Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Klausur zur Kontinuumsmechanik WS 2014/15

Namen in lesbaren Druckbuchstaben angeben!

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit (Unterschrift):

◯ Studienbegleitende Prüfung (Bachelor)
◯ Übungsscheinklausur (ohne Theorieteil)

T	
1	
2	
3	
Σ	

Theorieteil

Hinweis: Eine Theorieaufgabe muss **komplett richtig** beantwortet werden, um den zugehörigen Punkt zu erhalten! Antworten zu Theorieaufgaben auf einem Extrablatt werden ohne gesonderten Hinweis auf das Extrablatt bei den Aufgabenstellungen nicht gewertet!

1. Geben Sie von den folgenden Größen die Einheiten ausgedrückt in den SI-Basiseinheiten: m, kg, s, A, K, mol und cd an. **(1 Punkt)**

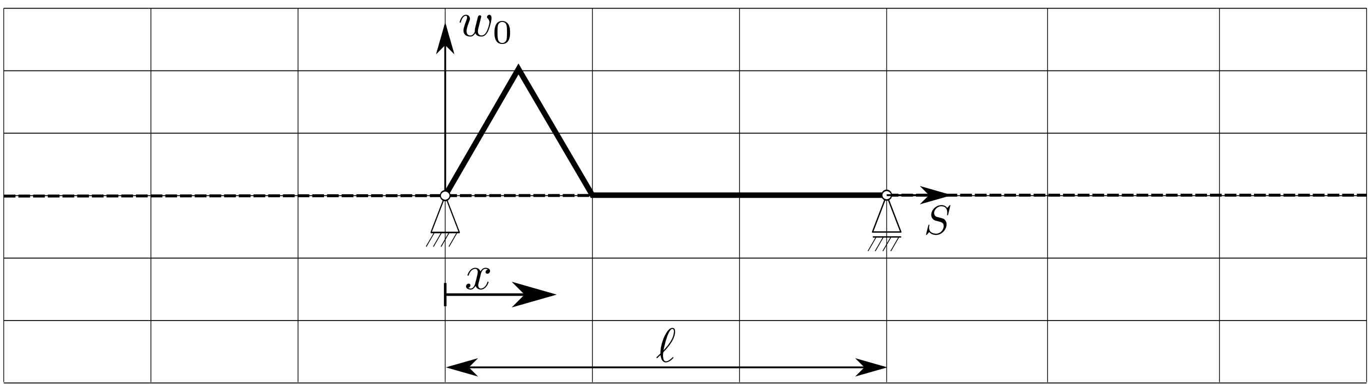
   Lamé-Konstante λ des HOOKEschen Gesetzes ________

   Lamé-Konstante λ des NAVIER-STOKES-Gesetzes ________

   spezifische Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ ________

   Impulsdichte $\rho\boldsymbol{v}$ ________

2. Es sollen Transversalwellen einer beidseitig eingespannten Saite mit $x \in [0, \ell]$, vorgespannt mit einer Kraft S, untersucht werden. Zur Zeit $t = 0$ ist die Saite in Ruhe und erfährt eine Anfangsauslenkung $w_0(x)$, die im Bereich $x \in [0, \ell]$ gezeichnet ist. Die Verschiebung $w(x, t)$ soll mit der Methode von D'ALEMBERT ausgerechnet werden, wofür die Anfangsdaten fortgesetzt werden müssen. Zeichnen Sie die qualitativ richtige Fortsetzung im Bereich $x \in [-\ell, 2\ell]$ in das Diagramm ein. **(1 Punkt)**



3. Kreuzen Sie das korrekte FOURIER-Gesetz für isotrope Werkstoffe an. **(1 Punkt)**

   ☐ $\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T$

   ☐ $\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla \cdot T$

   ☐ $\boldsymbol{q} = -\kappa\nabla \times T$

   ☐ $\boldsymbol{q} = -\alpha(T - T_{\text{ref}})\boldsymbol{n}$

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

4. Kreuzen Sie das korrekte NAVIER-STOKES-Materialgesetz an. **(1 Punkt)**

- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = -\nabla \cdot \nabla p \mathbb{1} + \mu(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$
- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = (-p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v})\mathbb{1} + \mu(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$
- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathbb{1} + \mu(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\mathrm{T}})$
- [ ] $\boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \lambda \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathbb{1} + 2\mu \nabla \boldsymbol{v}$

5. Die Geschwindigkeit c von Longitudinalwellen in einem Balken soll erhöht werden. Kreuzen Sie alle möglichen Maßnahmen an, die dazu führen. **(1 Punkt)**

- [ ] Erhöhung des Flächenträgheitsmomentes I
- [ ] Erhöhung der Querschnittsfläche A
- [ ] Erhöhung der Normalkraft N
- [ ] Erhöhung des Elastizitätsmoduls E
- [ ] Erhöhung der Massendichte ρ
- [ ] Erhöhung der Querkontraktionszahl ν

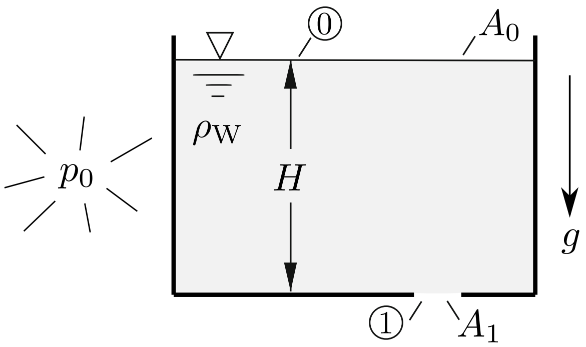
6. Geben Sie die rechte Seite der Massenbilanz eines geschlossenen Systems an: **(1 Punkt)**

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

7. Übertragen Sie die Gleichung des Spannungsdeviators, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\sigma})\mathbb{1}$, in Indexnotation mit kartesischen Komponenten. Gebundene Indizes in dem Ausdruck sind zu **expandieren**! **(1 Punkt)**

$$\Sigma_{ij} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

8. Unter der Annahme eines sehr großen Behälters soll die gegenwärtige Wasser-Ausflussgeschwindigkeit im Punkt 1 bestimmt werden. **(1 Punkt)**

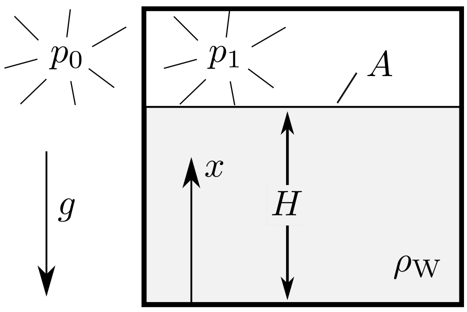


Am Ausfluss 1 ist die Geschwindigkeit:

$$|\boldsymbol{v}| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Geg.: p_0, g, H, A_0, A_1, ρ_W

9. In einem geschlossenem starren Behälter soll der Druck $p_{\mathrm{Innen}}(x)$ an der Innenwand unterhalb der Wasseroberfläche bestimmt werden. **(1 Punkt)**



Geben Sie den Innendruck $p_{\mathrm{Innen}}(x)$ in Abhängigkeit der eingezeichneten Koordinate x unterhalb der Wasseroberfläche an:

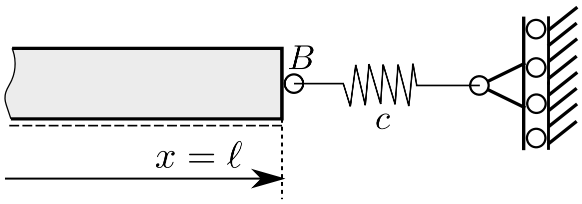
$$p_{\mathrm{Innen}}(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Geg.: p_0, p_1, g, A, H, ρ_W

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Name, Vorname: **Matr.-Nr.:**

10. In einem Balken sollen Transversalwellen untersucht werden. Geben Sie die Randbedingungen für das Lager B an der Stelle $x = \ell$ an, ausgedrückt durch die Verschiebung w. **(1 Punkt)**



Randbedingungen in w für die Berechnung der Transversalwellen:

(RB1): ____________________

(RB2): ____________________

Geg.: ρ, E, I, A, c, ℓ

Rechenteil

1 Stromfadentheorie **(10 Punkte)**

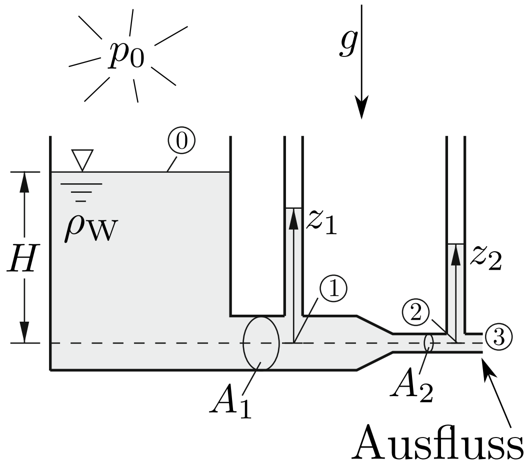
Aus einem **großen** Behälter fließt eine inkompressible reibungsfreie Flüssigkeit durch ein Rohr mit veränderlicher Querschnittsfläche aus.

a) Wie groß sind die Ausflussgeschwindigkeit $v_{③}$ und der Volumenstrom $Q_{③}$ am Ausfluss ③? **(2 Punkte)**

b) Geben Sie die Volumenströme $Q_{①}$, $Q_{②}$ und die Geschwindigkeiten $v_{①}$, $v_{②}$ an den Stellen ① und ② an. **(4 Punkte)**

c) Wie groß sind die Drücke $p_{①}$ und $p_{②}$ an den Stellen ① und ②? **(2 Punkte)**

d) Wie hoch sind die Wasserspiegel in den Steigrohren? Geben Sie die Maße z_1 und z_2 an. *Hinweis*: Verwenden Sie hier die hydrostatische Druckformel. **(2 Punkte)**



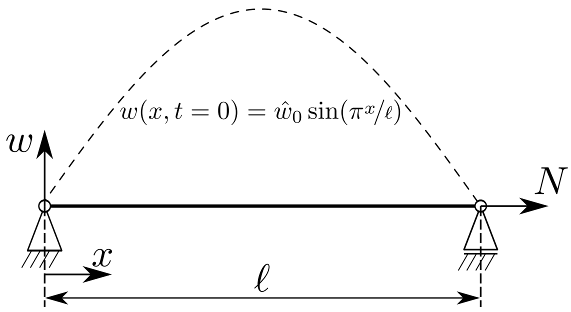
Geg.: p_0, g, H, A_1, A_2, ρ_W

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

2 Transversalwellen einer Saite (20 Punkte)

Eine beidseitig fixierte Saite mit $x \in [0, \ell]$ wird mit der Kraft N vorgespannt und trägt die Masse pro Länge ρA. Für die Saite gilt zur Zeit $t = 0$:

$$w(x, t = 0) = \hat{w}_0 \sin\left(\pi \frac{x}{\ell}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = 0 \ .$$



Es soll die Verschiebung $w(x, t)$ für $x \in [0, \ell]$ und $t \in [0, \infty)$ über den Produktansatz von Bernoulli bestimmt werden.

a) Wie lautet die Differentialgleichung, die dieses Problem beschreibt? Geben Sie ggf. vorkommende Konstanten über gegebene Größen an. **(2 Punkte)**

b) Verwenden Sie für die weitere Berechnung den Produktansatz:

$$w(x, t) = X(x)T(t)$$

und formen Sie die partielle Differentialgleichung derart um, dass zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen entstehen. Lösen Sie diese unter Annahme einer negativen[1] Separationskonstanten: $-\omega^2$, noch ohne Beachtung von Rand- und Anfangsbedingungen. **(5 Punkte)**

Verwenden Sie ab c) die folgenden Lösungsansätze:

$$X(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right) + B \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) \ , \qquad T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$$

c) Geben Sie die Randbedingungen dieses Problems für $w(x, t)$ an. **(2 Punkte)**

d) Setzen Sie die Randbedingungen aus c) in die gegebenen Lösungsansätze ein. Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_k und geben Sie die allgemeine Lösung in der Form:

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

an. Eliminieren Sie dabei die Konstanten aus den Ortsfunktionen. **(4 Punkte)**

Weitere Aufgabenpunkte auf der nächsten Seite...

[1] Eine negative Separationskonstante ist natürlich nur dann anzusetzen, wenn die separierten Terme kein ausdrückliches Minuszeichen beinhalten.

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V – Institut für Mechanik
Fachgebiet für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie
Sekretariat MS 2, Einsteinufer 5, 10587 Berlin

Name, Vorname: **Matr.-Nr.:**

e) Berechnen Sie mit den angepassten Ortsfunktionen die Integrale:

$$\int_{x=0}^{\ell} X_n(x) X_m(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ .$$

Die Amplituden der Ortsfunktionen X_n bzw. X_m dürfen hierbei auf eins normiert sein. **(2 Punkte)**

Tipp: Die folgenden Formeln für $n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ können mit einer geeigneten Variablensubstitution hilfreich sein:

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin(n\varphi)\sin(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos(n\varphi)\cos(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ , & \text{wenn } n = m\ , \\ 0\ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

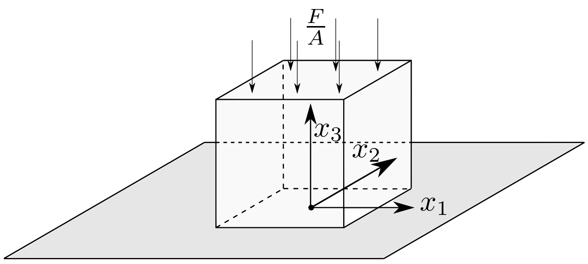
f) Werten Sie nun die Anfangsbedingungen zur Bestimmung aller verbleibenden Konstanten aus. **(4 Punkte)**

g) Geben Sie die Lösung für $w(x,t)$ vollständig in gegebenen Größen an. **(1 Punkt)**

