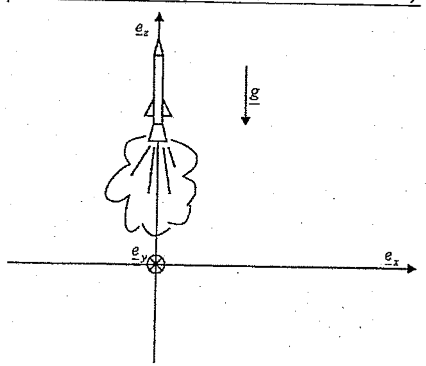
3 (14 Punkte)

Wir betrachten eine Rakete, die sich durch ein Vakuum bewegt, aus kontinuumsmechanischer Sicht. Die Masse der Rakete ändert sich, weil Treibstoff mit der Rate μ verbrannt und mit der konstanten Relativgeschwindigkeit $\underline{v}_r$ ausgestoßen wird. Zum Zeitpunkt t_0 hat die mit Treibstoff gefüllte Rakete die Masse m_0. Die wirkende Volumenkraft soll die des erdnahen Schwerefeldes sein: $f_i = (0, 0, -g)$ Geben Sie alle während ihrer Rechnung verwendeten Annahmen an und begründen Sie diese.
Hinweis:

$$\underline{v}_{\mathrm{Gas}} = \underline{v}_{\mathrm{Rak}} + \underline{v}_r$$



(a) Im folgenden soll ein materielles Kontrollvolumen zur Analyse verwendet werden. Wodurch zeichnet sich ein materielles Kontrollvolumen aus? Skizzieren Sie in der obigen Zeichnung ein mögliches materielles Kontrollvolumen.

(b) Starten Sie von der Impulsbilanz in lokaler Form:

$$\varrho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i.$$

Integrieren Sie diese unter Verwendung geeigneter Annahmen über das Kontrollvolumen und zeigen Sie, daß gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_{\mathrm{Rak}}+V_{\mathrm{Gas}}(t)} \varrho v_i \mathrm{d}V = -m_0 g\underline{e}_z.$$

(c) Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_{\mathrm{Rak}}(t)\underline{v}(t)] + \mu(\underline{v}+\underline{v}_r) = -m_{\mathrm{Rak}}(t) g\underline{e}_z$$

schreiben läßt. Erinnere dazu, daß sich der Gesamtimpuls des Gases auch schreiben läßt als

$$\int_{V_{\mathrm{Gas}}(t)} \varrho\underline{v}\mathrm{d}V = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \mu(\tau)(\underline{v}(\tau) - \underline{v}_r)\mathrm{d}\tau.$$

(d) Berechnen Sie daraus die Beschleunigung der Rakete zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Geben Sie die Beschleunigung zunächst in Abhängigkeit eines zeitabhängigen μ an. Spezialisieren Sie dann auf ein konstantes μ.

Geg.: μ, $\underline{v}_r$, m_0, t_0, g

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s und N an:

Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$	$\cancel{\frac{kg}{s^2 m^2}}$
Dehnrate $\dot{\epsilon}$	s^{-1}
Komponente der Steifigkeitsmatrix C_{1122}	$\cancel{\frac{kg}{m \cdot s^2}}$
Impuls $\vec{p}$	$\cancel{\frac{kg \cdot m}{s}}$

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{11}.

Geg.: λ, μ, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

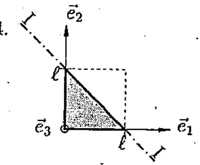
(1 Punkt)

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}$$

3. Formulieren Sie die Massenbilanz für ein geschlossenes System.

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = 0$

(1 Punkt)

4. 

Gegeben ist der 3-dimensionale Spannungszustand eines Würfels. Berechnen Sie den Spannungsvektor am Schnitt I-I gemäß der Cauchy-Tetraedergleichung.

Geg.: ℓ, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

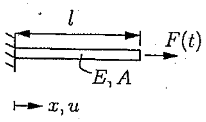
Hinweis: $\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

(1 Punkt)

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{12} \\ \sigma_{12} + \sigma_{22} \\ \sigma_{31} + \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

5. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Stab auf die feste Einspannung am Stabende zu. Was für eine Spannung tritt am eingespannten Ende des
Stabes auf? Kreuzen Sie das richtige Ergebniss an.



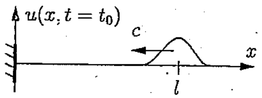
( ) An der Einspannung muss $u(x = 0, t) = 0$, $\forall t$ gelten, d.h. keine Spannung.

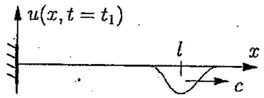
(x) Einspannung ermöglicht keine axiale Bewegung, d.h. maximale Spannung.

