1

2. Klausur Kontinuumsmechanik WS 10/11
Musterlösung

1

a) lokale IB: $\varrho \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{=0,\ \text{stationär}} + \varrho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \varrho f_i$ 1

b) Navier-Stokes: $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ 1

einsetzen: $\varrho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \varrho f_i$ 1

c) Ansatz:

$v_i = (v_1(x_2), 0, 0)$

- laminar
- keine Scherströmung
- unendliche Ausdehnung

1 mit Begründung

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} &= 0 \end{aligned}\right\} \ 1$$

d) für $i=1$: $0 = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x_1}}_{p'} + \mu \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}$ 1 $\partial \to d$ weil v_1 nur von x_2 abhängt

2x Integrieren:

$v_1 = \frac{-p'}{2\mu} x_2^2 + A x_2 + B$

RBs: 1 $\begin{cases} v_1(x_2=0) = -v_0 \\ v_1(x_2=D) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \overbrace{B = -v_0\,,\quad A = \frac{2v_0}{D} + \frac{p'D}{2\mu}}^{1}$

$v_1 = \frac{-p'}{2\mu}x_2^2 + \left(\frac{2v_0}{D} + \frac{p'}{2\mu}D\right)x_2 - v_0$

für $i=2$:

$\frac{dp}{dx_2} = -\varrho g \Rightarrow p = -\varrho g x_2 + C$ mit $p(x_2=0) = p_0$ 1
$\Rightarrow C = p_0$

e) $\sigma_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -p' x_2 + \frac{p'D}{2} + \mu \frac{2v_0}{D}$ 1

$\sigma_{12}(x_2 = D) = -\frac{p'D}{2} + \frac{2\mu v_0}{D} = 0 \Rightarrow \frac{p'}{v_0} = \frac{4\mu}{D^2}$ 1

f) $Q = \int_A v_1 \, dA \qquad dA = t\, dx_2$

$$= \int_0^D \left[-\frac{p'}{2\mu} x_2^2 + \left(\frac{p' D}{4\mu} + \frac{V_0}{D} \right) x_2 - V_0 \right] t \, dx_2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{p' D^3 t}{12 \mu} \quad (1)$$

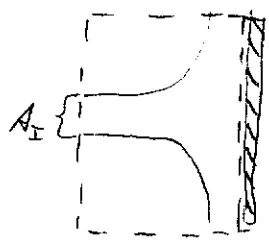
$$Q = 0 \Rightarrow p' = 0 \Rightarrow \frac{p'}{V_0} = 0 \quad (1)$$

$\boxed{2}$

a) IB: $\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \underbrace{f_i}_{=0} \quad (1)$

$\sigma_{ij} = -p \, \delta_{ij}$

mögliches Kontrollvolumen:



(1)

Gauß:

$$\int_{\partial V} \rho v_i v_j n_j \, dA = -\int_{\partial V} p n_i \, dA \quad (1)$$

für $i = 1$:

$$\int_{A_I} \rho \left[u_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) \right]^2 \underbrace{(-1)}_{\text{aus Normalenvektor}} = (-p + p_0) A = -F_H \quad (1)$$

(2) für Diskussion der restlichen Terme, siehe Aufgabenstellung

$$\int_{A_I} -\rho \left[u_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) \right]^2 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} -\rho u_0^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right)^2 \underbrace{r \, d\varphi \, dr}_{dA} \quad (1)$$

$$= -\rho u_0^2 \frac{R^2 \pi}{3} \quad (1)$$

$$\Rightarrow F_H = \frac{1}{3} \rho u_0^2 \quad (1)$$

b) $\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\int v\, dA}{\pi R^2} = \frac{v_0 \int_0^{2\pi}\int_0^R \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r\, dr\, d\varphi}{\pi R^2}$

$= \frac{v_0}{2}$ 1

c) $c_F = \frac{F_H}{\frac{\rho}{2}\bar{v}^2 R\pi^2} = \frac{8}{3}$ 1

d) $F_H = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\bar{v}^2 r\, dr\, d\varphi = \rho\bar{v}^2 R^2\pi$ 1

$\Rightarrow c_F = 2$ 1

3

a) $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 1

b) $\ddot{T} + \omega^2 T = 0$
$X'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X = 0$ $\Rightarrow$ $T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
$X(x) = C\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$ 1
$w(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

RBs: $w(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0$ 1
$w(x=l) = 0 \Rightarrow D\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) = 0$ 1
$\omega_k = k\frac{c}{l}\pi$

c) $w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cos(\omega_k t) + B_k\sin(\omega_k t)\right]\sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right)$

