ALBRECHT BERTRAM

AXIOMATISCHE EINFÜHRUNG IN DIE KONTINUUMS-MECHANIK

B·I·
Wissenschaftsverlag
Mannheim/Wien/Zürich

Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik

von
Priv.-Doz. Dr. Albrecht Bertram
Technische Universität Berlin
und
Bundesanstalt für
Materialforschung und -prüfung,
Berlin

B·I·
Wissenschaftsverlag
Mannheim/Wien/Zürich

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bertram, Albrecht:
Axiomatische Einführung in die Kontinuumstechnik / von Albrecht Bertram. – Mannheim: BI-Wiss.-Verl., 1989
ISBN 3-411-14031-3

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier
mit neutralem pH-Wert (bibliotheksfest)

Alle Rechte, auch die der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.
© Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim 1989
Druck: Druckerei Krembel, Speyer
Bindearbeit: Klambt-Druck GmbH, Speyer
Printed in Germany
ISBN 3-411-14031-3

Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt.
Leonardo da Vinci, Tagebuch

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand als Skript zu einer "Mathematischen Einführung in die Kontinuumsmechanik" für Mathematiker und Physiker an der Technischen Universität Berlin. Einen solchen Kurs für diese Zielgruppe zu geben, war aus zwei Gründen reizvoll:

- zum einen war mit einer vertieften Kenntnis mathematischer Denk- und Darstellungsweisen und den daraus resultierenden Ansprüchen zu rechnen;
- wohingegen bezüglich der Kontinuumsmechanik praktisch keine allgemeinen Vorkenntnisse vorausgesetzt werden durften.

Es war also das erklärte Ziel, ein physikalisches Teilgebiet "von Null auf" darzustellen, und dies möglichst in einer axiomatisch/ mathematischen Weise. Die Qual der (Aus-)Wahl stand somit unter der Maxime: die Grundlagen möglichst allgemein und mit der zum Verständnis nötigen Ausführlichkeit. Für weiterführende Spezialtheorien blieb dagegen kein Platz mehr und muß auf die Literatur verwiesen werden.

Inzwischen wurde der Kurs mehrmals abgehalten, das Skript hat sich zu einem Buch gemausert, viele Erfahrungen und Erkenntnisse sind eingegangen. Für eine kompakte Einführung ist es fast schon zu lang, obwohl dem einen oder anderen sicherlich auch noch manches fehlt.

Da die Entstehung dieser Arbeit viele Jahre währte und manche Vorgängerarbeit eingeflossen ist, bin ich vielen Kommilitonen und Kollegen zu Dank für Hilfen, Anregungen, Kritik usw. verpflichtet. Besonders gilt dies für die Herren *Martin Brüggener, Rainer Sievert, Ekkehard Tjaden*, sowie *Gerd Brunk* (Kraftkonzept), *Kurt Kutzler* (Funktionalanalysis), *David Owen* (Materialtheorie), *Udo Pohl* (Kraftkonzept), *Rolf Ehlers* und - last but not least - meinen beiden verehrten Lehrern, *Rudolf Trostel* und *Arnold Krawietz*, deren mechanische "Handschrift" - so hoffe ich - an vielen Stellen erkennbar sein wird. Für Hilfen bei der technischen Ausführung sei den Kolleginnen *Isa Ottmers* und *Gisela Schmidt* herzlich gedankt.

A. B. Berlin, Mai 1989

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	5
	Inhaltsverzeichnis	6
1.	Einleitung	9
1.1	Bezeichnungen und Schreibweisen	14
Teil I	**Mathematische Propädeutik**	15
2.	Lineare Abbildungen	15
2.1	Tensoren höherer Stufe	22
2.2	Bilinearformen und innere Produkte	23
2.3	Alternierende Multilinearformen	29
3.	Euklidische Räume	36
4.	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	43
4.1	Tangential- und Kotangentialraum	44
4.2	Bündel, Felder und Differentialformen	50
5.	Euklidische Mannigfaltigkeiten	55
5.1	Analysis in Euklidischen Räumen	59
Teil II	**Grundlagen der Kontinuumsmechanik**	67
6.	Materielle Körper	67
7.	Intrinsische Beschreibung von Deformationen	69
7.1	Plazierungen	69
7.2	Konfigurationen	72
7.3	Intrinsische Beschreibungsweise in Koordinaten	74
8.	Bezogene Beschreibung von Deformationen	77
8.1	Bezugsplazierung	77

