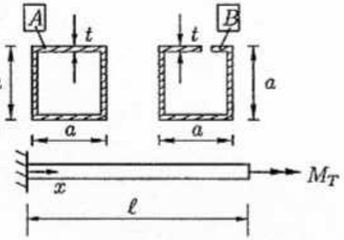
Theorieaufgaben

1. **(1 Punkt)** Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten N, m und K an:

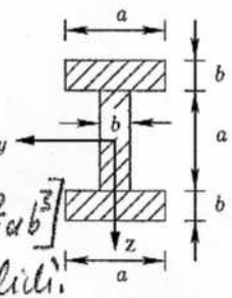
Gleit- bzw. Schubmodul G	N/m^2
Polares Widerstandsmoment W_p	m^3
Wärmeausdehnungskoeffizient α	$1/K$

2. **(1 Punkt)** Der skizzierte Balken ist an seinem rechten Ende durch ein Torsionsmoment M_T belastet. Die dargestellten dünnwandigen Profile A und B, wobei A ein geschlossener Kastenträger sowie B der entsprechende offene Träger ist, sollen hinsichtlich des maximalen Verdrehwinkels $\varphi(\ell)$ verglichen werden. Bei welchem Profil stellt sich der größere Verdrehwinkel $\varphi(\ell)$ ein?



Profil $\boxed{B}$

3. **(1 Punkt)** Berechnen Sie für den skizzierten doppel-T-förmigen Querschnitt das Flächenträgheitsmoment I_{yy}.
Hinweis: Der Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems liegt im Flächenschwerpunkt.



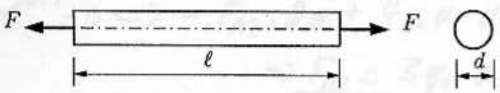
$$I_{yy} = \frac{ba^3}{12} + 2\cdot\frac{a\cdot b^3}{12} + 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot ab$$

$$\left[= \frac{ba^3}{12} + \frac{1}{6}ab^3 + \frac{1}{2}ab(a^2+2ab+b^2) = \frac{7}{12}ba^3 + a^2b^2 + \frac{2}{3}ab^3\right]$$

Ausmultipl. nicht erforderlich.

4. **(2 Punkte)** Der skizzierte Stab wird infolge der Kraft F um $\Delta\ell$ gelängt. Um welches Maß Δd ändert sich sein Durchmesser? Geben Sie Δd in Abhängigkeit der gegebenen Größen an.

Geg.: F, ℓ, d, E, ν



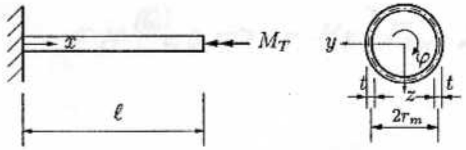
N.R: $\boxed{\varepsilon_q = -\nu\varepsilon_\ell}$

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu\frac{\sigma}{E} = -\nu\frac{F}{EA}$$

$$\Delta d = -\nu d\frac{F}{EA} = -\nu d\frac{F}{E\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = -4\nu\frac{F}{E\pi d}$$

5. **(2 Punkte)** Das skizzierte dünnwandige, kreisförmige Rohr wird durch ein Torsionsm... beansprucht. Ergänzen Sie die Gleichungen zur Berechnung der Torsionsspannung τ und des Verdrehwinkels $\varphi(x=\ell)$ und drücken Sie die Größen A_m und I_p^* durch die gegebenen Größen aus.

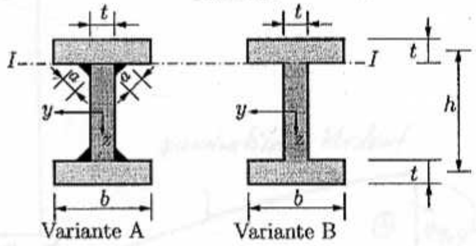
Geg.: M_T, ℓ, r_m, t, E, G



$$\tau = \frac{(-)\boxed{M_T}}{2\cdot\boxed{t}\cdot A_m}, \qquad \varphi(x=\ell) = \frac{M_T\cdot\boxed{\ell}}{\boxed{G}\cdot I_p^*}$$

$$A_m = \boxed{\pi\cdot r_m^2}, \qquad I_p^* = \frac{4A_m^2}{\oint\frac{1}{t(s)}ds} = \boxed{\frac{4\pi^2\cdot r_m^4}{\frac{1}{t}2\pi r_m} = 2\pi r_m^3 t}$$

