3. Klausur Statik und elementare Festigkeitslehre WS 09/10
Prof. Dr. rer. nat. W. H. Müller, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

Bitte deutlich in <u>DRUCKSCHRIFT</u> schreiben!

1	
2	
3	
Σ	
T	

Name, Vorname: Musterlösung

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Bitte ankreuzen!

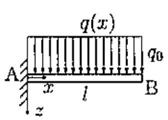
○ Studienbegleitende Prüfung ○ Übungsscheinklausur

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **<u>ausschließlich</u>** in 1, kg, m , s und N an:

Verschiebungsgradient $\frac{\partial u}{\partial x}$	1
Biegesteifigkeit EI	Nm^2
Vergleichsspannung σ_v	$\frac{N}{m^2}$
Querkontraktionszahl ν	1

(2 Punkte)

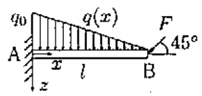
2. Wie groß ist die Normalkraft (Kraft in x-Richtung) im Balken für folgende Belastungsfälle ? Bitte ankreuzen!



☒ $N(x) = 0$

☐ $N(x) = q_0 l$

☐ $N(x) = \frac{q_0 l^2}{2}$



☐ $N(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}F$

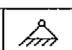
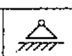
☒ $N(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}F$

☐ $N(x) = \sqrt{2}F + \frac{q_0 l}{2}$

☐ $N(x) = -\sqrt{2}F$

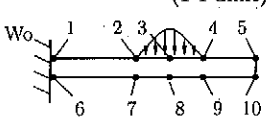
(1 Punkt)

3. Geben Sie zu jedem Lager die Wertigkeit im ebenen Fall an.

Lagersymbol			
Wertigkeit	2	1	3

(1 Punkt)

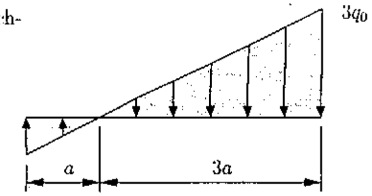
4. Der Kragbalken ist durch die skizzierte Streckenlast belastet. Wo tritt die größte Druckspannung σ_{xx} auf?



An der Stelle $\boxed{6}$

(1 Punkt)

5. Wie groß ist die resultierende Kraft der eingezeichneten linearen Streckenlast?

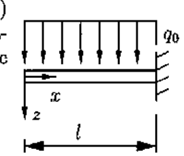


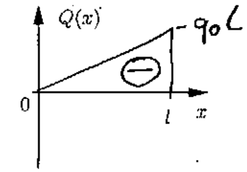
$F_{\text{res}} = 4 q_0 a$

(1 Punkt)

6. Skizzieren Sie den Querkraftverlauf $Q(x)$ des skizzierten Systems im leeren Diagramm ganz rechts! Geben Sie auch die charakteristischen Werte an!

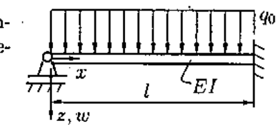
Geg.: q_0, l





(1 Punkt)

7. Wie lauten die geometrischen und physikalischen Randbedingungen, die zur Berechnung der Lagerreaktionen im nebenstehend skizzierten System nötig sind?

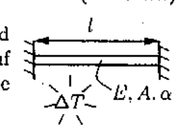


$w(x=0)=0 \qquad w''(x=0)=0$

$w(x=l)=0 \qquad w'(x=l)=0$

(2 Punkt)

8. Ein (ursprünglich spannungsfrei) beidseitig fest eingespannter Stab wird um $\Delta T > 0$ erwärmt. Wie groß ist die Kraft F, die der Stab nun auf die Einspannung auf der linken Seite ausübt? Ist F eine Zug- oder eine Druckkraft?

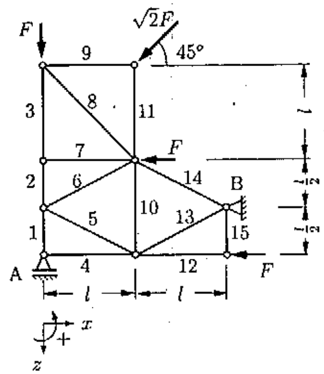


○ Zug ☒ Druck $|F| = EA\alpha\Delta T$

(1 Punkt)

1 (13 Punkte)

Das aus 15 gelenkig miteinander verbundenen Stäben bestehende ebene Fachwerksystem, das in den Punkten A und B gelagert ist, wird durch die vier Kräfte belastet.



