2. Klausur Statik und elementare Festigkeitslehre WS 09/10
Prof. Dr. rer. nat. W. H. Müller, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

Bitte deutlich in <u>DRUCKSCHRIFT</u> schreiben!

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Name, Vorname: Musterlösung

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Bitte ankreuzen!

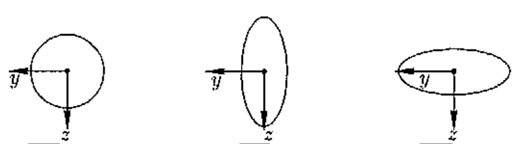
○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **<u>ausschließlich</u>** in den Einheiten 1, kg, m , s , K an:

Krümmung eines Biegebalkens w''	$\frac{1}{m}$
polares Widerstandsmoment W_p	m^3
thermischer Ausdehnungskoeffizient α	$\frac{1}{K}$
Dehnung ε	$\frac{m}{m} = 1$

(2 Punkte)

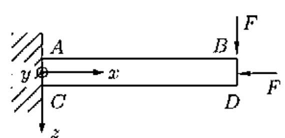
2. Die dargestellten Querschnitte haben alle denselben Flächeninhalt A. Sortieren Sie die Querschnitte nach dem Flächenträgheitsmoment I_{yy}. Kennzeichnen Sie dazu das größte Flächenträgheitsmoment I_{yy} mit einer 1, das mittlere mit einer 2 und das kleinste mit einer 3.



$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$

(Anmerkung: Die Ursprünge der eingezeichneten Koordinatensysteme liegen im Schwerpunkt der jeweiligen Querschnittsfläche.) **(1 Punkt)**

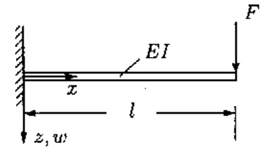
3. Gegeben sei der skizzierte belastete Balken. An welcher Stelle des Balkens ist die Spannung σ_{xx} betragsmäßig maximal (bitte ankreuzen)?



A ☐ B ☐ C ☒ D ☐

Liegt in diesem Punkt Zug oder Druck vor?
Zug ☐ Druck ☒ **(1 Punkt)**

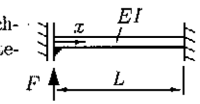
4. Die Durchsenkung einer Biegefeder unter der gezeigten Belastung ist $w(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$. Wie groß ist ihre Federsteifigkeit? Gegeben: F, EI, l



$$c = \frac{3EI}{l^3}$$

(1 Punkt)

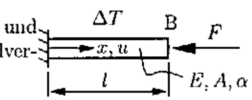
5. Geben Sie alle 4 Randbedingungen an, die für die Berechnung der Durchbiegung mit der Biegeliniendifferentialgleichung 4. Ordnung im nebenstehenden System erforderlich sind.



$w'(x=0) = 0$
$Q(x=0) = -EIw'''(x=0) = F$
$w(x=L) = 0$; $w'(x=L) = 0$

(2 Punkte)

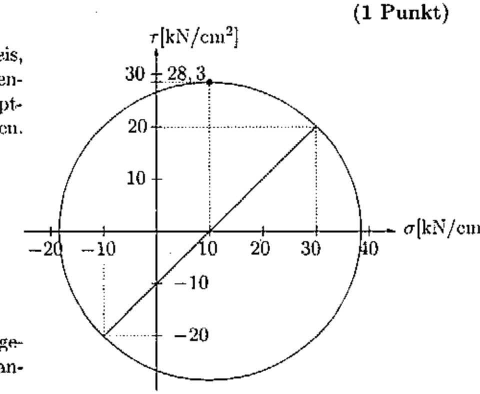
6. Der abgebildete Stab wird durch eine äußere Kraft F belastet und um eine Temperatur $\Delta T > 0$ erwärmt. Geben Sie bitte die Endverschiebung u_B des Querschnittes B an:



$$u_B = \frac{-Fl}{EA} + l\alpha\Delta T$$

(1 Punkt)

7. Gegeben ist der skizzierte MOHRsche Kreis, der aus dem Spannungszustand eines Balkenelementes resultiert. Wie groß sind die Hauptspannungen? Vorzeichen sind mit anzugeben.