ABs: 1. $w(x, t=0) = w_A$
2. $\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{(x,t=0)} = 0$ 1

aus 1. $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = w_0\sin\frac{3\pi x}{l}$
$\Rightarrow A_3 = w_0, \quad A_k = 0 \ \forall k \neq 3$ 1

aus 2. $\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-A_k\omega_k\sin(\omega_k t) + B_k\omega_k\cos(\omega_k t)\right]\sin\left(\frac{\omega_k}{c}x\right)$ 1
$\Rightarrow B_k = 0$ 1

$$\Rightarrow w(x,t) = w_0 \cos\left(\frac{3c\pi}{l}t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \quad 1$$

d) $$w(x,t=0) = f_1(\xi_1 = x - 0t) + f_2(\xi_2 = x + 0t)$$

$$= w_0\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi x}{l}\right) \quad 1$$

$$\Rightarrow w(x,t) = w_0\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi(x-ct)}{l} + \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi(x+ct)}{l}\right) \quad 1$$

e) $$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\sin\left(3\pi\frac{x}{l} - 3\pi\frac{ct}{l}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(3\pi\frac{x}{l} + 3\pi\frac{ct}{l}\right)\right\} \quad 1$$

$$= \frac{1}{2}w_0\left\{\sin\left(3\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(3\pi\frac{ct}{l}\right) - \cos\left(3\pi\frac{x}{l}\right)\sin\left(3\pi\frac{ct}{l}\right) + \sin\left(3\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(3\pi\frac{ct}{l}\right) + \cos\left(3\pi\frac{x}{l}\right)\sin\left(3\pi\frac{ct}{l}\right)\right\} \quad 1$$

$$= w_0 \sin\left(3\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(3\pi\frac{ct}{l}\right) \quad 1$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s , N und J an:

Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{1}{s}$
Volumenviskosität λ	$\frac{Ns}{m^2}$, $\frac{kg}{ms}$
Querkontraktionszahl ν	1
Massenstrom	kg/s

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{13}.

Geg.: λ, μ, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}$ **(1 Punkt)**

3. Gewinnen Sie mit dem Ansatz $w(x, y, t) = \cos\alpha x \cos\beta y \cos\omega t$ aus der Schwingungsdifferentialgleichung der Membran $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\Delta w = 0$ eine Beziehung für ω als Funktion von α, β und c! Hinweis: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist der Laplace-Operator. **(2 Punkte)**

$$\omega^2 = c^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

4. Von welchen Größen hängen die Eigenfrequenzen einer transversalschwingenden vorgespannten Gitarrensaite ab?

- [x] Länge l der Saite
- [x] Massenbelag μ
- [x] Spannkraft S der Saite

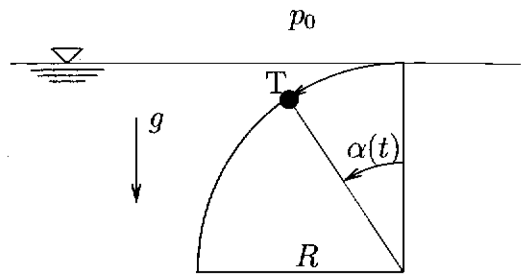
Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

(1 Punkt)

5. Ein Taucher T bewegt sich sehr langsam auf einer Viertelkreisbahn im Wasser, so dass $\alpha(t) = ct$ mit c =const. Bestimmen Sie $p(t)$.

   $p(t) = p_0 + \rho g R(1 - \cos(ct))$

   Geg. $p_0, R, c, g, \alpha(t) = ct, \rho$



(1 Punkt)

6. Wie groß ist die Auftriebskraft eines Heliumballons mit einem Volumen von $V = 4000\text{m}^3$ während er durch Luft fliegt?
   ($g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\rho_{\text{Luft}} \approx 1{,}25\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho_{\text{He}} \approx 0{,}15\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

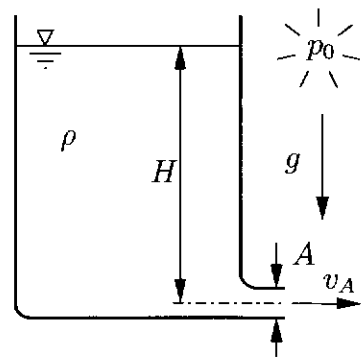
   $F_A = V \rho_{Luft}\, g = 50\,kN$

(1 Punkt)

7. Ein Behälter ist mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt. Berechnen Sie unter der Annahme eines konstanten Pegelstands die Ausflußgeschwindigkeit v_A!

   Geg.: ρ, g, p_0, H, Austrittsquerschnitt A

   $v_A = \sqrt{2gH}$



(1 Punkt)

8. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck nach der Summenkonvention. δ ist das Kroneckersymbol, also $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und sonst Null.

$$\delta_{2i} A_{ki} \delta_{k3} = \boxed{A_{32}}$$

(1 Punkt)