Geg.: $\hat{w}_0$, ρ, A, ℓ, N

3 Elastizitätstheorie **(10 Punkte)**

Gegeben sei ein linear-elastischer homogener isotroper inkompressibler Würfel mit der Kantenlänge a, der auf einem starren Boden aufliegt. Das Koordinatensystem liegt im Flächenmittelpunkt der aufliegenden Fläche und ist parallel wie gezeigt zu den Kanten ausgerichtet. Im Koordinatenursprung ist der Würfel mit dem Tisch punktförmig verschweißt.



Der Kontakt Boden/Würfel darf sonst als ideal reibungsfrei angenommen werden. Von oben drückt eine Spannung F/A zeitlich konstant auf den Würfel, ansonsten gelte außerhalb des Würfels $p = 0$. Gravitation ist nicht gegeben. Gesucht werden die resultierenden statischen Verschiebungen und Spannungen.

a) Schreiben Sie die allgemeine zeitabhängige lokale Impulsbilanz in regulären Punkten auf und spezialisieren Sie diese auf die Beziehung:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

anhand der Aufgabenstellung. Sie können hier in invarianter oder in kartesischer Komponentendarstellung arbeiten. **(1 Punkt)**

b) Geben Sie die Definition des linearen Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ an. Schreiben Sie dann das Hookesche Gesetz für den Spannungstensor, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$, mithilfe der Lame-Konstanten λ und μ auf. Beachten Sie, dass bei inkompressiblen Festkörpern

$$\mathrm{Sp}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ii} = 0 \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

gilt und vereinfachen Sie entsprechend. Sie können auch hier in invarianter oder in kartesischer Komponentendarstellung arbeiten. **(1 Punkt)**

Weitere Aufgabenpunkte auf der nächsten Seite...

c) Setzen Sie das Ergebnis aus b) in die statische Impulsbilanz ein und zeigen Sie die resultierende Feldgleichung für die Verschiebung $\boldsymbol{u}$ auf:

$$\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \; .$$

Auch in diesem Aufgabenteil können Sie in invarianter oder in kartesischer Komponentendarstellung arbeiten. *Hinweis*: Wenden Sie auch hier die Inkompressibilitätsbedingung an. **(1 Punkt)**

d) Geben Sie die drei Randbedingungen für die Verschiebungskomponenten: u_1, u_2 und u_3 bzgl. der gegebenen kartesischen Basis an. **(1 Punkt)**

e) Geben Sie eine Spannungsrandbedingung auf der oberen belasteten Fläche an und bestimmen Sie damit $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3 = a)$. Hierfür kann die Cauchy-Formel für den Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ mit dem Ergebnis aus b) genutzt werden. **(2 Punkte)**

Verwenden Sie ab f) den folgenden semi-inversen Verschiebungsansatz:

$$\boldsymbol{u} = u_1(x_1)\boldsymbol{e}_1 + u_2(x_2)\boldsymbol{e}_2 + u_3(x_3)\boldsymbol{e}_3$$

f) Setzen Sie den *semi-inversen* Ansatz in die Feldgleichung aus c) ein und zeigen Sie, dass:

$$u_1(x_1) = A_1 x_1 + B_1 \; , \quad u_2(x_2) = A_2 x_2 + B_2 \; , \quad u_3(x_3) = A_3 x_3 + B_3 \; .$$

(1 Punkt)

g) Bestimmen Sie nun die A_i und B_i, indem Sie wie folgt vorgehen:

- Werten Sie zunächst die Randbedingungen aus d) und e) aus und bestimmen Sie damit B_1, B_2, B_3 und A_3.
- Benutzen Sie nun die Inkompressibiltätsbedingung $\varepsilon_{kk} = 0$ und die Symmetrieannahme $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, um die übrigen beiden Konstanten A_1 und A_2 zu bestimmmen.

Zeigen Sie damit, dass:

$$u_1(x_1) = \frac{F}{4A\mu} x_1 \; , \quad u_2(x_2) = \frac{F}{4A\mu} x_2 \; , \quad u_3(x_3) = -\frac{F}{2A\mu} x_3 \; .$$

(1 Punkt)

h) Berechnen Sie die Komponenten des Spannungstensors σ_{ij}. **(1 Punkt)**

i) Bewerten Sie den *semi-inversen* Ansatz mithilfe der Ergebnisse aus h). *Tipp*: Untersuchen Sie die x_1- und x_2-Außenränder des Quaders. **(1 Punkt)**

Geg.: F, $A = a^2$, a, λ, μ