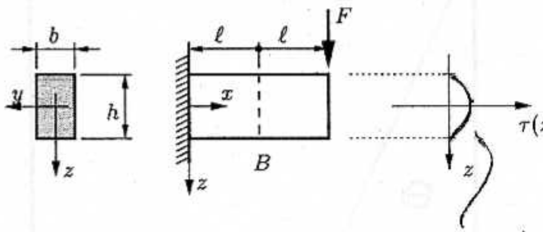
6. **(2 Punkte)** Ein Doppel-T-Querschnitt soll aus drei dünnwandigen Rechteckquerschnitten zusammengesetzt werden. Als Varianten kommen zum einen zwei Kehlnähte (Variante A) oder eine vollflächige Verbindung (Variante B) in Frage. Berechnen Sie die Schubspannungen im Schnitt I-I für beide Fälle.



Geg.: Q, h, b, a, t, I_{yy}

$$\tau^A = \frac{Q\cdot\boxed{\frac{h}{2}\cdot b\cdot t}}{I_{yy}\cdot\boxed{2a}}, \qquad \tau^B = \frac{Q\cdot\boxed{\frac{h}{2}\cdot b\, t}}{I_{yy}\cdot\boxed{t}}$$

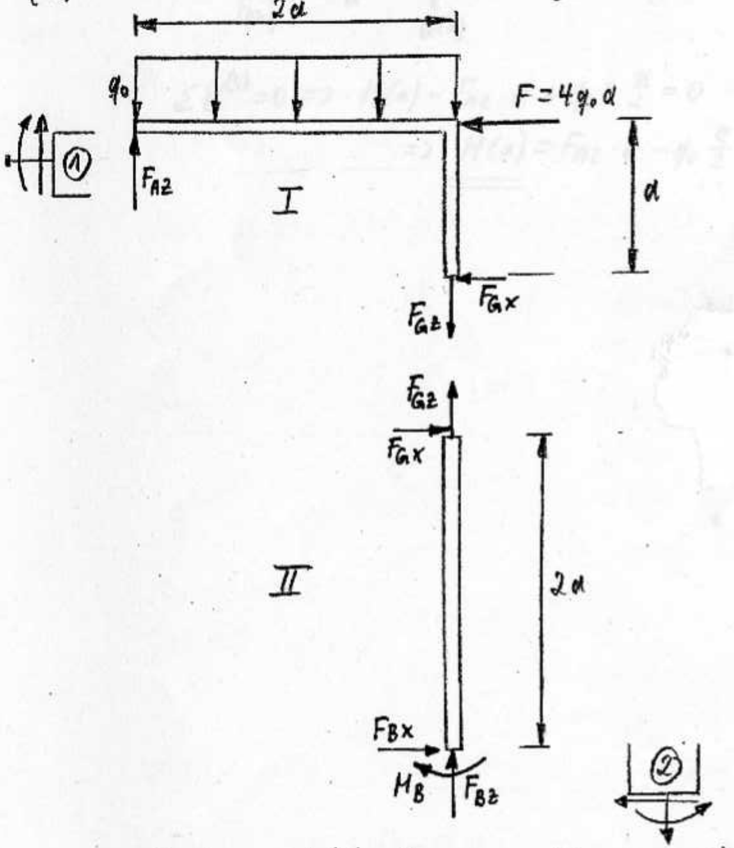
7. **(1 Punkt)** Zeichnen Sie bitte den Verlauf der Schubspannung $\tau(z)$ qualitativ im Querschnitt B in das Diagramm ganz rechts ein!



quadratische Parabel!

Lösungen zur Aufgabe 1:

(a) Freischnitt der einzelnen Systemteile:



Gleichgewichtsbedingungen [v: vertikal; h: horizontal]

I $\Sigma M^{(G)} = 0 \Rightarrow -F_{Az}\cdot 2a + 4q_0 a \cdot a + q_0 \cdot 2a \cdot a = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{F_{Az} = 3q_0 \cdot a}}$

$\Sigma F_h = 0 \Rightarrow -F_{Gx} - 4q_0 a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_{Gx} = -4q_0 a}}$

$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow F_{Az} - F_{Gz} - q_0 \cdot 2a = 0$

