Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

1. Klausur Kontinuumsmechanik WS 2010/11

Bitte deutlich in DRUCKSCHRIFT schreiben!

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

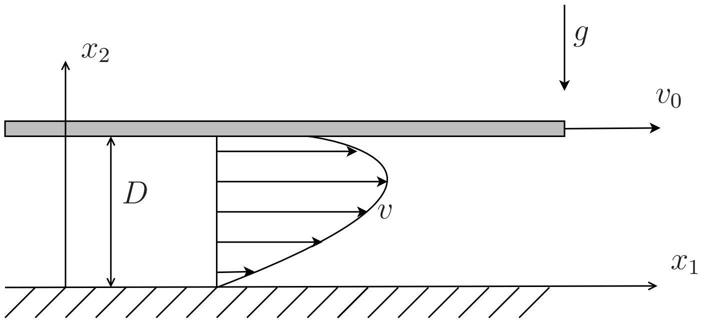
Studiengang:

Bitte ankreuzen!

◯ Studienbegleitende Prüfung ◯ Übungsscheinklausur

1 (15 Punkte)

Zwischen zwei planparallelen, unendlich ausgedehnten Platten (Tiefe der Platten t, Abstand D)strömt ein inkompressibles Navier-Stokes-Fluid (die Viskositäten sollen bekannt sein) der Dichte ρ. Die obere Platte bewegt sich dabei mit der Geschwindigkeit v_0. Weiterhin ist in Strömungsrichtung ein konstantes Druckgefälle p' vorhanden. Es soll von einem stationären, laminaren Strömungszustand ausgegangen werden. Zusätzlich soll angenommen werden, dass das Geschwindigkeitsprofil nicht von der Tiefe abhängt.



(a) Stellen Sie die lokale Impulsbilanz allgemein auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Gehen Sie dazu von einer stationären Strömung aus.

(b) Spezialisieren Sie die Impulsbilanz für ein Navier-Stokes-Fluid.

(c) Formulieren Sie für die Geschwindigkeit einen semiinversen Ansatz und begründen Sie diesen. Benutzen Sie diesen, um die Impulsbilanz weiter zu vereinfachen.

(d) Bestimmen Sie nun den Geschwindigkeitsverlauf und geben Sie diesen ausschliesslich in Abhängigkeit der gegebenen Größen an.

(e) An welcher Stelle x_2 verschwindet die Schubspannung σ_{21}?

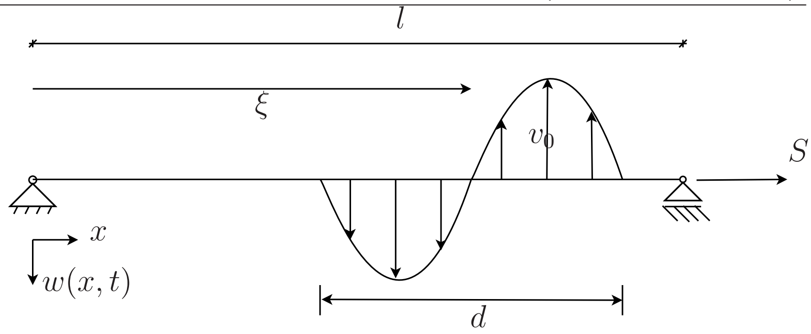
(f) Berechnen Sie den Volumenstrom Q des Fluids.

Geg.: t, D, g, v_0, p', μ

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2 (14 Punkte)

Betrachtet wird eine eingespannte Klaviersaite der Länge l, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c. Die Saite werde an der Stelle ξ vom Hammer der Breite d getroffen. Die Saite werde dabei initial nicht ausgelenkt (AB 1) und genüge zum Anfangszeitpunkt der skizzierten Geschwindigkeitsverteilung (AB 2):



$$w(x,t=0) = 0 \quad \forall x \qquad \text{(AB 1)}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = \begin{cases} v_0 \sin\frac{2\pi(x-\xi)}{d} & \text{für } \xi-\frac{d}{2} \le x \le \xi+\frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(AB 2)}$$

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung und von welchen Größen hängt die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ab?