8.2	Zusammenhänge zwischen intrinsischer und bezogener Beschreibungsweise	83
8.3	Wechsel der Bezugsplazierung	84
8.4	Bezogene Beschreibungsweise in Koordinaten	85
8.5	Kleine Verformungen	87
8.6	Einfache Scherung	89
9.	Raum - Zeit - Kontinuum	95
9.1	Zeit	95
9.2	Raum-Zeit-Kontinuum	96
9.3	Beobachter	98
9.4	Geschwindigkeit und Beschleunigung	100
9.5	Bezugssysteme im Raum-Zeit-Kontinuum	100
9.6	Beobachterwechsel	101
10.	Bewegungen von Körpern	107
10.1	Intrinsische, *Euler*sche und *Lagrange*sche Beschreibungsweise	110
10.2	Transportgleichung in lokaler Form	114
10.3	Transportgleichung in integraler Form	117
10.4	Starrkörperbewegungen	120
10.5	Starrkörpermodifikationen	123
10.6	Bewegungen für verschiedene Beobachter	125
10.7	Die Bewegungsklasse des Körpers	132
10.8	Bewegungsfunktionale	134
11.	Dynamik bewegter Körper	137
11.1	Globale Formulierung der Dynamik	138
11.2	Dynamik starrer Körper	149
11.3	Feldformulierung der Dynamik	152
11.4	Spannungsanalyse	160
11.5	Non-polare Körper	171
11.6	Diskussion des Vorgehens	175
Teil III	**Materialtheorie**	183
12.	Materielle Systeme	183
12.1	Prozesse	184
12.2	Prinzip des Determinismus	187

12.3	Herstellung von materiellen Systemen	190
13.	Zustände	194
13.1	Revertierbare materielle Systeme	198
13.2	Alternde materielle Systeme	200
14.	Materielle Isomorphie	201
15.	Materielle Symmetrie	210
15.1	Die Symmetrie-Halbgruppe	211
15.2	Die Symmetriegruppe	214
15.3	Materielle Systeme in intrinsischer und bezogener Beschreibungsweise und ihre Symmetriegruppe	221
16.	Topologien im Zustandsraum	228
16.1	Uniforme Räume	228
16.2	Die Zustandsübergangsfunktion	230
16.3	Uniforme Strukturen im Zustandsraum	231
16.4	Vervollständigung der Zustandsraumsektionen	235
16.5	Relaxation	238
17.	Geschichtsfunktionale	240
17.1	Überblick über verschiedene Materialtheorien	246
18.	Innere Zwangsbedingungen	248
19.	Das allgemeine Kontinuumsproblem	256
20.	Dimensionen und Einheiten	259
	Literaturverzeichnis	261
	Notations-Index	269
	Register	275

... so unterscheidet man dermaassen zwischen der Mechanik und der Geometrie, dass man alles Genaue zur letztern, alles weniger Genaue zur erstern zählt.
ISAAC NEWTON:
Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Versuch unternommen, eine allgemeine Kontinuumsmechanik auf axiomatische Weise zu entwickeln. Obwohl es sich dabei um ein "klassisches" Gebiet handelt, das sich obendrein noch ganz besonders für eine mathematische Darstellung eignet, gibt es für unser Vorhaben nur wenige geschlossene und allgemeine Vorarbeiten, trotz der unübersehbaren Fülle von Einzelarbeiten. Die Bücher von WANG/ TRUESDELL und MARSDEN/ HUGHES können im gewissen Umfang als Vorbilder gelten, obwohl sie sich auf den speziellen Fall einfacher elastischer Medien beschränken. Und so epochemachende Arbeiten wie die von TRUESDELL/ NOLL setzen eigentlich erst da ein, wo unsere Darstellung aufhört: bei der Formulierung von Materialgleichungen. NOLL (1974), GURTIN (1972), TROSTEL (1981, 1982) u. a. haben zwar immer wieder in kleineren Arbeiten axiomatische Ansätze vorgeschlagen, sie aber nie zu einer Gesamtdarstellung des Gebiets ausgearbeitet. Diese Arbeit wäre nicht so geworden, wenn es nicht die Arbeiten so großartiger Wissenschaftler wie den genannten und vieler weiterer gegeben hätte.

Wenn wir unser Vorgehen als *axiomatisch* bezeichnen, so soll dies den Anspruch ausdrücken, die Mechanik wie eine mathematische Disziplin behandeln zu wollen, d. h. die Annahmen als Axiome klar zu benennen und danach nur noch mit mathematisch-logischen Mitteln zu deduzieren. Daß dieses Vorgehen auch für eine Naturwissenschaft angemessen sein kann, zeigt uns die Geometrie: die Natur ist der Gegenstand, die Methoden und Modelle jedoch sind mathematisch.

In den 300 Jahren seit NEWTONs obiger Feststellung hat sich quantitativ viel geändert: die *Geometrisierung* der Mechanik ist weit fortgeschritten. Dazu soll mit diesem Buch ein weiterer Beitrag geleistet werden.

Die grundlegende Schwierigkeit eines axiomatischen Vorgehens ist die Auswahl der grundlegenden Konzepte und Axiome. Nach HAMEL (1949) müssen Axiome

1) widerspruchsfrei,
2) ausreichend,
3) voneinander unabhängig,
4) nicht mit den Erfahrungstatsachen im Widerspruch stehend

sein. Daneben stehen aber noch didaktische Zielsetzungen: die grundlegenden Konzepte sollen empirisch erfahrbar, die Axiome möglichst einfach und anschaulich ausgewählt sein. Aber oft ist es gerade am schwierigsten, das Einfachste zu finden! Im Vorliegenden handelt es sich lediglich um einen Versuch, ein axiomatisches System zu konstruieren, daß diesen Anforderungen genügt; das Ziel ist sicherlich noch nicht erreicht. Ich möchte die Leser an dieser Stelle auffordern, ein Stück auf dem schwierigen, aber interessanten Weg zu diesem lohnenden Ziel mitzugehen und ihn weiter zu erkunden. Selbstverständlich bin ich an Anregungen und Kritik der Leser interessiert.

Es wurde auf allen Stufen der Entwicklung die *minimal art* angestrebt: die Räume gerade mit soviel Struktur zu möblieren, wie benötigt wird, und besonders darauf zu achten, ob die Strukturen auf natürliche Weise gegeben sind oder willkürlich und künstlich eingeführt wurden. Im letzteren Falle muß die Invarianz der weiteren Ergebnisse gegen den Wechsel dieser Wahl sichergestellt werden.

Ein Beispiel hierfür sind die *Beobachter*: Wir beschreiben die Kinetik in beobachterabhängigen Größen. Da aber alle *Beobachter* gleichberechtigt sind und keiner ausgezeichnet werden soll, werden wir uns viel mit Invarianzen unter Beobachterwechseln beschäftigen müssen, um letztlich eine objektive Theorie zu erhalten.

Anders verhält es sich mit den *Bezugsplazierungen*. Ihre Benutzung war früher üblich und ist auch heute noch weit verbreitet. Da auch sie willkürlich ausgewählt wurden, mußten wir untersuchen, welche Folgen diese Wahl hatte. Nach einem Vorschlag von NOLL (1972) läßt sich jedoch die Theorie auch a priori ohne Bezugsplazierungen formulieren (sog. *intrinsische Beschreibungsweise, Kap. 7*), was jene Untersuchungen entbehrlich macht.

Unsere Darstellung beginnt mit einer Zusammenstellung der wichtigsten mathematischen Handwerkszeuge, im wesentlichen aus der *linearen Algebra, Geometrie* und *Analysis*. Dies soll zur semantischen Vereinheitlichung dienen; für konsistente Darstellungen der verschiedenen Gebiete muß auf entsprechende mathematische Spezialliteratur verwiesen werden. Der mathematisch gut vorgebildete Leser kann diesen Teil zum Nachschlagen der Bezeichnungen benutzen und sich gleich auf die Physik des II. Teils stürzen.

Durch die Bereitstellung der Räume und Strukturen können dort viele Definitionen in geradezu lakonischer Weise formuliert werden. Beispiel dafür ist die Definition des *materiellen Körpers* im Kapitel 6, die so nur möglich ist, weil wir bereits im Kapitel 4 die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt haben.

Gegenstand der Mechanik ist das raum-zeitliche Verhalten von materiellen Körpern. Da in der nicht-relativistischen Mechanik *Raum* und *Zeit* voneinander unabhängig sind, können wir uns mit beiden Konzepten nacheinander beschäftigen und sie anschließend kombinieren (s. Kap. 9).

Die räumlichen Darstellungen fußen auf der *Euklid*ischen Geometrie. Der *Raum* wird als dreidimensionaler *Euklid*ischer Raum identifiziert, in den der *Körper* eingebettet wird. Damit können wir Deformationsgeometrie auf dem Körper betreiben.

Die Einführung der *Zeit* erfolgt im Rahmen der klassischen Chronometrie als eindimensionaler orientierter *Euklid*ischer Raum.

Für die Verknüpfung von *Raum* und *Zeit* im Konzept des *Raum-Zeit-Kontinuums* erweist sich der mathematische Begriff eines *Bündels* als passend, der im Abschnitt 4.2 dargestellt wurde. Um im Raum-Zeit-Kontinuum Kinematik zu betreiben, bedarf es allerdings noch des *Beobachters*, einem zentralen Begriff auch in der folgenden Dynamik.

Wir gehen zunächst von der *Kinematik bewegter Punkte* aus, die wir in einem zweiten Schritt verallgemeinern zur *Kinematik bewegter Körper* (Feldformulierung) (Kap. 10). Damit sind wir in der Lage, das Grundproblem der Mechanik zu formulieren: die Bewegungen eines Körpers in *physikalisch mögliche* und *unmögliche* einzuteilen.

