Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2. Klausur Kontinuumsmechanik SS 09

Bitte deutlich in Druckschrift schreiben!

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

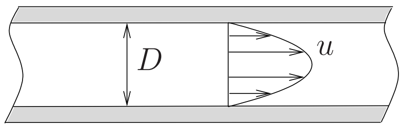
Studiengang:

Bitte links oder rechts ankreuzen!

◯ Studienbegleitende Prüfung ◯ Übungsscheinklausur

1 (13 Punkte)

Betrachtet werden zwei planparallele Platten (Tiefe der Platten t, Abstand D), durch das ein inkompressibles Navier-Stokes-Fluid (die Viskositäten sollen bekannt und konstant sein) der Dichte ρ fließt. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Zusätzlich soll angenommen werden, dass das Geschwindigkeitsprofil nicht von der Tiefe abhängt. In Strömungsrichtung soll ein konstantes Druckgefälle p' vorhanden sein.



(a) Zeigen Sie mit der lokalen Impulsbilanz und unter Angabe relevanter Materialgleichungen, daß die Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit u

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x_2^2} = \frac{p'}{\mu}$$

lautet. Benutzen Sie einen semiinversen Ansatz und begründen Sie, wie warum von dem partiellen auf ein totales Differential übergegangen werden kann. Gehen Sie von einem stationären Zustand aus. Die Volumenkraft ist zu vernachlässigen.

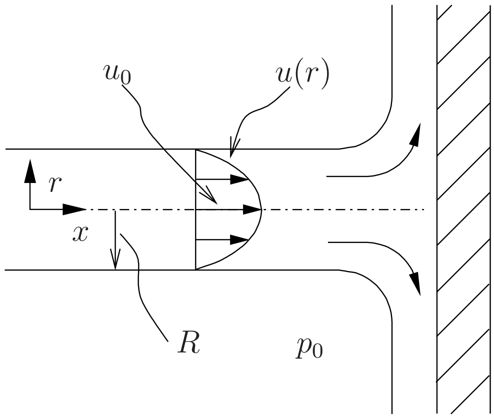
(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Bestimmen Sie nun das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit vom Druckgefälle.

(d) Berechnen Sie den Volumenstrom Q des Fluids.

Geg.: D, t, μ, p'

$\boxed{2}$ **(13 Punkte)**



Ein Wasserstrahl (Dichte ρ), der ein Geschwindigkeitsprofil $u/u_0 = 1 - (r/R)^2$ besitzt, tritt aus einem kreisförmigen Rohr (Radius R) ins Freie und trifft stromabwärts von der Rohrmündung auf eine senkrecht zum Strahl gestellte ebene Platte (vgl. nebenstehende Skizze). Es herrscht der Umgebungsdruck p_0.

(a) Wie groß ist die auf die Platte wirkende Strahlkraft F ? Das Ergebnis ist in der Form $F = f_1(\rho, u_0, R)$ anzugeben.
Gehen Sie bei der Berechnung von der lokalen Impulsbilanz aus, wählen sich ein geeignetes Kontrollvolumen und machen dieses deutlich in der Aufgabenskizze kenntlich. Hinweise: Es handelt sich um einen stationären Zustand. Der Spannungszustand im Fluid kann als rein hydrostatischer Druck angenommen werden. Der Einfluss der Schwerkraft ist zu vernachlässigen. Des weiteren sollen die parallel zur Platte auftretenden Geschwindigkeiten zu Null gesetzt werden, ohne das Ergebniss für die Kraft zu verfälschen.

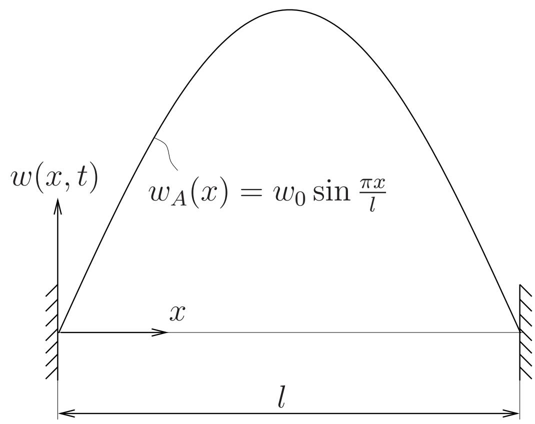
(b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit im Rohr $\bar{u} = Q/\pi R^2 = f_2(u_0)$?

(c) Die unter a) berechnete Strahlkraft F ist in der dimensionslosen Form $c_F = F/\left(\frac{\rho}{2}\bar{u}^2\pi R^2\right)$ anzugeben.

(d) Wie groß ist der dimensionslose Beiwert c_F für den Fall einer reibungslosen Rohrströmung mit der über den Rohrquerschnitt konstanten Geschwindigkeit $\bar{u}$? Vergleichen Sie die Ergebnisse aus c) und aus d).

3 **(14 Punkte)**

Eine Saite der Länge l wird mit S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ sowohl mit dem Produktansatz von Bernoulli als auch mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Der Ansatz $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ liefert $w(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \cdot (C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x)$. Bestimmen Sie C und die Eigenkreisfrequenzen ω_k durch Anpassung an die Randbedingungen, welche für alle Zeiten gelten.

(c) Die allgemeine Lösung ist eine unendliche Reihe mit noch nicht bestimmten Konstanten A_k und B_k. Bestimmen Sie diese durch Anpassung an die Anfangsbedingungen, welche für alle Orte gelten. Geben Sie die spezielle Lösung an.

(d) D'Alemberts Koordinatenwechsel von (x,t) auf $(\xi_1 = x - ct, \xi_2 = x + ct)$ liefert, dass w sich aus zwei Anteilen additiv zusammensetzt, nämlich $w(x,t) = f_1(\xi_1(x,t)) + f_2(\xi_2(x,t))$. Man erhält für die gegebenen Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$: $f_1(\xi_1(x, t = 0)) = f_2(\xi_2(x, t = 0)) = \frac{1}{2} w_A(x)$. Geben Sie davon ausgehend die Lösung für beliebige Zeiten t an, also $w(x,t)$.

(e) Benutzen die das Theorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$. Stellen Sie damit w als Produkt dar, nämlich als $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Geg.: S, μ, l, $c^2 = \frac{S}{\mu}$

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s , N und J an:

Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial v}{\partial x}$	
Volumenviskosität λ	
Querkontraktionszahl ν	
Massenstrom	

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{11}.

Geg.: λ, μ, $\vec{\vec{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\qquad \sigma_{11} =$ **(1 Punkt)**

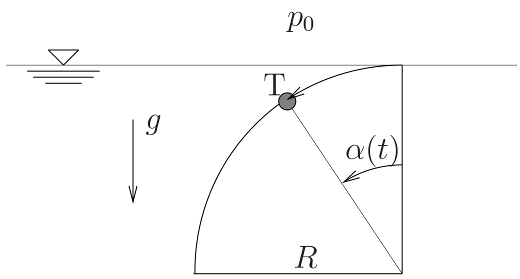
3. Gewinnen Sie mit dem Ansatz $w(x,y,t) = \cos\alpha x \cos\beta y \cos\omega t$ aus der Schwingungsdifferentialgleichung der Membran $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\Delta w = 0$ eine Beziehung für ω als Funktion von α, β und c!
Hinweis: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist der Laplace-Operator. **(2 Punkte)**

4. Von welchen Größen hängen die Eigenfrequenzen einer transversalschwingenden vorgespannten Gitarrensaite ab?

- ☐ Länge l der Saite
- ☐ Massenbelag μ
- ☐ Spannkraft S der Saite

(1 Punkt)

5. Ein Taucher T bewegt sich sehr langsam auf einer Viertelkreisbahn im Wasser, so dass $\alpha(t) = ct$ mit c =const. Bestimmen Sie $p(t)$.



$$p(t) =$$

Geg. $p_0, R, c, g, \alpha(t) = ct, \rho$

(1 Punkt)

6. Wie groß ist die Auftriebskraft eines Heliumballons mit einem Volumen von $V = 4000\text{m}^3$ während er durch Luft fliegt?

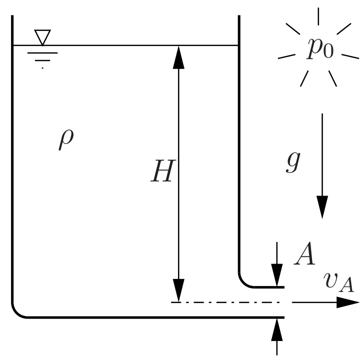
($g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\rho_{\text{Luft}} \approx 1{,}25\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho_{\text{He}} \approx 0{,}15\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

$$F_A =$$

(1 Punkt)

7. Ein Behälter ist mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt. Berechnen Sie unter der Annahme eines konstanten Pegelstands die Ausflußgeschwindigkeit v_A!

Geg.: ρ, g, p_0, H, Austrittsquerschnitt A



(1 Punkt)

8. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck nach der Summenkonvention. δ ist das Kroneckersymbol, also $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und sonst Null.

$$\delta_{2i} A_{ki} \delta_{k3} = \boxed{}$$

(1 Punkt)