(b) Zeige mit dem Produktansatz nach Bernoulli, daß die Lösung des Randwertproblems durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k \sin\frac{k\,\pi\,c\,t}{l} + B_k \cos\frac{k\,\pi\,c\,t}{l}\Big)\sin\frac{k\,\pi\,x}{l}.$$

Verdeutliche dabei insbesondere, wie die Konstanten A_k und B_k zustande kommen.

(c) Werte nun auch die Anfangsbedingungen aus, und zeige unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen, dass die Funktion

$$w(x,t) = \frac{2\,v_0\,d}{\pi^2\,c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\cos\frac{k\,\pi\,\xi}{l}\,\sin\frac{k\,\pi\,d}{2l}}{1-\left(\frac{kd}{2l}\right)^2}\sin\frac{k\,\pi\,x}{l}\,\sin\frac{k\,\pi\,c\,t}{l}$$

die Lösung des gegebenen Anfangsrandwertproblems ist.

Hinweis zur Lösung:

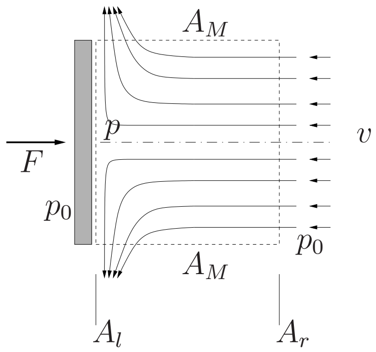
$$\int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}} \sin\frac{2\pi(x-\xi)}{d}\,\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{4dl^2}{\pi(4l^2-d^2k^2)}\sin\frac{k\pi d}{2l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}$$

Die Orthogonalitätsrelation besagt, dass

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\,\sin\frac{j\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0 & \text{, für } k \neq j \\ \frac{l}{2} & \text{, für } k = j \end{cases} \qquad (1)$$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 (11 Punkte)



Eine starre Platte der Fläche A wird bei Windstille aus dem Fenster eines mit konstanter Geschwindigkeit v fahrenden Autos gehalten. Berechnen Sie die Kraft, die aufgebracht werden muß, um die Platte im Gleichgewicht zu halten. Schubspannungen dürfen vernachlässigt werden.

Hinweis zur Lösung: Gravitation soll hier vernachlässigt werden.

(a) Stellen Sie die lokale Impulsbilanz auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Gehen Sie dazu von einer stationären Strömung aus.

(b) Integrieren Sie nun über das in der Aufgabenstellung eingezeichnete Kontrollvolumen. Verwenden Sie den Satz von Gauß, um von dem Volumenintegral auf ein Flächenintegral überzugehen. Für den Spannungstensor soll ein reiner Druckzustand angenommen werden.

(c) Berechnen Sie nun den Druck an der angeströmten Seite der Platte. Gehen Sie dazu von einer parallelen Anströmung über A_r und einer rein parallel zur Platte verlaufenden Strömung in A_l aus. An der oberen und unteren Seite des Kontrollvolumens sollen auch parallel zur Platte verlaufende Strömungsverhältnisse angenommen werden. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte an, insbesondere die auftretenden Normalenvektoren der Flächen. Zeigen Sie auch, dass die Auswertung der Impulsbilanz in x_2- und x_3-Richtung nur triviale Gleichungen liefert.

(d) Berechnen Sie nun durch ein Kräftegleichgewicht an der Platte die Kraft F, die aufgebracht werden muß, um die Platte im Gleichgewicht zu halten.

Geg.: ϱ, v, p_0, A

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s und N an:

Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$	
Dehnrate $\dot{\epsilon}$	
Massenbelegung einer Saite μ	
Impuls $\underline{p}$	

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{11}.

Geg.: λ, μ, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

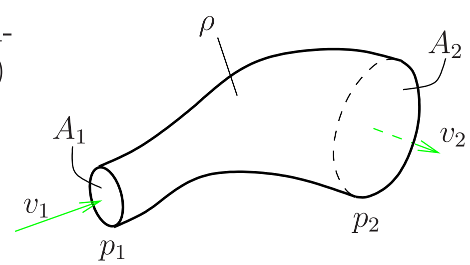
(1 Punkt)

3. Formulieren Sie die Massenbilanz für ein geschlossenes System.

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} =$

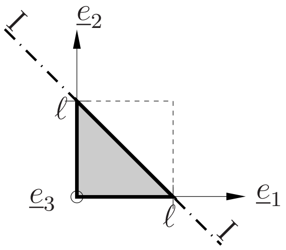
(1 Punkt)

4. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für Anfangs- und Endquerschnitt der skizzierten Stromröhre? (konstante Dichte ρ)



(1 Punkt)

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

5. 