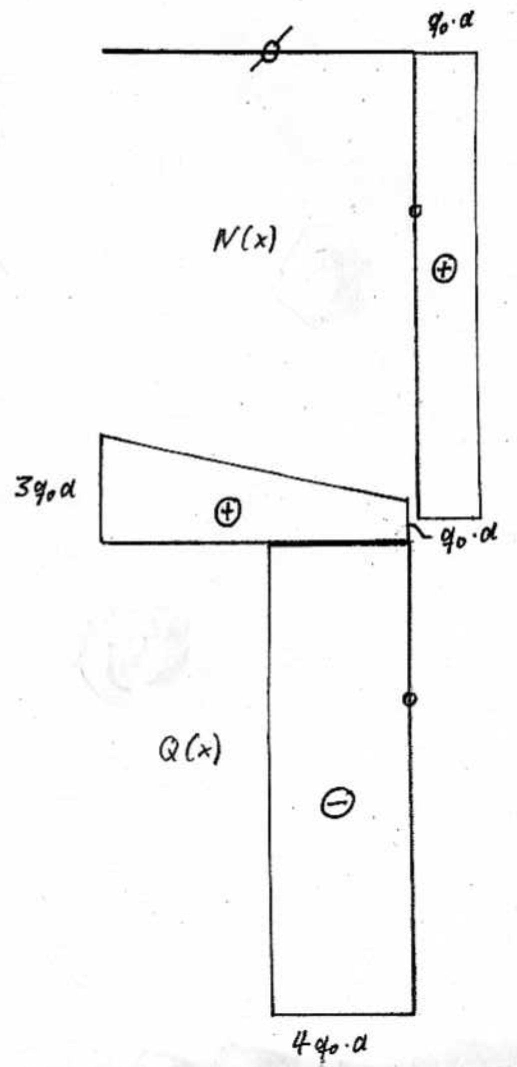
$\Rightarrow \underline{\underline{F_{Gz} = q_0 \cdot a}}$

II $\Sigma F_h = 0 \Rightarrow F_{Gx} + F_{Bx} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_{Bx}}} = -F_{Gx} = \underline{\underline{4q_0 a}}$

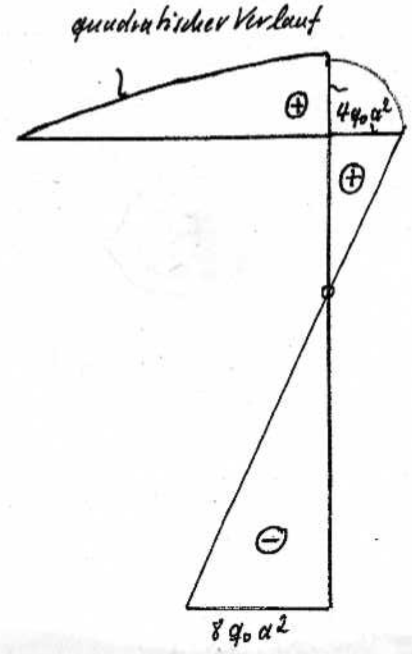
$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow F_{Bz} + F_{Gz} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_{Bz}}} = -F_{Gz} = \underline{\underline{-q_0 a}}$

$\Sigma M^{(G)} = 0 \Rightarrow -M_B + F_{Bx}\cdot 2a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_B}} = F_{Bx}\cdot 2a = \underline{\underline{8q_0 a^2}}$

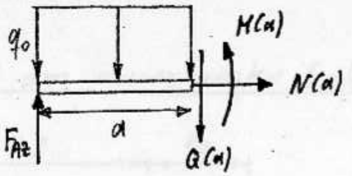
(b)



Man beachte die positiven Zählrichtungen an den Enden ① und ②.



(c)

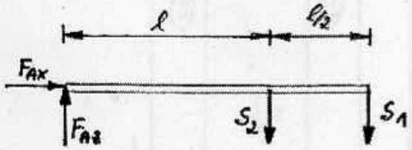


$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M(a) - F_{Az}\cdot a + q_0 a \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M(a)}} = F_{Az}\cdot a - q_0 \frac{a^2}{2} = 3 q_0 a^2 - q_0 \frac{a^2}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2} q_0 a^2}}$$

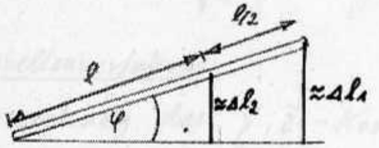
Aufgabe 2:

(a) GGB am unverformten System:



$$\Sigma M^{(A)} = 0 \Rightarrow S_1 \cdot \frac{3}{2} l + S_2 \cdot l = 0 \quad (1)$$

Kinematische Verträglichkeitsbedingung:



Anmerkung: Das Ansetzen der Theorie 1. Ordnung beinhaltet sehr kleine Längenänderungen, weshalb geometrisch linearisiert werden darf [Kreisbogen durch Tangente genähert !]

