Univ. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang H. Müller
Technische Universität Berlin
Fakultät V
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und
Materialtheorie - LKM, Sekr. MS 2
Einsteinufer 5, 10587 Berlin

1. Klausur Kontinuumsmechanik SS 09

Bitte deutlich schreiben!

1	
2	
3	
$\sum$	
T	

Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

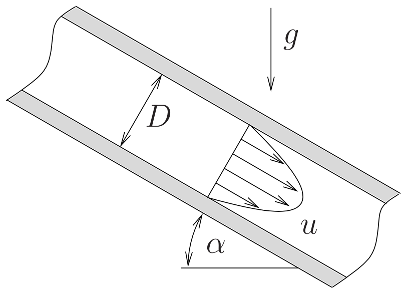
Studiengang:

Bitte links oder rechts ankreuzen!

◯ Studienbegleitende Prüfung ◯ Übungsscheinklausur

1 **(13 Punkte)**

Betrachtet werden zwei planparallele Platten (Tiefe der Platten t, Abstand D, Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen α), durch das ein inkompressibles Navier-Stokes-Fluid (die Viskositäten sollen bekannt sein) der Dichte ρ fließt. Es soll von laminarer Strömung ausgegangen werden. Zusätzlich soll angenommen werden, dass das Geschwindigkeitsprofil nicht von der Tiefe abhängt. Weiterhin soll angenommen werden, dass der Druckgradient in Strömungsrichtung Null ist.



(a) Stellen Sie die lokale Impulsbilanz auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Gehen Sie dazu von einer stationären Strömung aus.

(b) Spezialisieren Sie die Impulsbilanzbilanz für ein Navier-Stokes-Fluid.

(c) Formulieren Sie für die Geschwindigkeit einen semiinversen Ansatz und begründen Sie diesen. Benutzen Sie diesen, um die Impulsbilanz weiter zu vereinfachen.

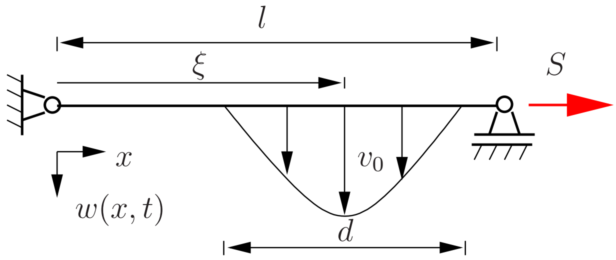
(d) Bestimmen Sie nun den Geschwindigkeitsverlauf und geben Sie diesen ausschliesslich in Abhängigkeit der gegebenen Größen an.

(e) Berechnen Sie den Volumenstrom Q des Fluids.

Geg.: t, α, g

$\boxed{2}$ (13 Punkte)

Betrachtet wird eine eingespannte Klaviersaite der Länge l, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c. Die Saite werde an der Stelle ξ vom Hammer der Breite d getroffen. Die Saite werde dabei initial nicht ausgelenkt (AB 1) und genüge zum Anfangszeitpunkt der skizzierten Geschwindigkeitsverteilung (AB 2):



$$w(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \tag{AB 1}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x,t=0} = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi(x-\xi)}{d} & \text{für } \xi - \frac{d}{2} \leq x \leq \xi + \frac{d}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{AB 2}$$

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?

(b) Zeige mit dem Produktansatz nach Bernoulli, daß die Lösung des Randwertproblems durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin \frac{k\,\pi\,c\,t}{l} + B_k \cos \frac{k\,\pi\,c\,t}{l} \right) \sin \frac{k\,\pi\,x}{l}.$$

(c) Werte nun auch die Anfangsbedingungen aus, und zeige unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen, dass die Funktion

$$w(x, t) = \frac{4\,v_0\,d}{\pi^2\,c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin \frac{k\,\pi\,\xi}{l} \cos \frac{k\,\pi\,d}{2l}}{1 - \left(\frac{kd}{l}\right)^2} \sin \frac{k\,\pi\,x}{l} \sin \frac{k\,\pi\,c\,t}{l}$$

die Lösung des gegebenen Anfangsrandwertproblems ist.

Hinweise zur Lösung:

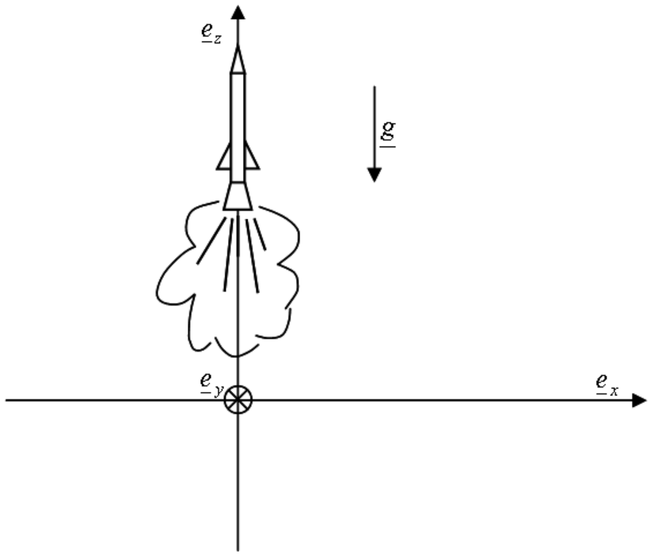
$$\int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x = \frac{l}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\int_{\xi-\frac{d}{2}}^{\xi+\frac{d}{2}} \cos \frac{\pi(x-\xi)}{d} \sin \frac{k\pi x}{l} \mathrm{d}x = \frac{2dl^2}{\pi(l^2 - d^2k^2)} \cos \frac{k\pi d}{2l} \sin \frac{k\pi\xi}{l}$$

$\boxed{3}$ **(14 Punkte)**

Wir betrachten eine Rakete, die sich durch ein Vakuum bewegt, aus kontinuumsmechanischer Sicht. Die Masse der Rakete ändert sich, weil Treibstoff mit der Rate μ verbrannt und mit der konstanten Relativgeschwindigkeit $\underline{v}_r$ ausgestoßen wird. Zum Zeitpunkt t_0 hat die mit Treibstoff gefüllte Rakete die Masse m_0. Die wirkende Volumenkraft soll die des erdnahen Schwerefeldes sein: $f_i = (0, 0, -g)$ Geben Sie alle während ihrer Rechnung verwendeten Annahmen an und begründen Sie diese.
Hinweis:

$$\underline{v}_{\text{Gas}} = \underline{v}_{\text{Rak}} + \underline{v}_r$$



(a) Im folgenden soll ein materielles Kontrollvolumen zur Analyse verwendet werden. Wodurch zeichnet sich ein materielles Kontrollvolumen aus? Skizzieren Sie in der obigen Zeichnung ein mögliches materielles Kontrollvolumen.

(b) Starten Sie von der Impulsbilanz in lokaler Form:

$$\varrho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \varrho f_i.$$

Integrieren Sie diese unter Verwendung geeigneter Annahmen über das Kontrollvolumen und zeigen Sie, daß gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{V_{\text{Rak}}+V_{\text{Gas}}(t)} \varrho v_i \mathrm{d}V = -m_0 g \underline{e}_z.$$

(c) Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_{\text{Rak}}(t)\underline{v}(t)] + \mu(\underline{v} + \underline{v}_r) = -m_{\text{Rak}}(t) g \underline{e}_z$$

schreiben läßt. Erinnere dazu, daß sich der Gesamtimpuls des Gases auch schreiben läßt als

$$\int\limits_{V_{\text{Gas}}(t)} \varrho \underline{v} \mathrm{d}V = \int\limits_{\tau=0}^{\tau=t} \mu(\tau)(\underline{v}(\tau) - \underline{v}_r)\mathrm{d}\tau.$$

(d) Berechnen Sie daraus die Beschleunigung der Rakete zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Geben Sie die Beschleunigung zunächst in Abhängigkeit eines zeitabhängigen μ an. Spezialisieren Sie dann auf ein konstantes μ.

Geg.: μ, $\underline{v}_r$, m_0, t_0, g

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m , s und N an:

Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$	
Dehnrate $\dot{\epsilon}$	
Komponente der Steifigkeitsmatrix C_{1122}	
Impuls $\vec{p}$	

(2 Punkte)

2. Erinnern Sie sich an das Hookesche Gesetz für den 3-dimensionalen Fall. Dieses lautet $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$. Berechnen Sie für den gegebenen Verzerrungstensor die Normalspannung σ_{11}.

