Lösung Kontinuumsmechanik 2. Klausur

1.

a) lokale IB: $\varrho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varrho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i$ 1

Navier-Stokes: $\sigma_{ji} = -p\,\delta_{ji} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ 1

stationär: $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$

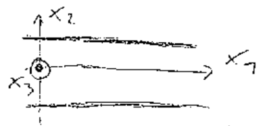
keine Volumenkraft: $\varrho f_i = 0$ 1

einsetzen:

$$\varrho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$$

semiinverser Ansatz:

$v_i = (v_1(x_2), 0, 0)$ 1



1 für KS

$$\Rightarrow \quad v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$ 1

für $i = 1$:

$$0 = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_1}}_{p'} + \mu \frac{d v_1}{d x_2}$$ 1

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{d x_2^2} = \frac{p'}{\mu}$$

$\partial \to d$ weil v nur von x_2 abhängt 1

b) $v\left(x_2 = \pm \frac{D}{2}\right) = 0$ 1

c) 2x integrieren:

$v = \frac{p'}{2\mu} x_2^2 + A x_2 + B$ 1

mit RBs: $A = 0$, $B = -\frac{p'}{\mu}\frac{D^2}{8}$ 1

$$v = \frac{p'}{2\mu} x_2^2 - \frac{p' D^2}{\mu 8}$$

d) Volumenstrom:

$Q = \int_A v_1 \, dA$ $\qquad dA = t\, dx_2$ 1

$$= -\frac{p' t D^2}{2\mu}\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{x_2}{D}\right)^2\right] dx_2$$

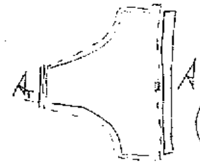
$$= -\frac{p' t D^2}{2\mu}\cdot\frac{1}{6}D = -\frac{p' t}{12\mu} D^3$$ 1

2.

a) IB: $\frac{\partial(\varrho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i$ 1

$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$ 1

$\Rightarrow \frac{\partial(\varrho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij}$ 1



1 für KV

Gauß:

$$\int_{\partial V} \varrho v_i v_j n_j \, dA = -\int_{\partial V} p\, n_i \, dA$$

1 für Integration über KV

1 für $=0$ auf allen anderen Rändern

$$\int_{A_I} \varrho\left[v_0\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right]^2 (-1)\, dA = \overbrace{(-p+p_0)A = -F_H}^{1}$$

aus Normalenvektor

$$\int_{A_I}[\quad]\,dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r=R} -\varrho v_0^2\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{dA}$$

$$= -\varrho v_0^2 \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^4}{4R^2} + \frac{r^6}{6R^4}\right]_0^R d\varphi$$

$$= -\varrho v_0^2 \frac{R^2\pi}{3}$$ 1

$F_H = \frac{1}{3}\varrho v_0^2 R^2 \pi$ 1

b) $\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} \overset{?}{=} \frac{\int v\, dA}{\pi R^2} = \frac{v_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[1-\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right] r\,dr\,d\varphi}{\pi R^2}$

$= \frac{v_0 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R}{R^2\pi} = \frac{v_0}{2}$ 1

c) $C_F = \frac{F_H}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2 \cdot R\pi^2} = \frac{\frac{1}{3}\varrho v_0^2 R^2\pi}{\frac{\varrho}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 \cdot R^2\pi} = \frac{8}{3}$ 1

d) $F_H = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \varrho \bar{u}^2 r\,dr\,d\varphi = \varrho \bar{u}^2 R^2 \pi$ 1

$\Rightarrow C_F = \frac{\varrho \bar{u}^2 R^2\pi}{\frac{\varrho}{2}\bar{u}^2 R^2\pi} = 2$ 1

3.

a) $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (1)

b) RBs: 1. $w(x=0,t) = 0$
2. $w(x=l,t) = 0$ (1) $\Rightarrow C = 0$ (1)
$\Rightarrow D \sin \frac{\omega}{c} l = 0$

$\frac{\omega}{c} l = k\pi$

$\omega_k = k \frac{c}{l} \pi$ (1)

c) $w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \sin \frac{\omega_k}{c} x$ (1)

ABs: 1. $w(x, t=0) = w_A$ (1)

2. $\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{(x,t=0)} = 0$ (1)

aus 1.: $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$

$\Rightarrow A_1 = w_0 \quad , \quad A_k = 0 \quad \forall k \neq 1$ (1)

aus 2.:
$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \omega_k \sin \omega_k t + B_k \omega_k \cos \omega_k t) \sin \frac{\omega_k}{c} x$

$\Rightarrow B_k = 0$ (1) $\Rightarrow w(x,l) = w_0 \cos \frac{c\pi}{l} t \sin \frac{\pi}{l} x$ (1)

d) $w(x,t=0) = f_1(\xi_1 = x - 0t) + f_2(\xi_2 = x + 0t)$

$= w_0 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{l} x\right)$ (1)

$\Rightarrow w(x,t) = w_0 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi(x-ct)}{l} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi(x+ct)}{l}\right)$ (1)

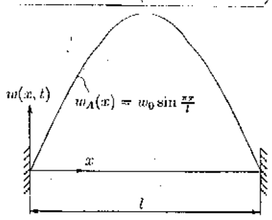
e) $w(x,t) = w_0 \left\{\frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{x}{l} - \pi \frac{ct}{l}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\pi \frac{x}{l} + \pi \frac{ct}{l}\right)\right\}$

$= \frac{1}{2} w_0 \left\{ \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(\pi \frac{ct}{l}\right) - \cos\left(\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(\pi \frac{ct}{l}\right) \right.$
$\left. + \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(\pi \frac{ct}{l}\right) + \cos\left(\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(\pi \frac{ct}{l}\right) \right\}$

$= w_0 \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(\pi \frac{ct}{l}\right)$ (2) nur mit richtiger Herleitung

3 (14 Punkte)

Eine Saite der Länge l wird mit S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ sowohl mit dem Produktansatz von Bernoulli als auch mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Der Ansatz $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ liefert $w(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \cdot (C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x)$. Bestimmen Sie C und die Eigenkreisfrequenzen ω_k durch Anpassung an die Randbedingungen, welche für alle Zeiten gelten.

(c) Die allgemeine Lösung ist eine unendliche Reihe mit noch nicht bestimmten Konstanten A_k und B_k. Bestimmen Sie diese durch Anpassung an die Anfangsbedingungen, welche für alle Orte gelten. Geben Sie die spezielle Lösung an.

(d) D'Alemberts Koordinatenwechsel von (x,t) auf $(\xi_1 = x - ct, \xi_2 = x + ct)$ liefert, dass w sich aus zwei Anteilen additiv zusammensetzt, nämlich $w(x,t) = f_1(\xi_1(x,t)) + f_2(\xi_2(x,t))$. Man erhält für die gegebenen Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$: $f_1(\xi_1(x, t=0)) = f_2(\xi_2(x, t=0)) = \frac{1}{2} w_A(x)$. Geben Sie davon ausgehend die Lösung für beliebige Zeiten t an, also $w(x,t)$.

(e) Benutzen die das Theorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$. Stellen Sie damit w als Produkt dar, nämlich als $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Geg.: S, μ, l, $c^2 = \frac{S}{\mu}$

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m, s, N und J an:

Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{1}{s}$
Volumenviskosität λ	$\frac{Ns}{m^2}$
Querkontraktionszahl ν	1
Massenstrom	$\frac{kg}{s}$

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{11}.

Geg.: λ, μ, $\vec{\vec{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\qquad \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$ **(1 Punkt)**

3. Gewinnen Sie mit dem Ansatz $w(x,y,t) = \cos \alpha x \cos \beta y \cos \omega t$ aus der Schwingungsdifferentialgleichung der Membran $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \Delta w = 0$ eine Beziehung für ω als Funktion von α, β und c!
Hinweis: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist der Laplace-Operator. **(2 Punkte)**

$$-(\alpha^2 + \beta^2) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

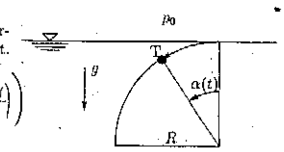
$$\omega = \pm c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

4. Von welchen Größen hängen die Eigenfrequenzen einer transversalschwingenden vorgespannten Gitarrensaite ab?

- [x] Länge l der Saite
- [x] Massenbelag μ
- [x] Spannkraft S der Saite

(1 Punkt)

5. Ein Taucher T bewegt sich sehr langsam auf einer Viertelkreisbahn im Wasser, so dass $\alpha(t) = ct$ mit c =const. Bestimmen Sie $p(t)$.



$p(t) = p_0 + \rho g R(1 - \cos(ct))$

Geg. p_0, R, c, g, $\alpha(t) = ct$, ρ

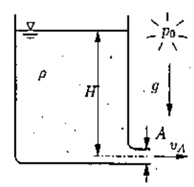
(1 Punkt)

6. Wie groß ist die Auftriebskraft eines Heliumballons mit einem Volumen von $V = 4000 \mathrm{m}^3$ während er durch Luft fliegt?
($g \approx 10 \frac{m}{s^2}$, $\rho_{Luft} \approx 1{,}25 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{He} \approx 0{,}15 \frac{kg}{m^3}$)

$F_A = \rho_{Luft} V g = 50 \, kN$ **(1 Punkt)**

7. Ein Behälter ist mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt. Berechnen Sie unter der Annahme eines konstanten Pegelstands die Ausflußgeschwindigkeit v_A!

Geg.: ρ, g, p_0, H, Austrittsquerschnitt A



$v_A = \sqrt{2gH}$

(1 Punkt)

8. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck nach der Summenkonvention. δ ist das Kroneckersymbol, also $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und sonst Null.

$\delta_{2i} A_{ki} \delta_{k3} = \boxed{A_{32}}$

(1 Punkt)