Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

## Theorieaufgaben

Musterlösung

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen ausschließlich in den Einheiten 1, kg, m , s und N an:

| | |
|---|---|
| Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ | $\frac{N}{m^3}$ , $\frac{kg}{m^2 s^2}$ |
| Dehnrate $\dot{\epsilon}$ | $\frac{1}{s}$ |
| Massenbelegung einer Saite $\mu$ | $\frac{kg}{m}$ |
| Impuls $\underline{p}$ | $\frac{kg\ m}{s}$ |

**(2 Punkte)**

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung $\sigma_{11}$.

Geg.: $\lambda$, $\mu$, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

**(1 Punkt)**

$$\sigma_{11} = \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) + 2\mu\,\varepsilon_{11}$$

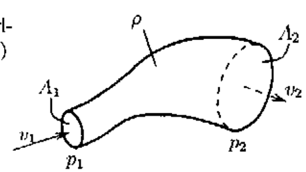
3. Formulieren Sie die Massenbilanz für ein geschlossenes System.

$\frac{dM}{dt} = 0$

**(1 Punkt)**

4. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für Anfangs- und Endquerschnitt der skizzierten Stromröhre? (konstante Dichte $\rho$)

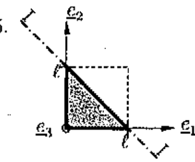
$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$




**(1 Punkt)**

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

LKM

5. 


Gegeben ist der 3-dimensionale Spannungszustand eines Würfels. Berechnen Sie den Spannungsvektor am Schnitt I-I gemäß der Cauchyschen-Tetraedergleichung.

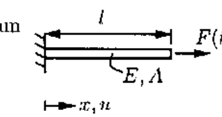
Geg.: $\ell$, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

Hinweis: $\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

**(1 Punkt)**

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} \\ \sigma_{13} + \sigma_{32} \end{pmatrix}$$

6. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Stab auf die feste Einspannung am Stabende zu. Was für eine Spannung tritt am eingespannten Ende des Stabes auf? Kreuzen Sie das richtige Ergebniss an.




( ) An der Einspannung muss $u(x = 0, t) = 0$ , $\forall t$ gelten, d.h. keine Spannung.

(X) Einspannung ermöglicht keine axiale Bewegung, d.h. maximale Spannung.

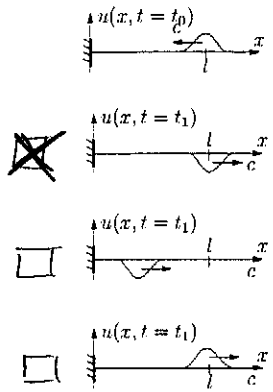
( ) Die Spannung ist $\forall t$ konstant.

( ) Keine der obigen Antworten ist richtig.

**(1 Punkt)**

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

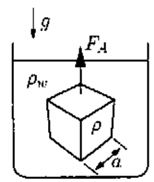
7. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Dehnstab auf die feste Einspannung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Welches der Diagramme bekennzeichnet die Verschiebung $u(x, t = t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ ?




**(1 Punkt)**

8. Ein Würfel mit der Dichte $\rho$ und der Kantenlänge $a$ ist auf der Spitze stehend vollständig in Wasser (Dichte $\rho_w$, Volumen $V_w$) untergetaucht. Wie groß ist die Auftriebskraft des Würfels?

$F_A = \rho_w a^3 g$

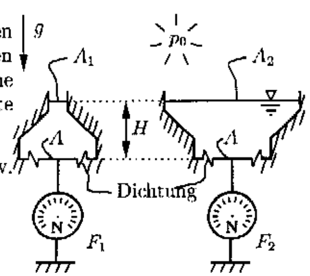



**(1 Punkt)**

9. Die zwei skizzierten Gefäße sind mit Wasser gefüllt. Mit den Meßdosen wird die resultierende Kraft auf den Gefäßboden gemessen. Beide Gefäßböden haben die gleiche Grundfläche $A$. Berechnen Sie die von den Meßdosen angezeigten Kräfte $F_1$ und $F_2$!

Geg.: $A$, $g$, $p_0$, $H$, Wasserdichte $\rho$, Wasseroberflächen $A_1$ bzw. $A_2$ (Ohne Wasser zeigen beide Meßdosen Null an.)