(a) Begründen Sie die statische Bestimmtheit.

(b) Benennen Sie drei Nullstäbe.

(c) Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen in A und B.

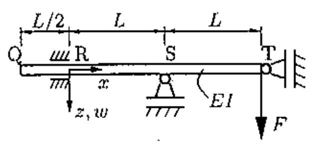
(d) Ermitteln Sie die Kräfte in den Stäben 12, 13 und 14 mit Hilfe des Ritterschen Schnittes und geben Sie an, ob die Stäbe auf Zug oder Druck beansprucht werden.

Geg.: F, l

2 (14 Punkte)

Ein Balken wird durch zwei einwertige und ein zweiwertiges Lager gestützt und mit einer Einzelkraft F belastet (Skizze I).

I:



(a) Bestimmen Sie bitte die allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung 4. Ordnung für diesen Balken(Fall I) im Bereich R–T! Teilen Sie dazu den Bereich in 2 Teilbereiche (R–S und S–T).

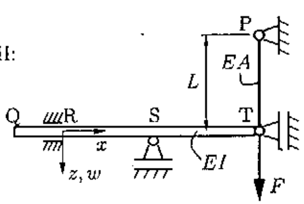
(b) Geben Sie zur Bestimmung der 8 Integrationskonstanten die Rand- und Übergangsbedingungen an. Beachten Sie, dass im Punkt S das Moment, der Biegewinkel und die Durchbiegung stetig sind.

(c) Berechnen Sie alle Integrationskonstanten und berechnen Sie den Verlauf des Biegemomentes im Bereich R–T!

(d) Skizzieren Sie das Biegemoment grafisch, und geben Sie charakteristische Werte an!

(e) Nun wird der Balken mit einem elastischen Stab zum Lager P abgestützt (Skizze II).

II:

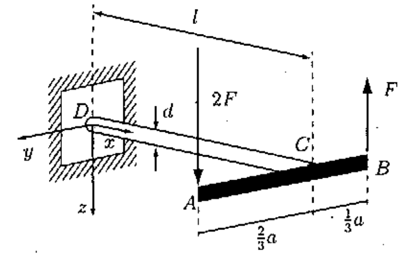


Der Stab hat im unbelasteten Zustand die Länge L. Geben Sie die geänderte Randbedingung an!

Geg.: E, I, A, L, F

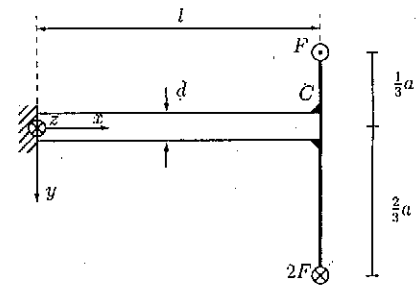
3 (13 Punkte)

An einem kreisförmigen Stab (Länge l, Durchmesser d, $l \gg d$, E-Modul E, Schubmodul G) ist exzentrisch ein starrer Balken der Länge a geschweißt, der mit den Kräften $2F$ und F belastet wird. Der Stab wird daher auf Biegung und Torsion belastet. Es ist die Absenkung des Kraftangriffspunktes A zu berechnen.



(a) Berechnen Sie im Stab (3D) im Bereich CD die Schnittlasten $N_x(x)$, $Q_y(x)$, $Q_z(x)$, $M_y(x)$, $M_z(x)$ und $M_x(x) = M_T(x)$.

(b) Berechnen Sie (mit Biegedgl. 2.Ordnung) die Durchbiegung in z-Richtung $w_z(x = l)$ an der Stelle C.



Hinweis: Das Flächenträgheitsmoment eines kreisförmigen Querschnittes ist: $I_{yy} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4$.

(c) Bestimmen Sie den Verdrillwinkel $\vartheta(x = l)$ an der Stelle C.