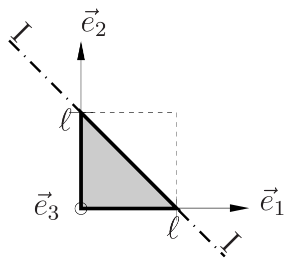
Geg.: λ, μ, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

(1 Punkt)

3. Formulieren Sie die Massenbilanz für ein geschlossenes System.

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} =$

(1 Punkt)

4. 

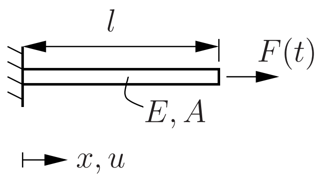
Gegeben ist der 3-dimensionale Spannungszustand eines Würfels. Berechnen Sie den Spannungsvektor am Schnitt I-I gemäß der Cauchy-Tetraedergleichung.

Geg.: ℓ, $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

Hinweis: $\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$

(1 Punkt)

5. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Stab auf die feste Einspannung am Stabende zu. Was für eine Spannung tritt am eingespannten Ende des
Stabes auf? Kreuzen Sie das richtige Ergebniss an.



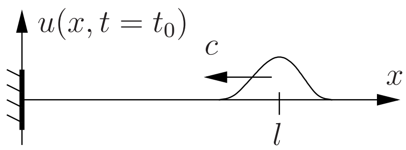
( ) An der Einspannung muss $u(x = 0, t) = 0\,,\ \forall t$ gelten, d.h. keine Spannung.

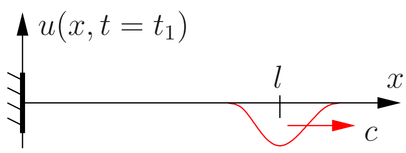
( ) Einspannung ermöglicht keine axiale Bewegung, d.h. maximale Spannung.

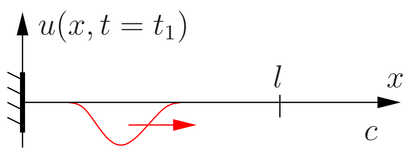
( ) Die Spannung ist $\forall t$ konstant.

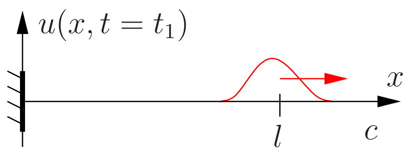
(1 Punkt)

6. Eine Longitudinalwelle läuft in einem Dehnstab auf die feste Einspannung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Welches der Diagramme bekennzeichnet die Verschiebung $u(x, t = t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$?



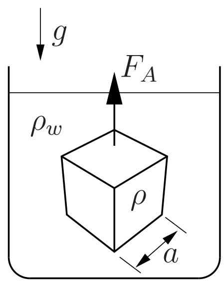






(1 Punkt)

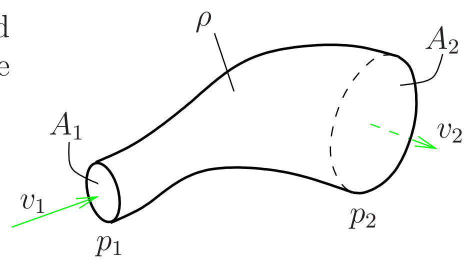
7. Ein Würfel mit der Dichte ρ und der Kantenlänge a ist auf der Spitze stehend vollständig in Wasser (Dichte ρ_w, Volumen V_w) untergetaucht. Wie groß ist die Auftriebskraft des Würfels?



(1 Punkt)

8. Wie groß ist der (Orts-) Luftdruck auf dem Gipfel eines 800m hohen Berges, wenn für die Region ein Luftdruck von 1 bar (bezogen auf Meeresniveau) im Wetterbericht angesagt wurde? Verwenden Sie die hydrostatische Druckformel.
(Die Luftdichte kann mit $\rho_0 = 1,25\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und die Erdbeschleunigung mit $g \approx 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ abgeschätzt werden, Isothermie ist vorausgesetzt.) **(1 Punkt)**

9. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für Anfangs- und Endquerschnitt der skizzierten Stromröhre? (konstante Dichte ρ)



(1 Punkt)