$\sigma_I = \boxed{38{,}3}$ kN/cm²,

$\sigma_{II} = \boxed{-18{,}3}$ kN/cm²

Um welchen Winkel φ müßte das Element gedreht werden, um die maximale Schubspannung zu erhalten?

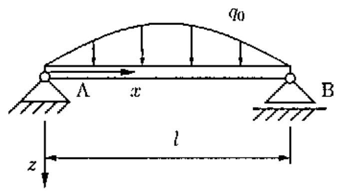
$\varphi = \boxed{157{,}5}°$

Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist kein Lineal o.ä. erforderlich!

(2 Punkte)

1 (13 Punkte)

Der abgebildete schlanke Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist über ein Fest- und ein Loslager gelagert und wird über seine gesamte Länge durch eine sinusförmige Streckenlast mit der Amplitude q_0 belastet.



(a) Bestimmen Sie $q(x)$.

(b) Bestimmen Sie mittels Integration der Biegelinienddifferentialgleichung 4. Ordnung $EIw^{IV}(x) = q(x)$ deren allgemeine Lösung.

(c) Stellen Sie die zur Berechnung der Integrationskonstanten notwendigen Randbedingungen auf.

(d) Berechnen Sie mittels Auswertung dieser Randbedingungen die Integrationskonstanten!

(e) Wie groß ist die maximale Durchsenkung $\hat{w}$? Berechnen Sie außerdem die Neigungswinkel φ_A bzw. φ_B in den Lagern A und B?

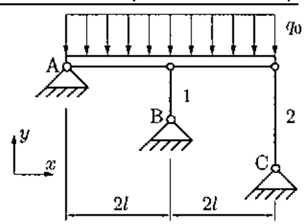
(f) Wie groß ist die Querkraft $Q(x)$ im Balken?

(g) Wie groß muss q_0 gewählt werden, damit an der Stelle $x = l/3$ ein Neigungswinkel von $\frac{1}{2}$ auftritt?

Geg.: q_0, l, EI

2 (14 Punkte)

Ein starrer Balken der Länge $4l$ ist durch ein festes Gelenklager in A und zwei Stäbe in B und C gestützt. Der Balken und die Stäbe sind als gewichtslos zu betrachten. Im unbelasteten Zustand seien die Stäbe ungedehnt. Die Stäbe haben die Querschnittsflächen $A_1 = A_2 = A$ und die Längen $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, Elastizitätsmodul E.



Der Balken wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Der Stab 1 wird zudem um ΔT erwärmt. Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient für den Werkstoff des Stabes 1 ist α. Gehen Sie in der Lösung von kleinen Verformungen und linearem Materialverhalten aus.

(a) Schneiden Sie den starren Balken frei und stellen Sie die Gleichgewichtsbedingungen auf.

(b) Geben Sie die Materialgesetze für die Stäbe 1 und 2 an ($\Delta T > 0$).

(c) Stellen Sie zwischen den Längenänderungen der Stäbe eine geometrische Verträglichkeitsbedingung auf.

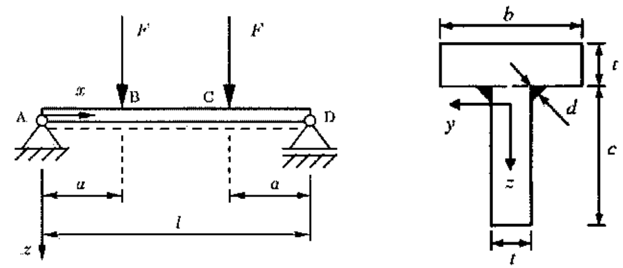
(d) Berechnen Sie die Stabkräfte und die Lagerkraft in A.

(e) Für welche Temperaturänderung ΔT^* verformt sich Stab 2 nicht?

Geg.: q_0, ΔT, α, A, l, E

3 (13 Punkte)

Das abgebildete Maschinenteil (Querschnitt wie abgebildet) ist in den Endpunkten A und D gelenkig gelagert und wird in den Punkten B und C durch Einzelkräfte belastet.



(a) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen und ziehen Sie die Momentenfläche vorzeichenrichtig auf. Werte für die markanten Punkte sind anzugeben!

(b) Berechnen Sie den Flächenschwerpunkt der Querschnittsfläche (Schweißnähte sind zu vernachlässigen) mit dem Tabellenverfahren. Gehen Sie dazu von einem Koordinatensystem aus, dass im Schwerpunkt des Obergurtes liegt.

(c) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_{yy} mit dem Tabellenverfahren. Benutzen Sie wieder ein Koordinatensystem im Schwerpunkt des Obergurtes.

(d) Berechnen Sie die Widerstandsmomente $W_{y,o}$ und $W_{y,u}$. Wie groß sind die maximale Zug- und Druckspannung in dem Maschinenteil und berechnen Sie die maximale Schubspannung in der Schweißnaht? (Hinweis: Das Zwischenergebnis für I_{yy} muss in Aufgabenteil d) nicht mehr eingesetzt werden.)

Geg.: l, a, b, c, F, l, d

$\boxed{A1}$ Musterlösung 2. Klausur 22.2.2010 Mechanik I

a) $q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ 1

b)
$$EI\,w^{IV}(x) = q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$
$$EI\,w'''(x) = -q_0 \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1$$
$$EI\,w''(x) = -q_0 \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1 x + C_2$$
1
$$EI\,w'(x) = q_0 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$
$$EI\,w(x) = q_0 \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$
1

c) RBs:

1 1
$$EI\,w''(x=0) = EI\,w''(x=L) = 0$$
1 $w(x=0) = w(x=L)$ 1 $= 0$

d)
$$w(x=0) = 0 : \Rightarrow C_4 = 0$$
$$w''(x=0) = 0 : \Rightarrow C_2 = 0$$
$$w''(x=L) = 0 : \Rightarrow C_1 = 0$$
$$w(x=L) = 0 : \Rightarrow C_3 = 0$$
1

e) $w(x) = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

Bedingung f Maximum:

$w'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$

$w\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4$ 1

$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3$ 1

$\varphi_B = w'(x=L) = -\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3$ 1

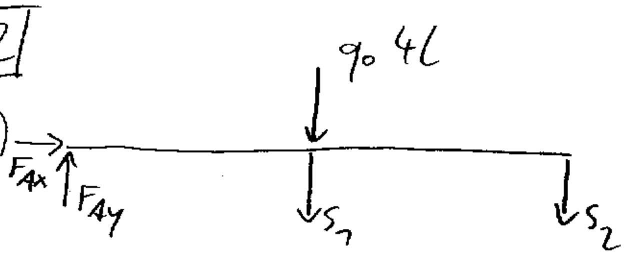
f) $Q(x) = -EI\,w'''(x) = q_0 \frac{L}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ 1

g) $w'\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow q_0 = \frac{EI\,\pi^3}{L^3}$ 1

$\boxed{A2}$

a)



1

$\sum F_x = 0: \Rightarrow \quad F_{Ax} = 0$ 1

$\sum F_y = 0: \Rightarrow \quad F_{Ay} - q_0 4l - S_1 - S_2 = 0$ (I)

$\sum M^{(A)} = 0: \Rightarrow \quad -S_1 2l - S_2 4l - q_0 8l^2 = 0$ (II)

1

b) Materialgesetze:

$S_1 = EA\left(\frac{\Delta l_1}{l} - \alpha \Delta T\right)$ 1 $\quad S_2 = EA \frac{\Delta l_2}{2l}$ 1

c) Geometrie

$\Delta l_2 = 2 \Delta l_1$ 1

d) einsetzen:

$\frac{2 S_2 l}{EA} = \frac{2 \cdot S_1 l}{EA} + \alpha \Delta T 2l$ (III)

(III) in (II):

$S_2 = \frac{\alpha \Delta T EA - q_0 4l}{3}$ 2

$S_1 = \frac{-2\alpha \Delta T EA - 4 q_0 l}{3}$ 2

F_{Ay} aus (I):

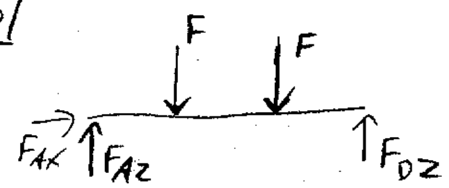
$F_{Ay} = \frac{-\alpha \Delta T EA + 4 q_0 l}{3}$ 2

e) Bedingung: $S_2 = 0$ oder $\Delta l_2 = 0$ 1

$\Rightarrow \quad \Delta T^* = \frac{q_0 4l}{\alpha EA}$ 1

A3

a)



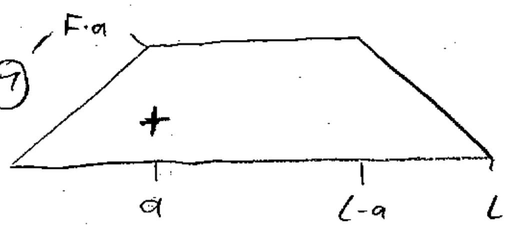
$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow -F_{Az} + 2F - F_{Dz} = 0$

$\sum M^{(A)} = 0 \Rightarrow -Fa - F(l-a) + F_{Dz} \cdot l = 0$

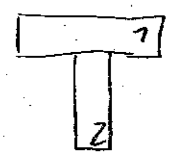
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} F_{Ax} = 0 \\ F_{Az} = F \\ F_{Dz} = F \end{array} \right\} \quad 1$$

$M(x)$: 1



1

b)



	A_i	$\tilde{z}_{si}$	$A_i \tilde{z}_{si}$
1	bt	0	0
2	ct	$\frac{t+c}{2}$	$ct\,\frac{t+c}{2}$
$\sum$	$(b+c)t$	$\frac{t+c}{2}$	$ct\,\frac{t+c}{2}$

$$\tilde{z}_s = \frac{\sum \tilde{z}_{si} A_i}{\sum A_i} = \frac{ct\,\frac{t+c}{2}}{t(b+c)} = \frac{c(t+c)}{2(b+c)} \quad 1$$

c)

	$a_i = \lvert \tilde{z}_{si} - \tilde{z}_s \rvert$	$a_i^2 A_i$	$I_0^i = I_{\xi\xi}^{(i)}$
1	$\frac{c(t+c)}{2(b+c)}$	$\frac{c^2(t+c)^2}{4(b+c)^2}\,bt$	$\frac{bt^3}{12}$
2	$\frac{b(t+c)}{2(b+c)}$	$\frac{b^2(t+c)^2}{4(b+c)^2}\,ct$	$\frac{tc^3}{12}$
$\sum$		$I_{yy} = \frac{(t+c)^2 bct}{4(b+c)}$ 1 $+ \frac{1}{12}(bt^3 + tc^3)$ 1	

$$W_{y,u} = \frac{I_{yy}}{e_u} \quad \text{mit } e_u = t + c - \frac{t}{2} - \tilde{z}_s = \frac{t}{2} + c - \frac{c(t+c)}{2(b+c)} \quad 1$$

$$W_{y,o} = \frac{I_{yy}}{e_o} \quad \text{mit } e_o = \tilde{z}_s + \frac{t}{2} = \frac{c(t+c)}{2(b+c)} + \frac{t}{2} \quad 1$$

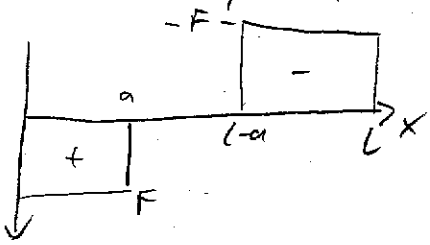
d) $\sigma_{xx,max}^{Druck} = -\frac{M_{max}}{W_{y,o}} = \frac{-Fa}{W_{y,o}}$ 1

$\sigma_{xx,max}^{Zug} = \frac{M_{max}}{W_{y,u}} = \frac{F \cdot a}{W_{y,u}}$ 1

Schubspannung an der Schweißnaht

$\tau(x,y) = \frac{Q(x)\, z^* A^*}{b(z)\, I_{yy}}$

Q(x):



$Q_{max} = F$ 1

$z^* = \tilde{z}$

$A^* = b \cdot t$ } 1

$b(z) = 2d$ 1

$I_{yy} = \dots$ einsetzen