Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2. Klausur Kontinuumsmechanik WS 2010/2011, 31.3.2011

Bitte deutlich in <u>DRUCKSCHRIFT</u> schreiben!

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

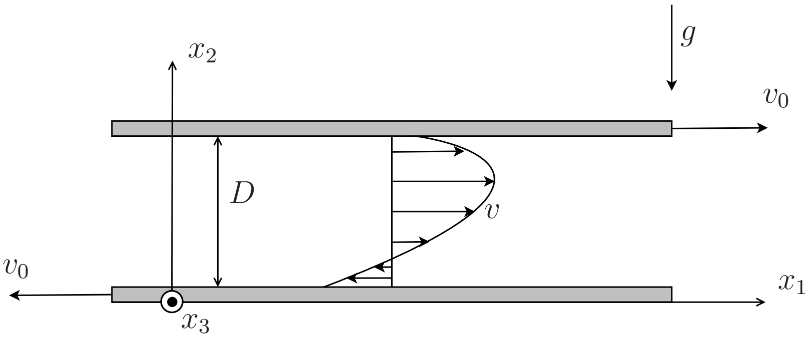
Studiengang:

Bitte ankreuzen!

◯ Studienbegleitende Prüfung ◯ Übungsscheinklausur

1 (13 Punkte)

Zwischen zwei planparallelen, unendlich ausgedehnten Platten (Tiefe der Platten t, Abstand D) strömt ein inkompressibles Navier-Stokes-Fluid (die Viskositäten sollen bekannt sein) der Dichte ρ. Die obere Platte bewegt sich dabei mit der Geschwindigkeit v_0 nach rechts, die untere Platte mit der Geschwindigkeit v_0 nach links. Weiterhin ist in Strömungsrichtung



ein konstantes Druckgefälle p' vorhanden. Es soll von einem stationären, laminaren Strömungszustand ausgegangen werden. Zusätzlich soll angenommen werden, dass das Geschwindigkeitsprofil nicht von der Tiefe x_3 abhängt.

(a) Stellen Sie die lokale Impulsbilanz allgemein auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Gehen Sie dazu von einer stationären Strömung aus.

(b) Spezialisieren Sie die Impulsbilanz für ein Navier-Stokes-Fluid.

(c) Formulieren Sie für die Geschwindigkeit einen semiinversen Ansatz und begründen Sie diesen. Benutzen Sie diesen, um die Impulsbilanz weiter zu vereinfachen.

(d) Bestimmen Sie nun den Geschwindigkeitsverlauf und geben Sie diesen ausschliesslich in Abhängigkeit der gegebenen Größen an. Berechnen Sie außerdem $p(x_2)$ an der Stelle $x_1 = 0$ mit $p(x_1 = 0, x_2 = 0) = p_0$.

(e) Wie muss das Verhältniss von p' und v_0 gewählt werden, damit an der Stelle $x_2 = D$ die Schubspannung σ_{21} verschwindet?

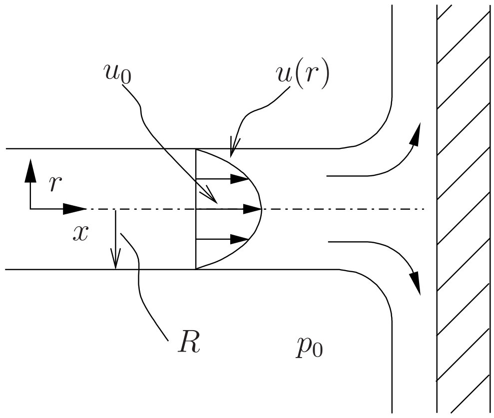
(f) Berechnen Sie den Volumenstrom Q des Fluids. Wie muss das Verhältniss von p' und v_0 gewählt werden, sodaß der Volumenstrom zu Null wird?

Geg.: t, D, g, v_0, p', p_0, μ

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2 (13 Punkte)

Ein Wasserstrahl (Dichte ρ), der ein Geschwindigkeitsprofil $u/u_0 = 1 - (r/R)^2$ besitzt, tritt aus einem kreisförmigen Rohr (Radius R) ins Freie und trifft stromabwärts von der Rohrmündung auf eine senkrecht zum Strahl gestellte ebene Platte (vgl. nebenstehende Skizze). Es herrscht der Umgebungsdruck p_0.



(a) Wie groß ist die auf die Platte wirkende Strahlkraft F ? Das Ergebnis ist in der Form $F = f_1(\rho, u_0, R)$ anzugeben. Gehen Sie bei der Berechnung von der lokalen Impulsbilanz aus, wählen sich ein geeignetes Kontrollvolumen und machen dieses deutlich in der Aufgabenskizze kenntlich. Machen Sie bei der Auswertung alle Zwischenschritte deutlich (Welche Terme sind Null? Welche heben sich gegenseitig auf und warum? Normalenvektoren auf der Oberfläche des Kontrollvolumens?). Hinweise: Es handelt sich um einen stationären Zustand. Der Spannungszustand im Fluid kann als rein hydrostatischer Druck angenommen werden. Der Einfluss der Schwerkraft ist zu vernachlässigen. Des weiteren soll angenommen werden, das in großem Abstand zum Plattenmittelpunkt die Strömungs rein parallel zur Platte verläuft.

(b) Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit im Rohr $\bar{u} = Q/\pi R^2 = f_2(u_0)$?

(c) Die unter a) berechnete Strahlkraft F ist in der dimensionslosen Form $c_F = F/\left(\frac{\rho}{2}\bar{u}^2\pi R^2\right)$ anzugeben.

