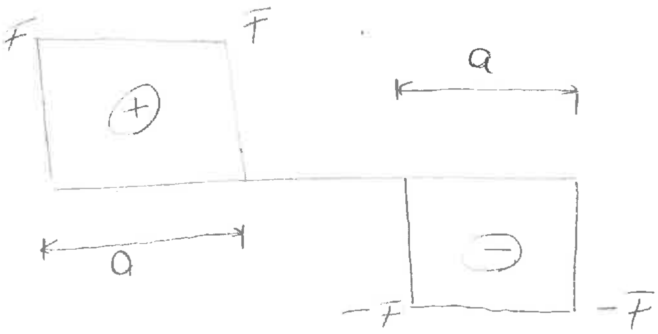
a)



wegen Symmetrie gilt

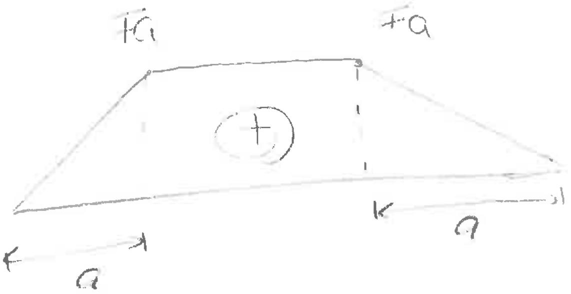
$$\left.\begin{aligned} F_{Az} &= F \\ F_{Dz} &= F \\ F_{Ax} &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

Q(x):



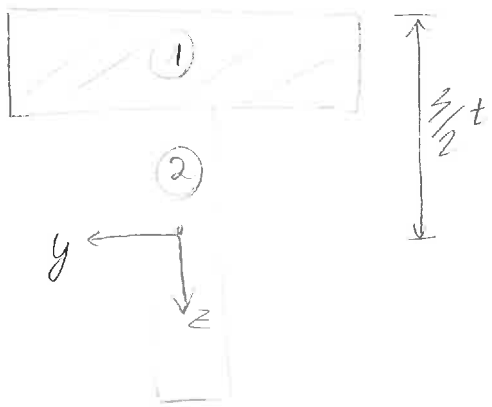
$\boxed{1P}$

M(x):



$\boxed{1P}$

b)



$$\left.\begin{aligned} I_{yy,1} &= \frac{1}{12}\, 3t\, t^4 = \frac{t^4}{4} \\ I_{yy,2} &= \frac{1}{12}\, t\,(3t)^3 = \frac{27}{12} t^4 = \frac{9}{4} t^4 \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{t}{2} - \frac{5}{2}t = -t, \quad A_1 = 3t^2 \\ a_2 &= \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}t = t, \quad A_2 = 3t^2 \end{aligned}\right\} \boxed{1P}$$

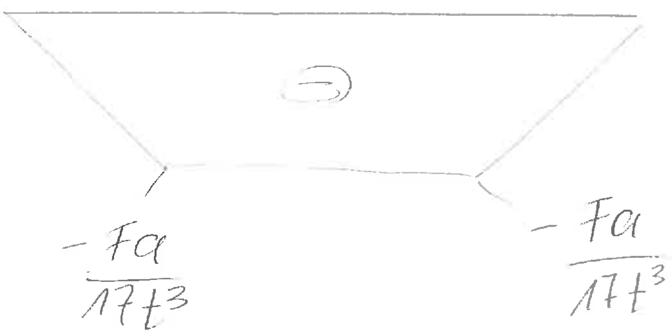
$$I_{yy} = \sum_{i=1}^{2} \left(I_{yy,i} + a_i^2 A_i \right) = \frac{10}{4} t^4 + 6t^4 = \frac{5+12}{2} t^4 = \frac{17}{2} t^4 \quad \boxed{1P}$$

c) 15

$$\sigma^P(x) = \frac{M(x)}{I_{yy}} e^P$$

$$e^P = t - \frac{3}{2}t = -\frac{t}{2}$$

$$\sigma^P(x) = -\frac{1}{17}\frac{M(x)}{t^3} \quad \boxed{1P}$$



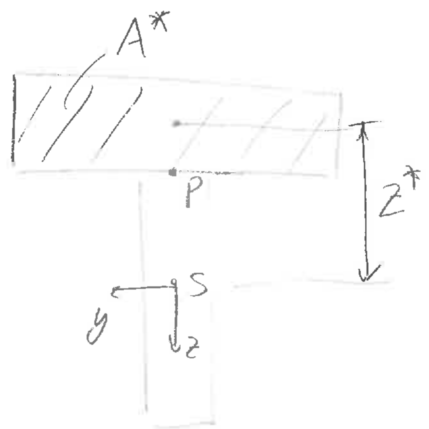
$\boxed{1P}$

d)

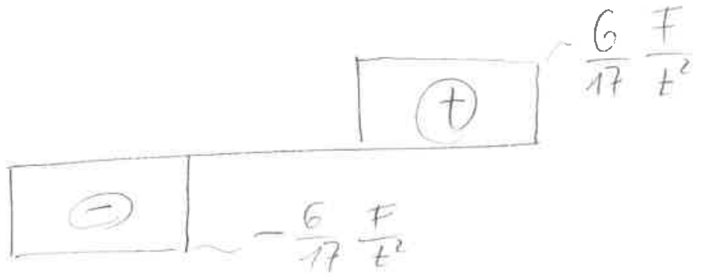
$$\tau^P(x) = \frac{Q(x)}{I_{yy}} \frac{z^*(z^P)A^*(z^P)}{b(z^P)}$$

$$= \frac{Q(x)}{\frac{17}{2}t^4} \frac{3t^2(-t)}{t}$$

$$= -\frac{6}{17}\frac{Q(x)}{t^2} \quad \boxed{1P}$$



$\tau_p(x)$:



$\boxed{1P}$

e) Aus den skizzierten Verläufen folgt, dass die betrags- (16)
mäßig größten Spannung an der Stelle $\underline{x = a}$ oder $\underline{x = L-a}$
vorliegen. $\boxed{1P}$

f) Für $x = a$: $\underline{\underline{\sigma}}^P = \frac{F}{17t^2} \begin{bmatrix} -\frac{a}{t} & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

oder $x = L-a$: $\underline{\underline{\sigma}}^P = \frac{F}{17t^2} \begin{bmatrix} -\frac{a}{t} & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{1P}$

$$\tau^P_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma^P_{xx} - \sigma^P_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma^{P\,2}_{xz}} \quad \boxed{1P}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{F}{17t^2}\right)^2 \left(\frac{a^2}{4t^2} + 36\right)} \qquad \text{mit } a = 4\sqrt{7}\,t$$

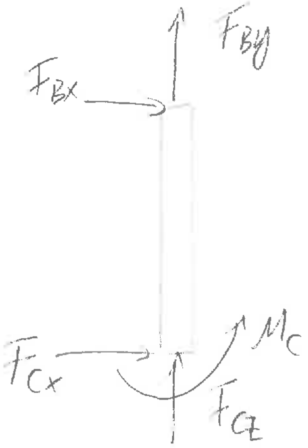
$$= \sqrt{\left(\frac{F}{17t^2}\right)^2 (28 + 36)} = \frac{F}{17t^2}\sqrt{64} = \underline{\underline{\frac{8}{17}\frac{F}{t^2}}} \quad \boxed{1P}$$

6. Aufgabe 11 Punkte

17

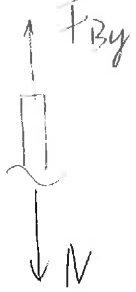
a)

$\boxed{1P}$



$\boxed{1P}$

b)

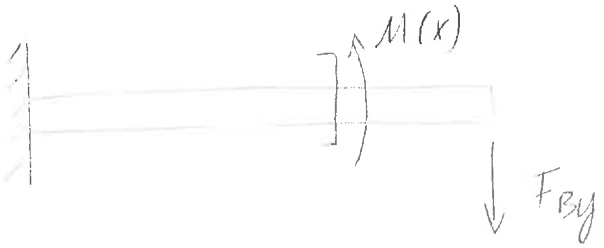


$$N = F_{By} \quad \boxed{1P}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = E\left(\frac{\Delta l}{l} - \alpha \Delta T\right)$$

$$\Delta l = \left(\frac{N}{EA} + \alpha \Delta T\right) l = \left(\frac{F_{By}}{EA} + \alpha \Delta T\right) l \quad \boxed{1P}$$

c)



$$M(x) = -F_{By}\, l \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$EI_{yy}\, w''(x) = +F_{By}\, l\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$EI_{yy}\, w'(x) = F_{By}\, l^2 \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) + C_1 \quad \boxed{1P}$$

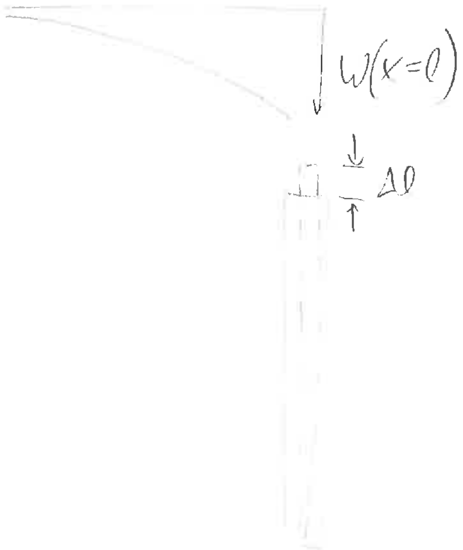
$$EI_{yy}\, w(x) = F_{By}\, l^3 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) + C_1 l \frac{x}{l} + C_2 \quad \boxed{1P}$$

18

d) $w(x=0)=0$ $\boxed{1P}$

$w'(x=0)=0$ $\boxed{1P}$

e)



$w(x=l)=-\Delta l$ $\boxed{1P}$

f) mit d) folgt: $C_1=0$, $C_2=0$

$$EI_{yy}\,w(x)=\frac{F_{By}l^3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$$

$$w(x=l)=\frac{F_{By}l^3}{3EI_{yy}}=-\left(\frac{F_{By}}{EA}+\alpha\Delta T\right)l$$

$$\Leftrightarrow F_{By}\left(\frac{l^2}{3EI_{yy}}+\frac{1}{EA}\right)=-\alpha\Delta T$$

$$\Delta l=\left(1-\frac{3I_{yy}}{Al^2+3I_{yy}}\right)\alpha\Delta T l$$

$$F_{By}=\frac{-\alpha\Delta T}{EAl^2+3EI_{yy}}\,3EI_{yy}EA$$ $\boxed{1P}$

$$\Rightarrow N=-\frac{3EI_{yy}A}{Al^2+3I_{yy}}\alpha\Delta T$$ $\boxed{1P}$