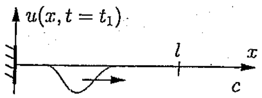
( ) Die Spannung ist $\forall t$ konstant.

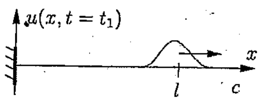
(1 Punkt)

6. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Dehnstab auf die feste Einspannung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$.
Welches der Diagramme bekennzeichnet die Verschiebung $u(x, t = t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$?

[ ] 

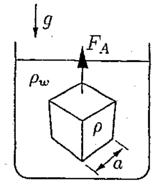
[x] 

[ ] 

[ ] 

(1 Punkt)

7. Ein Würfel mit der Dichte ρ und der Kantenlänge a ist auf der Spitze stehend vollständig in Wasser (Dichte ρ_w, Volumen V_w) untergetaucht.
Wie groß ist die Auftriebskraft des Würfels?



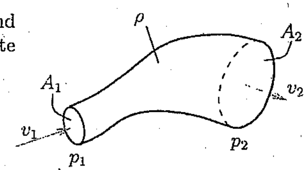
$F_A = \rho_w g a^3$

(1 Punkt)

8. Wie groß ist der (Orts-) Luftdruck auf dem Gipfel eines 800m hohen Berges, wenn für die Region ein Luftdruck von 1 bar (bezogen auf Meeresniveau) im Wetterbericht angesagt wurde? Verwenden Sie die hydrostatische Druckformel.
(Die Luftdichte kann mit $\rho_0 = 1,25\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und die Erdbeschleunigung mit $g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ abgeschätzt werden, Isothermie ist vorausgesetzt.) **(1 Punkt)**

$p = 0,9$ bar

9. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für Anfangs- und Endquerschnitt der skizzierten Stromröhre? (konstante Dichte ρ)



$v_1 A_1 = v_2 A_2$

(1 Punkt)

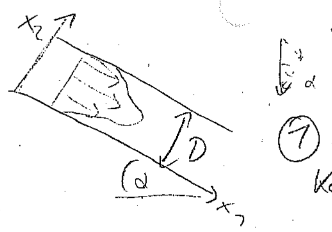
1. Konti Klausur

1

a) $\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i$

$\rho \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{=0} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i$

$=0$ 1 stationär



1 für ein Koordinaten-system

b) N-S-Fluid: $\sigma_{ji} = -p\,\delta_{ij} + \lambda \underbrace{\frac{\partial v_k}{\partial x_k}}_{=0,\ \text{inkomp.}} \delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ 1

IB:

1 $\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \rho\,\underbrace{(g\sin\alpha, -g\cos\alpha, 0)}$

mit Volumenkraft

Seminverse Ansatz:

c) $\underline{v} = (v_1(x_2), 0, 0)$ 1

Begründung: - laminar
- keine Strömungsanregung in x_3 Richtung

$\Rightarrow$

$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ 1

$\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$ 1

Auswertung Komponentenweise:

$i=1$: $-\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_1}}_{=0} + \frac{d^2 v_1}{dx_2^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin\alpha$ 1

$i=2$: $-\frac{\partial p}{\partial x_2} = -g\cos(\alpha)$

$i=3$: $-\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow p = p(x_2)$

Integration:

$v_1 = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha)\, x_2^2 + C_1 x_2 + C_2$ 1

RBs: $v_1(x_2 = 0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$v_1(x_2 = D) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g}{2\mu} \sin(\alpha)\, D$

2 × Const 1

$\Rightarrow$

$v_1(x_2) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin\alpha \left(x_2^2 - x_2 D\right)$. 1

e) $Q = \int_A v_1\, dA$, $dA = t\, dx_2$ 1

$= t \cdot \int_0^D v_1\, dx_2$

$= t \cdot \left[-\frac{\rho g}{2\mu} \sin\alpha \left(\frac{1}{3} x_2^3 - \frac{x_2^2 D}{2}\right)\right]_0^D$

$= t \cdot \left[-\frac{\rho g}{2\mu} \sin\alpha \left(\frac{1}{3} D^3 - \frac{D^3}{2}\right)\right] = t \cdot \frac{\rho g}{2\mu} \sin\alpha\, \frac{D^3}{6}$ 1

2/

a) $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad 1$$

b) $$w(x,t) = X(x)\,T(t) \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} T(t) &= A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \\ X(x) &= B_1 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B_2 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \end{aligned}\right\} \quad 1$$

geometrische RBs:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 0 \quad 1$$

$$w(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 \sin\left(\frac{\omega}{c} l\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c} l = k\pi \quad 1$$

$k = 1,2,3,4 \ldots \infty$

Alles einsetzen:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\tilde{A}_k}_{\tilde{A}_k = A_1 \cdot B_k} \sin\left(\frac{k\pi c t}{l}\right) + \underbrace{\tilde{B}_k}_{\tilde{B}_k = A_2 \cdot B_k} \cos\left(\frac{k\pi c t}{l}\right)\right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

neue Konst.

$\tilde{A}_k = A_1 \cdot B_k$. $\tilde{B}_k = A_2 \cdot B_k$ 1 mit Erläuterung d. neuen Konstanten

c) ABs:

$$w(x,0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad \tilde{B}_k = 0 \quad 1$$

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \sin\left(\frac{k\pi c t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{k\pi c}{l} \cos\left(\frac{k\pi c t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad 1$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \overset{1}{=} \text{bekannte Anfangsgeschwindigkeit}$$

- Multiplikation mit $\sin \frac{j\pi x}{l}$ 1
- Integration über l

$$\int_0^l \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} \sin \frac{j\pi x}{l}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{k\pi c}{l} \underbrace{\int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l}\,dx}_{\text{Orthogonalität: } = \frac{l}{2} \text{ f. } k=j} \quad 1$$

$$\Rightarrow \tilde{A}_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^l \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} \sin \frac{k\pi x}{l}\,dx$$

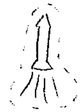
$$= \frac{2}{k\pi c} v_0 \int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}} \cos \frac{\pi(x-\xi)}{d} \sin \frac{k\pi x}{l}\,dx \quad 1$$

$$= \frac{4 d v_0}{k\pi^2 c\left(1-\left(\frac{dk}{l}\right)^2\right)} \cos \frac{k\pi d}{2l} \sin \frac{k\pi \xi}{l}$$

1

a) materielles Volumen $\hat{=}$ die im Volumen enthaltenen Teilchen sind zu jedem Zeitpunkt die selben. 1

mögliche Skizze:



b)

$$\varrho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i$$

$$\underbrace{\int_{V(t)} \varrho \frac{dv_i}{dt} dV}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\int_{V(t)} \varrho f_i \, dV}_{\mathrm{III}}$$

$$\mathrm{I}: \int_{V(t)} \underbrace{\varrho \frac{dv_i}{dt} dV}_{dm} \; 1 = \int_M \frac{dv_i}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_M v_i \, dm \overset{1}{=} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varrho v_i \, dV$$

$$V(t) = V_{Rak} + V_{Gas}(t)$$

$$\mathrm{II}: \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \overset{\text{Gauß } 1}{=} \int_{\partial V} \sigma_{ji} n_j \, dA = \int_{\partial V} t_i \, dA = 0 \quad 1 \text{ da Reibungsfrei}$$

$$\mathrm{III}: \int_{V(t)} \underbrace{\varrho f_i \, dV}_{dm} = -m_0 g \, \underline{e}_z \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_{Rak} + V_G(t)} \varrho \underline{v} \, dV = -m_0 g \, \underline{e}_z$$

c) $$\frac{d}{dt} \int_{V_{Rak}} \varrho \underline{v} \, dV \overset{1}{=} \frac{d}{dt} \underline{v} \int_{V_{Rak}} \varrho \, dV = \frac{d}{dt} \left[m_{Rak}(t) \underline{v}(t) \right] \quad 1$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_G(t)} \varrho \underline{v} \, dV = \frac{d}{dt} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \mu(\tau) \left(\underline{v}(\tau) + \underline{v}_r \right) d\tau \overset{1}{=} \mu(t) \left(\underline{v}(t) + \underline{v}_r \right)$$

$$- m_{Gas}(t) \, g \, e_z$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[m_{Rak}(t) \underline{v}(t) \right] + \mu (\underline{v} + \underline{v}_r) = - m_{Rak}(t) g \underline{e}_z$$

$\downarrow$ 1

d) $$\frac{d m_{Rak}(t)}{dt} \underline{v} + \frac{d\underline{v}}{dt} m_{Rak}(t) + \mu \underline{v} + \mu \underline{v}_r = - m_{Rak}(t) g \underline{e}_z$$

$$\frac{d m_{Rak}(t)}{dt} \overset{1}{=} -\mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\mu \underline{v}_r}{m_{Rak}(t)} - g \underline{e}_z \quad 1$$

$$m_{Rak}(t) \overset{1}{=} m_0 - \int_{t_0}^{t} \mu \, dt \quad (\text{für zeitabh. } \mu)$$

$$= m_0 - \mu (t - t_0) \quad (\text{für zeitunabh. } \mu) \; 1$$