Hinweis: Das polare Trägheitsmoment eines kreisförmigen Querschnittes ist: $I_p = \frac{\pi}{32}d^4$

(d) Bestimmen Sie aus den Ergebnissen von (b) und (c) die Verschiebung in z-Richtung des Punktes A.

Geg.: l, d, E, G, a, F

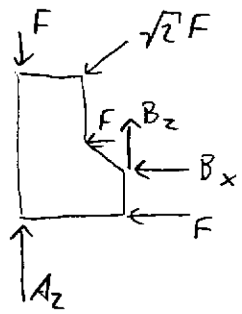
Musterlösung 3. Klausur Mechanik I WS 09/10

A1

a) 3 Reaktionslasten – 3 Gleichgewichtsbedingungen ✓ 1

<u>oder:</u> $2k = r + s$

b) 4, 7, 15 — 1 1 1

c) 

$$\sum F_z = 0:\ A_z + B_z - F - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\,F = 0$$

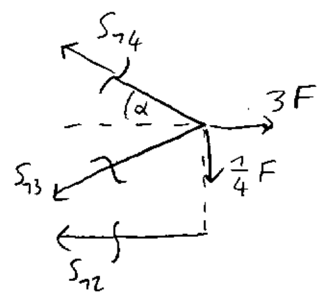
$$\sum F_x = 0:\ -B_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\,F - F - F = 0$$

$$\sum M^{(B)} = 0:\ -F\frac{l}{2} - A_z \cdot 2l + F\,2l + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\,F\,l + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\,F\frac{3}{2}l + F\frac{l}{2} = 0$$

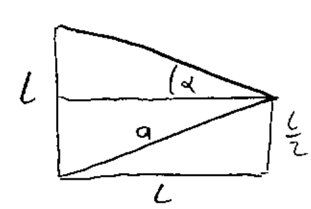
$\Rightarrow$ $B_x = -3F$ 1

$B_z = \frac{1}{4}F$ 1

$A_z = \frac{9}{4}Fl$ 1

d) 

Geometrie:



$a = \sqrt{\frac{5}{4}}\,l$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$$\sum F_x = 0:\ -S_{12} - S_{14}\cos\alpha - S_{13}\cos\alpha - F + 3F = 0 \quad 1$$

$$\sum F_y = 0:\ S_{14}\sin\alpha - S_{13}\sin\alpha - \frac{1}{4}F = 0 \quad 1$$

$$\sum M^{(B)} = 0:\ -F\frac{l}{2} - S_{12}\frac{l}{2} = 0 \quad 1$$

$\Rightarrow$ $S_{12} = -F$ (Druck) 1

$S_{13} = F\frac{\sqrt{5}\,5}{8}$ (Zug) 1

$S_{14} = F\frac{7\sqrt{5}}{8}$ (Zug) 1 (mit Angabe von Zug oder Druck)

$\boxed{A2}$

a) R-T:

$$\left.\begin{aligned} EI w_1^{IV}(x) &= 0 \\ EI w_1'''(x) &= C_1 \\ EI w_1''(x) &= C_1 x + C_2 \\ EI w_1'(x) &= C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ EI w_1(x) &= C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

S-T:

$$\left.\begin{aligned} EI w_2^{IV}(x) &= 0 \\ EI w_2'''(x) &= C_5 \\ EI w_2''(x) &= C_5 x + C_6 \\ EI w_2'(x) &= C_5 \frac{x^2}{2} + C_6 x + C_7 \\ EI w_2(x) &= C_5 \frac{x^3}{6} + C_6 \frac{x^2}{2} + C_7 x + C_8 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

b) RBs: $w_1(x=0) = 0 \qquad w_2''(x=2L) = 0$

$w_1'(x=0) = 0 \qquad EI w_2'''(x=2L) = -F$

ÜBs: $w_1(x=L) = 0 \qquad w_2(x=L) = 0$

$w_1''(x=L) = w_2''(x=L)$

$w_1'(x=L) = w_2'(x=L)$

je 2 Richtige $\Rightarrow$ 1

max. 4

c) $\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2} F \qquad C_5 = -F$

$C_2 = -\frac{FL}{2} \qquad C_6 = 2FL$

$C_3 = 0 \qquad C_7 = -\frac{5}{4} FL^2$

$C_4 = 0 \qquad C_8 = \frac{5}{12} FL^3$

je 2 Richtige $\Rightarrow$ 1

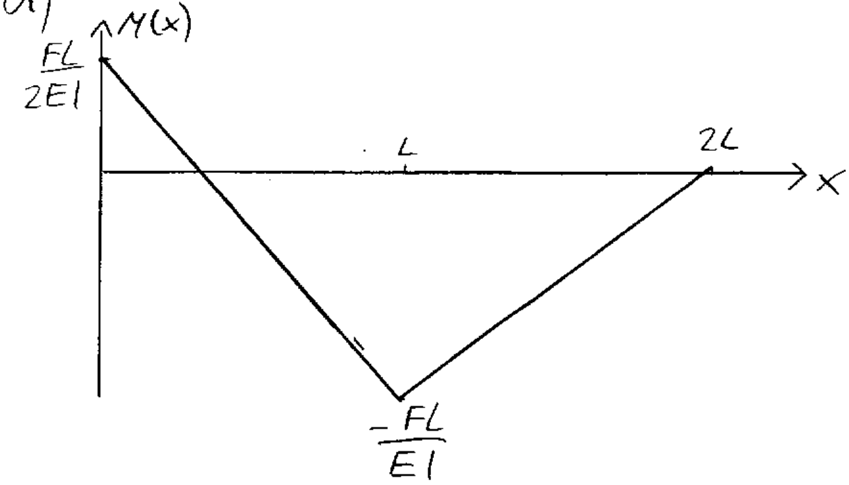
max. 4

c) R-S: $M(x) = \frac{1}{-EI} \left(\frac{3}{2} Fx - \frac{FL}{2} \right)$

S-T: $M(x) = \frac{1}{-EI} \left(-Fx + 2FL \right)$

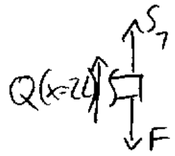
1

d)



1 mit charakt. Werten

e)



$S_7 + Q(x=2L) - F = 0$

$S_7 = EA\frac{\Delta L}{L}$

mit

$\Delta L = w_2(x=2L)$

$$\Rightarrow \frac{EA}{L} w_2(x=2L) - EI w'''(x=2L) - F = 0$$

2

$\boxed{A3}$ vgl. Lösung 13. Aufgabenblatt

a) $\sum F_x = 0 \Rightarrow N(x) = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow Q_y(x) = 0$ (1)

$\sum F_z = 0 \Rightarrow Q_z(x) = F$ (1)

$\sum M_x^{(S)} = 0 \Rightarrow M_T(x) = F \frac{5}{3} a$ (1)

$\sum M_y^{(S)} = 0 \Rightarrow M_y(x) = -F(l-x)$ (1)

$\sum M_z^{(S)} = 0 \Rightarrow M_z(x) = 0$ (1)

b) $w''(x) = -\frac{M_y(x)}{E I_{yy}}$ (1)

$$w''(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}(l-x)$$

$$w'(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}\left(lx - \frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

$$w(x) = \frac{64F}{E\pi d^4}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right)$$

RBs: $\left.\begin{array}{l} w(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ w'(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{array}\right\}$ (1)

$w(x=l) = \frac{64F}{3E\pi d^4} l^3$ (1)

c) $\vartheta'(x) = \frac{M_T}{G I_p}$ (1)

$$\vartheta'(x) = \frac{160Fa}{3d^4 G\pi}$$

$$\vartheta(x) = \frac{160Fa}{3d^4 G\pi} x + C_1$$

RB: $\vartheta(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ (1)

$$\vartheta(x=l) = \frac{160\, F a}{3 d^4 G \pi}\, l \qquad 1$$

d) $$w_A = w(x=l) + \frac{2}{3} a\, \vartheta(x=l)$$

$$= \frac{64}{3 E \pi d^4}\, l^3 + \frac{2}{3}\, \frac{160\, F a^2}{3 d^4 G \pi} \qquad 1$$