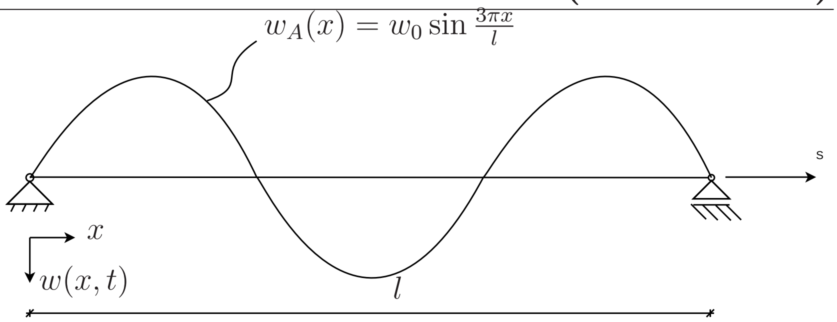
(d) Wie groß ist der dimensionslose Beiwert c_F für den Fall einer reibungslosen Rohrströmung mit der über den Rohrquerschnitt konstanten Geschwindigkeit $\bar{u}$? Vergleichen Sie die Ergebnisse aus c) und aus d).

Geg.: u_0, R, A, ρ

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

3 (14 Punkte)

Eine Saite der Länge l wird mit S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x) = w_0 \sin \frac{3\pi x}{l}$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ sowohl mit dem Produktansatz von Bernoulli als auch mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Zeigen Sie, daß der Ansatz $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ die allgemeine Lösung $w(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \cdot (C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x)$ liefert. Bestimmen Sie C und die Eigenkreisfrequenzen ω_k durch Anpassung an die Randbedingungen, welche für alle Zeiten gelten.

(c) Die allgemeine Lösung ist eine unendliche Reihe mit noch nicht bestimmten Konstanten A_k und B_k. Bestimmen Sie diese durch Anpassung an die Anfangsbedingungen, welche für alle Orte gelten. Geben Sie die spezielle Lösung an.

(d) D'Alemberts Koordinatenwechsel von (x,t) auf $(\xi_1 = x - ct, \xi_2 = x + ct)$ liefert, dass w sich aus zwei Anteilen additiv zusammensetzt, nämlich $w(x,t) = f_1(\xi_1(x,t)) + f_2(\xi_2(x,t))$. Man erhält für die gegebenen Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$: $f_1(\xi_1(x,t=0)) = f_2(\xi_2(x,t=0)) = \frac{1}{2} w_A(x)$. Geben Sie davon ausgehend die Lösung für beliebige Zeiten t an, also $w(x,t)$.

(e) Benutzen die das Theorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$. Stellen Sie damit w als Produkt dar, nämlich als $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

Geg.: S, μ, l, $c^2 = \frac{S}{\mu}$

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s , N und J an:

Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial v}{\partial x}$	
Volumenviskosität λ	
Querkontraktionszahl ν	
Massenstrom	

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{13}.

Geg.: λ, μ, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$ $\qquad \sigma_{13} =$ **(1 Punkt)**

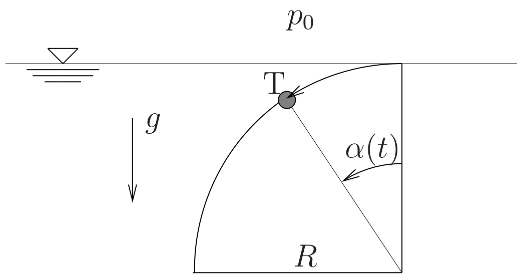
3. Gewinnen Sie mit dem Ansatz $w(x, y, t) = \cos\alpha x \cos\beta y \cos\omega t$ aus der Schwingungsdifferentialgleichung der Membran $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\Delta w = 0$ eine Beziehung für ω als Funktion von α, β und c!
Hinweis: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist der Laplace-Operator. **(2 Punkte)**

4. Von welchen Größen hängen die Eigenfrequenzen einer transversalschwingenden vorgespannten Gitarrensaite ab?
   - ☐ Länge l der Saite
   - ☐ Massenbelag μ
   - ☐ Spannkraft S der Saite

Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

(1 Punkt)

5. Ein Taucher T bewegt sich sehr langsam auf einer Viertelkreisbahn im Wasser, so dass $\alpha(t) = ct$ mit $c =$const. Bestimmen Sie $p(t)$.



$$p(t) =$$

Geg. $p_0, R, c, g, \alpha(t) = ct, \rho$

(1 Punkt)

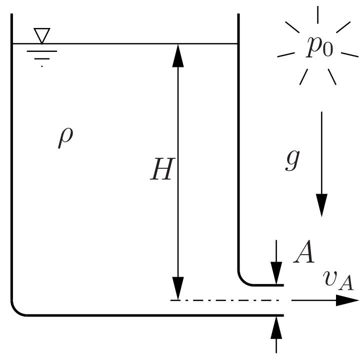
6. Wie groß ist die Auftriebskraft eines Heliumballons mit einem Volumen von $V = 4000\text{m}^3$ während er durch Luft fliegt?
($g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\rho_{\text{Luft}} \approx 1{,}25\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho_{\text{He}} \approx 0{,}15\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

$$F_A =$$

(1 Punkt)

7. Ein Behälter ist mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt. Berechnen Sie unter der Annahme eines konstanten Pegelstands die Ausflußgeschwindigkeit v_A!

Geg.: ρ, g, p_0, H, Austrittsquerschnitt A



(1 Punkt)

8. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck nach der Summenkonvention. δ ist das Kroneckersymbol, also $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und sonst Null.

$$\delta_{2i} A_{ki} \delta_{k3} = \boxed{}$$

(1 Punkt)