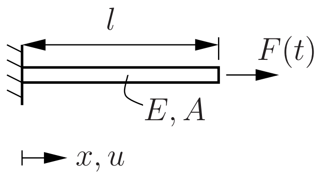
Gegeben ist der 3-dimensionale Spannungszustand eines Würfels. Berechnen Sie den Spannungsvektor am Schnitt I-I gemäß der Cauchyschen-Tetraedergleichung.

Geg.: ℓ, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

Hinweis: $\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

(1 Punkt)

6. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Stab auf die feste Einspannung am Stabende zu. Was für eine Spannung tritt am eingespannten Ende des Stabes auf? Kreuzen Sie das richtige Ergebniss an.



( ) An der Einspannung muss $u(x=0,t)=0\,,\ \forall t$ gelten, d.h. keine Spannung.

( ) Einspannung ermöglicht keine axiale Bewegung, d.h. maximale Spannung.

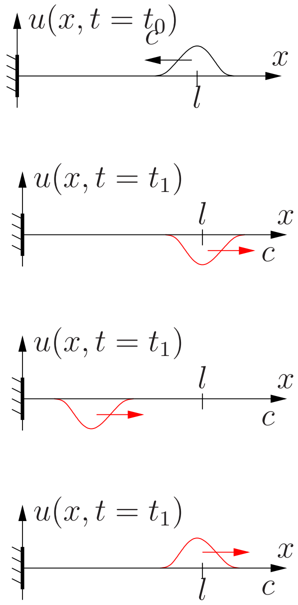
( ) Die Spannung ist $\forall t$ konstant.

( ) Keine der obigen Antworten ist richtig.

(1 Punkt)

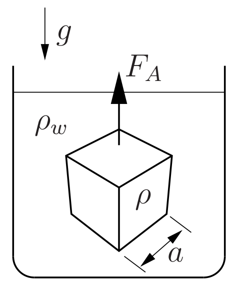
Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

7. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Dehnstab auf die feste Einspannung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Welches der Diagramme bekennzeichnet die Verschiebung $u(x, t = t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$?



(1 Punkt)

8. Ein Würfel mit der Dichte ρ und der Kantenlänge a ist auf der Spitze stehend vollständig in Wasser (Dichte ρ_w, Volumen V_w) untergetaucht. Wie groß ist die Auftriebskraft des Würfels?

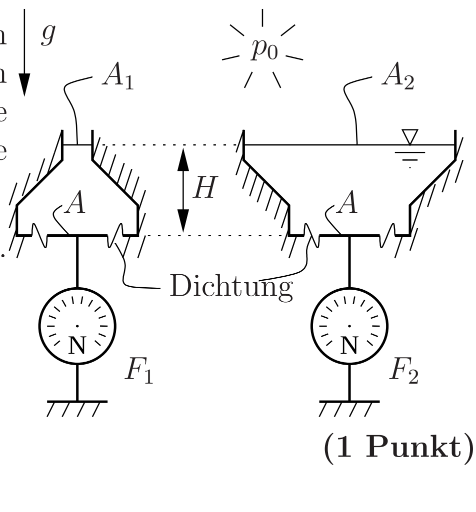


(1 Punkt)

9. Die zwei skizzierten Gefäße sind mit Wasser gefüllt. Mit den Meßdosen wird die resultierende Kraft auf den Gefäßboden gemessen. Beide Gefäßböden haben die gleiche Grundfläche A. Berechnen Sie die von den Meßdosen angezeigten Kräfte F_1 und F_2!

Geg.: A, g, p_0, H, Wasserdichte ρ, Wasseroberflächen A_1 bzw. A_2 (Ohne Wasser zeigen beide Meßdosen Null an.)

$F_1 =$ $\qquad\qquad$ $F_2 =$



(1 Punkt)

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin