Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Technische Universität Berlin
LKM

Klausur zur Kontinuumsmechanik WS 2014/15

Namen in lesbaren Druckbuchstaben angeben!

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit (Unterschrift):

○ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor)
○ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

T	
1	
2	
3	
Σ	

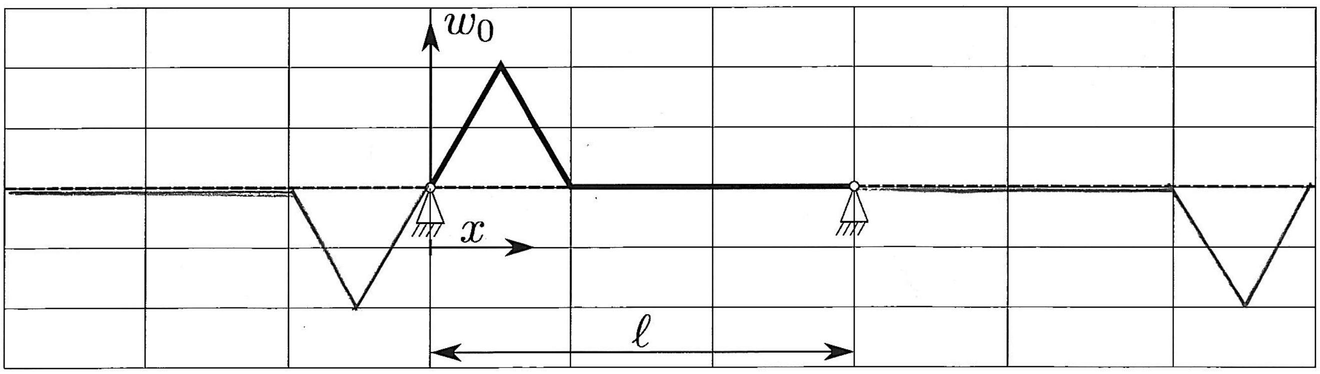
Theorieteil

Hinweis: Eine Theorieaufgabe muss **komplett richtig** beantwortet werden, um den zugehörigen Punkt zu erhalten! Antworten zu Theorieaufgaben auf einem Extrablatt werden ohne gesonderten Hinweis auf das Extrablatt bei den Aufgabenstellungen nicht gewertet!

1. Geben Sie von den folgenden Größen die Einheiten ausgedrückt in den SI-Basiseinheiten: m, kg, s, A, K, mol und cd an. **(1 Punkt)**

Lamé-Konstante λ des HOOKEschen Gesetzes	$\frac{kg}{m s^2}$ $\left(= \frac{N}{m^2}\right)$	Lamé-Konstante λ des NAVIER-STOKES-Gesetzes	$\frac{kg}{m s}$
spezifische Volumenkraft $\boldsymbol{f}$	$\frac{m}{s^2}$ $\left(= \frac{N}{kg}\right)$	Impulsdichte $\rho \boldsymbol{v}$	$\frac{kg}{s m^2}$ $\left(= \frac{kg \frac{m}{s}}{m^3}\right)$

2. Es sollen Transversalwellen einer beidseitig eingespannten Saite mit $x \in [0, \ell]$ untersucht werden. Zur Zeit $t = 0$ ist die Saite in Ruhe und erfährt eine Anfangsauslenkung $w_0(x)$, die im Bereich $x \in [0, \ell]$ gezeichnet ist. Die Verschiebung $w(x, t)$ soll mit der Methode von D'ALEMBERT ausgerechnet werden, wofür die Anfangsdaten fortgesetzt werden müssen. Zeichnen Sie die qualitativ richtige Fortsetzung im Bereich $x \in [-\ell, 2\ell]$ in das Diagramm ein. **(1 Punkt)**



3. Kreuzen Sie das korrekte FOURIER-Gesetz für isotrope Werkstoffe an. **(1 Punkt)**

☒ $\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla T$
☐ $\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla \cdot T$
☐ $\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla \times T$
☐ $\boldsymbol{q} = -\alpha (T - T_{\mathrm{ref}}) \boldsymbol{n}$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin
Technische Universität Berlin
LKM

4. Kreuzen Sie das korrekte NAVIER-STOKES-Materialgesetz an. **(1 Punkt)**

- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = -\nabla \cdot \nabla p \mathbb{1} + \mu(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$
- [x] $\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v})\mathbb{1} + \mu(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$
- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathbb{1} + \mu(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$
- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathbb{1} + 2\mu \nabla \boldsymbol{v}$

5. Die Geschwindigkeit c von Longitudinalwellen in einem Balken soll erhöht werden. Kreuzen Sie alle möglichen Maßnahmen an, die dazu führen. **(1 Punkt)**

- [ ] Erhöhung des Flächenträgheitsmomentes I
- [ ] Erhöhung der Querschnittsfläche A
- [ ] Erhöhung der Normalkraft N
- [x] Erhöhung des Elastizitätsmoduls E
- [ ] Erhöhung der Massendichte ρ
- [ ] Erhöhung der Querkontraktionszahl ν

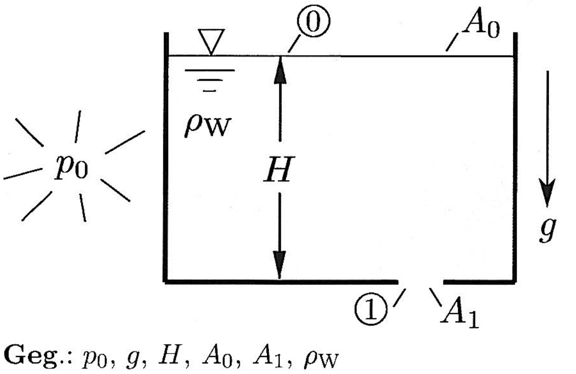
6. Geben Sie die rechte Seite der Massenbilanz eines geschlossenen Systems an: **(1 Punkt)**

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0$$

7. Übertragen Sie die Gleichung des Spannungsdeviators, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\sigma})\mathbb{1}$, in Indexnotation mit kartesischen Komponenten. Gebundene Indizes in dem Ausdruck sind zu **expandieren**! **(1 Punkt)**

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}$$

8. Unter der Annahme eines sehr großen Behälters soll die gegenwärtige Wasser-Ausflussgeschwindigkeit im Punkt (1) bestimmt werden. **(1 Punkt)**

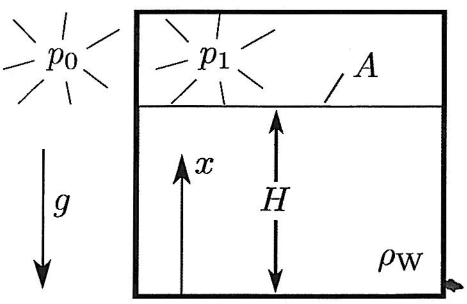


Geg.: p_0, g, H, A_0, A_1, ρ_W

Am Ausfluss (1) ist die Geschwindigkeit:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2gH}$$

9. In einem geschlossenem starren Behälter soll der Druck $p_{\mathrm{Innen}}(x)$ an der Innenwand unterhalb der Wasseroberfläche bestimmt werden. **(1 Punkt)**



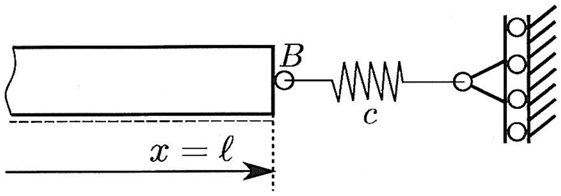
Geg.: p_0, p_1, g, A, H, ρ_W

Geben Sie den Innendruck $p_{\mathrm{Innen}}(x)$ in Abhängigkeit der eingezeichneten Koordinate x unterhalb der Wasseroberfläche an:

$$p_{\mathrm{Innen}}(x) = p_1 + \rho_W g H\left(1 - \frac{x}{H}\right)$$

Name, Vorname: **Matr.-Nr.:**

10. In einem Balken sollen Transversalwellen untersucht werden. Geben Sie die Randbedingungen für das Lager B an der Stelle $x = \ell$ an, ausgedrückt durch die Verschiebung w. **(1 Punkt)**



Geg.: ρ, E, I, A, c, ℓ

Randbedingungen in w für die Berechnung der Transversalwellen:

(RB1): $w''(x=L) = 0$

(RB2): $w'''(x=L) = 0$

Rechenteil

1 Stromfadentheorie **(10 Punkte)**

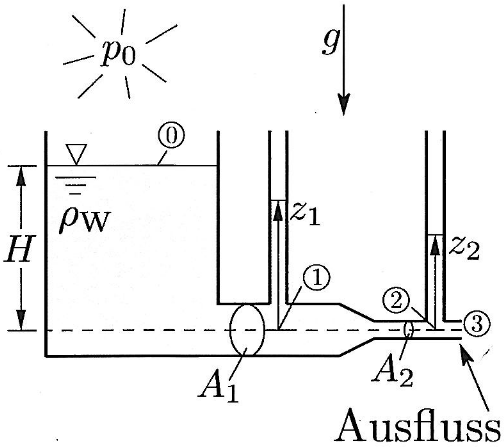
Aus einem **großen** Behälter fließt eine inkompressible Flüssigkeit durch ein Rohr mit veränderlicher Querschnittsfläche aus.

a) Wie groß sind die Ausflussgeschwindigkeit $|\boldsymbol{v}|$ und der Volumenstrom Q am Ausfluss 3? **(2 Punkte)**

b) Geben Sie die Volumenströme Q und die Geschwindigkeiten $|\boldsymbol{v}|$ an den Stellen 1 und 2 an. **(4 Punkte)**

c) Wie groß ist der Druck p an den Stellen 1 und 2? **(2 Punkte)**

d) Wie hoch sind die Wasserspiegel in den Steigrohren? Geben Sie die Maße z_1 und z_2 an. *Hinweis*: Verwenden Sie hier die hydrostatische Druckformel. **(2 Punkte)**



Geg.: p_0, g, H, A_1, A_2, ρ_W

Musterlösung zur Klausur Kontinuumsmechanik WS 14/15

Rechenteil

Aufgabe 1

a) BERNOULLI 0 → 3

$$\frac{p_0}{\varrho_w} + gH = \frac{v_3^2}{2} + \frac{p_0}{\varrho_w}$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = \sqrt{2gH}$$

$$\Rightarrow \quad Q_3 = v_3 A_2 = \sqrt{2gH}\, A_2$$

b) Kontinuitätsgleichung bei Inkompressibilität

$$Q_1 = Q_3 = \sqrt{2gH}\, A_2$$

$$Q_2 = Q_3 = \sqrt{2gH}\, A_2$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gH}\,\frac{A_2}{A_1}$$

$$v_2 = \sqrt{2gH} = v_3$$

c) BERNOULLI 3 → 2

$$p_3 = p_2 = p_0$$

BERNOULLI 3 → 1

$$\frac{v_3^2}{2} + \frac{p_3}{\varrho_w} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\varrho_w}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 = p_0 + \varrho_w g H\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

d) Hydrostatische Druckformel

- Für z_1:

$$p_1 = p_0 + \varrho_w g z_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \varrho_w g z_1 = \varrho_w g H\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = H\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]$$

- Für z_2:

$$p_2 = p_0 + \varrho_w g z_2$$

$$\Leftrightarrow \quad p_0 = p_0 + \varrho_w g z_2$$

$$\Leftrightarrow \quad z_2 = 0$$

A1: $\sum$ 10 Punkte

Aufgabe 2

a) Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{w} = c^2 w''$$

mit

$$c^2 = \frac{N}{\varrho A}$$

b) Ansatz

$$w(x,t) = X(x)\,T(t)$$

in Wellengleichung einsetzen:

$$X \ddot{T} = c^2 X'' T \quad \Big| \cdot \frac{1}{XT}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

und $X'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X = 0$.

Die allg. Lösungen lauten damit

$$T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$$

$$X(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

c) Festlager auf beiden Seiten:

$$w(x=0,t) = 0 \qquad \text{(RB1)}$$

$$w(x=L,t) = 0 \qquad \text{(RB2)}$$

d) Auswertung der RBen:

(RB1):

$$w(x=0,t) = X(0)T(t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow X(0) = B \overset{!}{=} 0$$

(RB2):

$$w(x=L,t) = X(L)\,T(t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow X(L) = A\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \overset{!}{=} 0$$

Für nicht-triviale Lösungen ($A \neq 0$) muss damit gelten:

$$\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \omega_k = k\frac{c\pi}{L}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Überlagerung aller Lösungen:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right)\left[C_k \sin\left(k\pi\frac{ct}{L}\right) + D_k\cos\left(k\pi\frac{ct}{L}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right)\left[\bar{A}_k \sin\left(k\pi\frac{ct}{L}\right) + \bar{B}_k\cos\left(k\pi\frac{ct}{L}\right)\right]$$

mit $\bar{A}_k = A_k C_k$

$\bar{B}_k = A_k D_k$

(keine Summenkonvention!)

e) Ignoriere Amplituden A_n, A_m und bilde

$$\int_{x=0}^{L} X_n(x)\,X_m(x)\,dx = \int_{x=0}^{L} \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(m\pi\frac{x}{L}\right)dx$$

Substituiere mit

$$x = \frac{\varphi}{\pi}L \Rightarrow dx = \frac{L}{\pi}d\varphi:$$

$$\Rightarrow \int_{x=0}^{L} \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(m\pi\frac{x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{L}{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin(n\varphi)\sin(m\varphi)\,d\varphi$$

$$= \delta_{nm}\frac{L}{2} \qquad \text{(laut Aufgabenblatt)}$$

f) Anfangsbedingungen:

$$w(x,t=0) = \hat{w}_0 \sin\left(\pi\frac{x}{L}\right) \qquad \text{(AB1)}$$

$$\dot{w}(x,t=0) = 0 \qquad \text{(AB2)}$$

Zuerst (AB2):

Bilde $\dot{w}(x,t)$:

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi\frac{c}{L}\sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right)\left[\bar{A}_k\cos\left(k\pi\frac{ct}{L}\right) - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \bar{B}_k \sin\left(k\pi\frac{ct}{L}\right)\right]$$

(AB2)

$$\Rightarrow \dot{w}(x,t=0) = \frac{\pi c}{L}\sum_{k=1}^{\infty} k\bar{A}_k \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{A}_k = 0$$

(AB1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \sin\left(k\pi\frac{x}{L}\right) = \hat{w}_0 \sin\left(\pi\frac{x}{L}\right)$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\bar{B}_k = \hat{w}_0\,\delta_{1k}$$

bzw.

$$\bar{B}_1 = \hat{w}_0, \quad \bar{B}_2 = \bar{B}_3 = \ldots = 0$$

g) Die vollständige Lösung lautet damit

$$w(x,t) = \hat{w}_0 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(\pi \frac{ct}{L}\right)$$

$$= \hat{w}_0 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(\pi \sqrt{\frac{N}{\rho A}} \frac{t}{L}\right)$$

$A2: \sum 20$ Punkte

Aufgabe 3

a) Symbolisch:

$$\underbrace{\rho \frac{d\underline{v}}{dt}}_{\substack{=0 \\ \text{(Statik)}}} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underbrace{\rho \underline{f}}_{\substack{=0 \\ \text{(keine Gravitation)}}}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$$

Indexschreibweise:

$$\underbrace{\rho \frac{dv_i}{dt}}_{\substack{=0 \\ \text{(Statik)}}} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \underbrace{\rho f_i}_{\substack{=0 \\ \text{(keine Gravitation)}}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

Anmerkung:
Andere korrekte Formulierungen der Impulsbilanz sind selbstverständlich auch zulässig!

b) Verzerrungstensor:

Symbolisch:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T\right)$$

Indexschreibweise:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

HOOKE (isotrop homogen)
Symbolisch:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda Sp(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Indexschreibweise:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Für inkompressible Festkörper gilt

$$Sp(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{kk} = 0$$

Also folgt

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$$

c) HOOKE in Impulsbilanz
Symbolisch:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \nabla \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$= \mu \nabla \cdot \left(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T\right)$$

$$= \mu\left(\Delta \underline{u} + \nabla(\nabla \cdot \underline{u})\right) = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta \underline{u} + \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) = \underline{0}$$

Mit Inkompressibilität ($\nabla \cdot \underline{u} = 0$) folgt

$$\Delta \underline{u} = \underline{0}$$

Indexschreibweise:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_j}$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \mu\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right) = 0$$

Mit Inkompressibilität ($\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$) folgt

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

d) Verschweißung im Ursprung:

$$u_1(\underline{x} = \underline{0}) = u_2(\underline{x} = \underline{0}) = u_3(\underline{x} = \underline{0}) \overset{!}{=} 0$$

e) Spannungsvektor an der Oberseite:

$$\underline{t}(x_1, x_2, x_3 = a) = -\frac{F}{A} \underline{e}_3$$

CAUCHY-Theorem:

$$\underline{e}_3 \cdot \underline{\underline{\sigma}}\big|_{x_3 = a} = -\frac{F}{A} \underline{e}_3$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{33}\big|_{x_3 = a} = -\frac{F}{A}$$

oder in Indexschreibweise

$$t_1|_{x_3=a} = t_2|_{x_3=a} = 0$$

$$t_3|_{x_3=a} = -\frac{F}{a}$$

CAUCHY:

$$n_j \sigma_{j3}|_{x_3=a} = t_3|_{x_3=a} \quad \text{mit } n_1|_{x_3=a} = n_2|_{x_3=a} = 0$$

$$n_3|_{x_3=a} = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_{33}|_{x_3=a} = -F/A$$

f) Vektorielle Feldgleichung

$$\Delta \underline{u} = \underline{0} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

komponentenweise mit geg. Ansatz auswerten:

$$i=1: \quad \frac{\partial^2 u_1(x_1)}{\partial x_1^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_1(x_1)}{\partial x_2^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_1(x_1)}{\partial x_3^2}}_{=0} = 0$$

$$i=2: \quad \text{(analog)} \quad \frac{\partial^2 u_2(x_2)}{\partial x_2^2} = 0$$

$$i=3: \quad \text{(analog)} \quad \frac{\partial^2 u_3(x_3)}{\partial x_3^2} = 0$$

Also folgt:

$$\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} = 0, \quad \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} = 0$$

Integration liefert

$$u_1(x_1) = A_1 x_1 + B_1$$

$$u_2(x_2) = A_2 x_2 + B_2$$

$$u_3(x_3) = A_3 x_3 + B_3$$

g) Verschweißung im Ursprung ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$)

$$u_1(x_1=0) = B_1 \overset{!}{=} 0$$

$$u_2(x_2=0) = B_2 \overset{!}{=} 0$$

$$u_3(x_3=0) = B_3 \overset{!}{=} 0$$

Spannungsrandbedingung

$$\sigma_{33}|_{x_3=a} \underset{\text{HOOKE}}{=} 2\mu \varepsilon_{33}|_{x_3=a} = 2\mu \frac{du_3}{dx_3}\Big|_{x_3=a} \overset{!}{=} -\frac{F}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{du_3}{dx_3}\Big|_{x_3=a} = A_3 = -\frac{F}{2\mu A}$$

Inkompressibilität:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{du_1}{dx_1} + \frac{du_2}{dx_2} + \frac{du_3}{dx_3}$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 \overset{!}{=} 0.$$

Mit: • Symmetrie: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \Leftrightarrow A_1 = A_2$

• $A_3 = -\frac{F}{2\mu A}$

folgt

$$A_1 = A_2 = \frac{F}{4A\mu}.$$

Alle Konstanten sind bestimmt, die Lösung ist dann

$$u_1(x_1) = \frac{F}{4A\mu} x_1,$$

$$u_2(x_2) = \frac{F}{4A\mu} x_2,$$

$$u_3(x_3) = -\frac{F}{2A\mu} x_3.$$

h) HOOKE:

$\sigma_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij}$, wobei

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{F}{4A\mu}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{du_2}{dx_2} = \frac{F}{4A\mu}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{du_3}{dx_3} = -\frac{F}{2A\mu}$$

Gleitungen sind Null

$\Rightarrow$ Komponentenmatrix:

$$\sigma_{ij} = \frac{F}{A}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

i) Beispiel rechter Rand:

Keine Normalspannungen:

$$\sigma_{11}\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Aber unsere Lösung liefert

$$\sigma_{11}\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = \frac{F}{2A} \neq 0 .$$

$\hookrightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$ Der Ansatz ist also ungeeignet.

A3: $\sum$ 10 Punkte