$F_1 = \rho g H A$ $\qquad$ $F_2 = \rho g H A$




**(1 Punkt)**

Musterlösung 1. Klausur Kontinuumsmechanik
WS 10/11

$\boxed{1}$

a) IB: $\rho \underbrace{\cancel{\frac{\partial v_i}{\partial t}}}_{=0} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$ (1)

b) Navier-Stokes: $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ (1)

$\Rightarrow \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i$ (1)

c) $v_i = (v_1(x_2), 0, 0)$ (1)

Begründung z.B.: - laminar
- keine Scherströmungen
- unendliche Ausdehnung (1)

$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho f_i$ (1)

d) $i=1$:

$\frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = \frac{p'}{\mu}$ (1)

Integration:

$v_1 = \frac{p'}{2\mu}x_2^2 + Ax_2 + B$ (1)

RBs: $v_1(x_2=0) = 0$, $v_1(x_2=D) = v_0$ (1)

$\Rightarrow B = 0$, $A = \frac{v_0}{D} - \frac{p'}{2\mu}D$ (1)

$v_1(x_2) = \frac{p'}{2\mu}x_2^2 + \left(\frac{v_0}{D} - \frac{p'}{2\mu}D\right)x_2$ (1)

e) $\sigma_{21} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$ (1)

$\Rightarrow x_2 = \frac{D}{2} - \frac{v_0}{D}\frac{\mu}{p'}$ (1)

f) $Q = \int_A v_1\, dA$ mit $dA = t\, dx_2$ (1)

$= t\left[\frac{v_0}{2}D - \frac{p'}{12\mu}D^3\right]$ (1)

$\boxed{A3}$

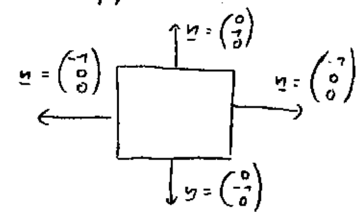
a) $\underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \underbrace{\cancel{\rho f_i}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$ (1)

b) $\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\, dV + \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i}\, dV = 0$ (1)

da $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (1)

Gauß:

$\oint_{\partial V} (n_j \rho v_i v_j + n_i p)\, dA = 0$ (1)


(1)

$i=1$:

c) $\int_{A_l} -p\, dA + \int_{A_r} [\rho(-v)(-v) + p_0]\, dA = 0$ $A_l = A_r = A$ (1)

$\Rightarrow p = p_0 + \rho v^2$ (1)

d) $F + p_0 A = pA$ (1)

$\Rightarrow F = \rho A v^2$ (1)

zu c) $i=2$: $\int_{A_o} (\rho v_2^2 + p_0)\, dA + \int_{A_u} (-\rho v_2^2 - p_0)\, dA = 0$ $A_o = A_u$ (1)

$\Rightarrow 0 = 0$

$i=3$: $\int_{A_v} (\rho v_3^2 + p_0)\, dA + \int_{A_H} (-\rho v_3^2 - p_0)\, dA = 0$ (1)

$\Rightarrow 0 = 0$

|7|

a) $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial w}{\partial x_2}$ (1)

b) $w(x,t) = X(x)\,T(t)$ (1)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} T(t) &= A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \\ X(x) &= B_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

geometrische RBs:

$w(x=0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 0$ (1)

$w(x=L,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}L = k\pi$ (1)

$k = 1,2,3,4 \ldots \infty$

Alles einsetzen:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \underbrace{\tilde{A}_k}_{\substack{\text{neue Konst.} \\ \tilde{A}_k = A_1 \cdot B_k}} \sin\left(\frac{k\pi c t}{L}\right) + \underbrace{\tilde{B}_k}_{\tilde{B}_k = A_2 \cdot B_k} \cos\left(\frac{k\pi c t}{L}\right) \right) \sin\frac{k\pi x}{L}$$

(1) mit Erläuterung d. neuen Konstanten

c) ABs:

$w(x,0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \sin\frac{k\pi x}{L} \quad \Rightarrow \quad \tilde{B}_k = 0$ (1)

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \sin\left(\frac{k\pi c t}{L}\right) \sin\frac{k\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{k\pi c}{L} \cos\left(\frac{k\pi c t}{L}\right) \sin\frac{k\pi x}{L} \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{k\pi c}{L} \sin\frac{k\pi x}{L} \overset{(1)}{=} \text{bekannte Anfangsgeschwindigkeit}$$

- Multiplikation mit $\sin\frac{j\pi x}{L}$ (1)
- Integration über $L$

$$\int_0^L \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} \sin\frac{j\pi x}{L}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{k\pi c}{L} \underbrace{\int_0^L \sin\frac{k\pi x}{L} \sin\frac{j\pi x}{L}\,dx}_{\text{Orthogonalität: } = \frac{L}{2} \text{ f. } k=j} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^L \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} \sin\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{k\pi c} v_0 \int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}} \sin\frac{2\pi(x-\xi)}{d} \sin\frac{k\pi x}{L}\,dx \quad (1)$$

$$= \frac{2 d v_0}{k\pi^2 c\left(1-\left(\frac{dk}{2L}\right)^2\right)} \cos\frac{k\pi d}{2L} \sin\frac{k\pi \xi}{L} \quad (1)$$