$$\left.\begin{array}{l} l \sin\varphi = \Delta l_2 \\ \frac{3}{2} l \sin\varphi = \Delta l_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{3}{2}\Delta l_2 \quad (2)$$

[Diese Beziehung erhält man auch direkt aus dem Strahlensatz]

Modifizierte Materialgesetze (bei homogener Dehnung):

Es gilt das Superpositionsprinzip der Dehnungen:

$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{mech}$ mit $\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$; $\varepsilon_{mech} = \frac{\sigma}{E}$

$\varepsilon_{ges} = \frac{\Delta l}{l_{alt}}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta l_1}{l} = \alpha_1 \Delta T_1 + \frac{\sigma_1}{E_1} \quad (3)$$

$$\frac{\Delta l_2}{l} = \alpha_2 \Delta T_2 + \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (4)$$

Aus (1) unter Berücksichtigung der Äquivalenzrelation $S = \int \sigma \, dA = \sigma A$ bzw $\sigma = \frac{S}{A}$ folgt:

Annahme: $\sigma = \text{const. in } A$

$$\frac{3}{2} \sigma_1 A_1 = -\sigma_2 A_2 \quad (5) \qquad \text{bzw.} \quad \sigma_1 = -\frac{2}{3}\sigma_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Eine weitere Gleichung zur Berechnung der Spannungen σ_1 und σ_2 erhalten wir durch Einsetzen von (3) und (4) in die Verträglichkeitsbedingung (2):

$$\Rightarrow \alpha_1 \Delta T_1 + \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{3}{2}\left(\alpha_2 \Delta T_2 + \frac{\sigma_2}{E_2}\right) \quad (6)$$

$$(5) \text{ in } (6) \Rightarrow \alpha_1 \Delta T_1 - \frac{2}{3}\sigma_2 \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{1}{E_1} = \frac{3}{2}\alpha_2 \Delta T_2 + \frac{3}{2}\frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{\alpha_1 \Delta T_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 \Delta T_2}{\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{1}{E_1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{E_2}} \quad (7)$$

für Kräfte:

$S_1 = \sigma_1 \cdot A_1$

$S_2 = \sigma_2 \cdot A_2$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \sigma_1 = \frac{-\alpha_1 \Delta T_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 \Delta T_2}{\frac{1}{E_1} + \frac{9}{4}\frac{A_1}{A_2}\frac{1}{E_2}} \quad (8)$$

Nun war aber gesagt, daß $\Delta T_1 = \Delta T_2 =: \Delta T > 0$ gilt

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{(\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2)\Delta T}{\frac{2}{3}\frac{A_2}{A_1}\frac{1}{E_1} + \frac{3}{2}\frac{1}{E_2}} \qquad \sigma_1 = \frac{(\frac{3}{2}\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{\frac{1}{E_1} + \frac{9}{4}\frac{A_1}{A_2}\frac{1}{E_2}}$$

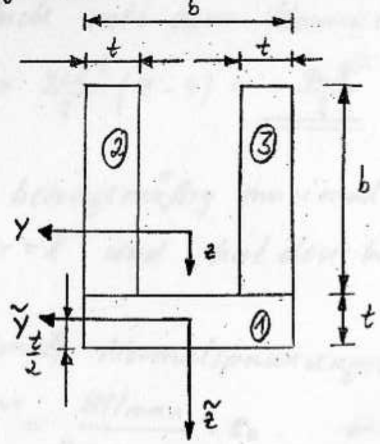
(b) Die (Vertikal-) Verschiebung von B ist gerade Δl_1, was wir aus (3) berechnen können:

$$w_B = \Delta l_1 = \alpha_1 l \cdot \Delta T + \frac{(\frac{3}{2}\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{1 + \frac{9}{4}\frac{A_2}{A_1}\frac{E_1}{E_2}} l$$

$$= \frac{\alpha_1 l \cdot \Delta T \left(1 + \frac{9}{4}\frac{A_2}{A_1}\frac{E_1}{E_2}\right) + (\frac{3}{2}\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T l}{1 + \frac{9}{4}\frac{A_2}{A_1}\frac{E_1}{E_2}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\alpha_2 + \frac{9}{4}\alpha_1 \frac{A_2 E_1}{A_1 E_2}\right)\Delta T l}{1 + \frac{9}{4}\frac{A_2}{A_1}\frac{E_1}{E_2}}$$

Aufgabe 3:

(a)



Tabellenverfahren:

Anmerkung das $\tilde{y}, \tilde{z}$-Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Flächenschwerpunkt der Teilfläche ①. Dies ist rein willkürlich gewählt!

Körper	$\tilde{z}_{si}$	A_i	$\tilde{z}_{si} A_i$	$a_i = \lvert\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s\rvert$	$a_i^2 A_i$	$J_{\tilde{y}\tilde{y}}^{(i)}$
①	0	bt	0	$\frac{1}{3}(b+t)$	$\frac{1}{9}(b+t)^2 \cdot bt$	$\frac{b \cdot t^3}{12}$
②	$-\frac{b+t}{2}$	bt	$-bt\left(\frac{b+t}{2}\right)$	$\frac{1}{6}(b+t)$	$\frac{1}{36}(b+t)^2 \cdot bt$	$\frac{t \cdot b^3}{12}$
③	$-\frac{b+t}{2}$	bt	$-bt\left(\frac{b+t}{2}\right)$	$\frac{1}{6}(b+t)$	$\frac{1}{36}(b+t)^2 \cdot bt$	$\frac{t \cdot b^3}{12}$
Σ	/	$3bt$	$-bt(b+t)$	/		$J_{YY} = \frac{1}{6}(b+t)^2 bt + \frac{1}{6} t b^3 + \frac{1}{12} b t^3$

$$J_{YY} = \frac{1}{12} bt\left(4b^2 + 4bt + 3t^2\right)$$

$$\tilde{z}_s := \frac{\Sigma \tilde{z}_{si} A_i}{\Sigma A_i} = -\frac{1}{3}(b+t)$$

(b) $EJ\, w^{IV}(x) = q(x) = q_0$

$$[-Q(x) =]\; EJ\, w'''(x) = q_0 l \left[\frac{x}{l} + C_1\right]$$

$$[-M(x) =]\; EJ\, w''(x) = q_0 l^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_1\left(\frac{x}{l}\right) + C_2\right]$$

$$EJ\, w'(x) = q_0 l^3 \left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{C_1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_2\left(\frac{x}{l}\right) + C_3\right]$$

$$EJ\, w(x) = q_0 l^4 \left[\frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{C_1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{C_2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_3\left(\frac{x}{l}\right) + C_4\right]$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

$M(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$w'(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{C_1}{2} + C_3 = 0 \quad (1)$

$w(l) = 0 \Rightarrow \frac{1}{24} + \frac{C_1}{6} + C_3 = 0 \quad (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{3} C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{8}$

in (1) einsetzen $\Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{3}{16} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{48}$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{q_0 l^4}{EJ}\left[\frac{1}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{3}{48}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(\frac{x}{l}\right)\right] = \frac{q_0 l^4}{48 EJ}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l}\right]$$

Absenkung bei $x = \frac{l}{2}$:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q_0 l^4}{48 EJ}\left[\frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\right] = \frac{q_0 l^4}{192 EJ}$$

(c) $M(x) = -EJ\, w''(x)$

$$= -q_0 l^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{3}{8}\frac{x}{l}\right] = \frac{q_0 l^2}{8}\left[3\left(\frac{x}{l}\right) - 4\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

(d) Relatives Extremum von $M(x)$:

$$\frac{dM}{dx} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 3l - 8x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{8} l$$

$$\Rightarrow M\left(x = \frac{3}{8} l\right) = \frac{q_0 l^2}{8}\left[\frac{9}{8} - \frac{9}{16}\right] = \frac{9 q_0 l^2}{128}$$

Vergleich mit dem Moment am rechten Ende:

$$M(l) = \frac{q_0 l^2}{8}(3-4) = \underline{\underline{-\frac{q_0 l^2}{8}}}$$

Das betragsmäßig maximale Moment liegt demnach bei $x = l$ und hat den Wert: $\underline{\underline{|M|_{max} = \frac{q_0 l^2}{8}}}$

Maximale Normalspannungen:

$$\sigma_{xx}^{max} = \frac{|M|_{max}}{J_{yy}} \cdot e_0 \quad \text{mit } e_0 = \left(b + \frac{t}{2}\right) - |\tilde{z}_s| = \underline{\underline{\frac{2}{3}b + \frac{t}{6}}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx}^{max} = \frac{\frac{1}{8} q_0 l^2 \cdot \frac{1}{6}(4b+t)}{\frac{1}{12} bt(4b^2+4bt+3t^2)} = \underline{\underline{\frac{q_0 l^2 (4b+t)}{4bt(4b^2+4bt+3t^2)}}}$$