Dafür erweisen sich die kinematischen Konzepte als unzureichend. Es bedarf mindestens eines weiteren grundlegenden Konzeptes. Wir haben uns dabei für die

Arbeit (oder *Leistung*) entschieden (Kap. 11). Damit gelangt man zu ganz anderen Argumentationsketten als üblicherweise, wo das *Kraft*konzept am Anfang steht. Die Ergebnisse erweisen sich natürlich als äquivalent.

Wir führen die *Arbeit* ein als Funktional der Bewegungen von Körpern. Damit schließen wir auch inelastische, sog. gedächtnisbehaftete Medien in großer Allgemeinheit mit ein. Es wird axiomatisch gefordert, daß eine Bewegung dynamisch möglich ist, falls die geleistete Arbeit objektiv ist. Somit wird sozusagen der objektive Teil unserer (sonst sicherlich sehr subjektiven) Theorie in Relation zur physikalischen Wirklichkeit gebracht. Zu diesem Zweck wird der Begriff der *Leistung* verallgemeinert zur *virtuellen Leistung*, einem Hilfskonzept, dessen willkürliche Wahl später wieder relativiert werden kann. Im ganzen Kapitel 11 werden übrigens grundsätzlich dynamisch mögliche *und* unmögliche Bewegungen behandelt. Es ist in der sonstigen Literatur leider weit verbreitet, sich in der Beschreibung schnell auf die möglichen Bewegungen einzuschränken und damit die Entscheidungsfähigkeit zwischen *möglich* und *unmöglich* aus der Hand zu geben. Dies geschieht insbesondere mit dem Drallsatz, der für non-polare Medien mit der Symmetrie des *Euler*schen Spannungstensors zusammenfällt. Wird dieser grundsätzlich als symmetrisch angesetzt, so degeneriert der Drallsatz als ein Kriterium dynamischer Möglichkeit von Bewegungen zu einer Null-Aussage.

Wenden wir unsere Ergebnisse exemplarisch auf den starren Körper an, so erhalten wir die *Eulersche Kreiseltheorie* (Abschnitt 11.2).

Um die bis jetzt *globalen* dynamischen Aussagen in *lokale* umzuwandeln, benutzen wir im Abschnitt 11.3 an zentraler Stelle einen *Riesz*schen Darstellungssatz über stetige lineare Funktionale auf *Sobolev*-Räumen aus der Funktionalanalysis.

Da sich dieser Aufbau der Dynamik erheblich von anderen Darstellungen unterscheidet, erfolgt eine vergleichende Diskussion des Vorgehens am Ende des Kapitels 11.

Den dritten und letzten Teil nimmt die *Materialtheorie* ein. Hier wurde als Rahmenordnung die Theorie der *materiellen Systeme* (BERTRAM 1982) gewählt, die aus NOLLs *Neuer Theorie einfacher Materialien* (1972) hervorgegangen ist und als die allgemeinste und vielleicht auch einfachste Rahmenordnung gelten kann. Sie schließt praktisch alle anderen vorgeschlagenen Rahmenordnungen der Mechanik und Thermodynamik mit ein und kann auch leicht für andere Gebiete als das vorliegende verwendet werden. Da lediglich die Begriffe (intrinsische) *Spannungen* und *Konfigurationen* benutzt werden, kann man diesen Teil des Buches auch separat studieren.

Grundlegende Konzepte der materiellen Systeme sind: *Prozesse* als zeitabhängige Trajektorien im Raum der unabhängigen Variablen (hier: *Konfigurationen*) und *Materialfunktionale* von Prozessen in die abhängigen Variablen (hier: *Spannungen*). Damit läßt sich der *Zustandsraum* eines Systems als abgeleitetes Konzept entwickeln, indem alle wichtigen Erinnerungen eines gedächnisbehafteten Materials isoliert werden (Kap. 13).

Das Konzept *materielle Isomorphie* dient zum Vergleich verschiedener materieller Systeme (Kapitel 14), während die *materielle Symmetrie* eine wichtige Eigenschaft derartiger Systeme formalisiert (Kap. 15).

Die topologischen Untersuchungen des Zustandsraumes von Kapitel 16 werden dafür benutzt, um *Relaxation* zu beschreiben. Damit ist man dann in der Lage, die Theorie der *Geschichtsfunktionale*, die immer noch sehr weit verbreitet ist, in die vorliegende einzubetten (Kap. 17).

Innere Zwangsbedingungen spielen eine wichtige Rolle für die Lösungsmöglichkeit und dürfen deshalb in einer Einführung nicht fehlen (Kap. 18).

Die Darstellung wird beendet mit der Formulierung des *allgemeinen Rand- und Anfangswertproblems* der Kontinuumsmechanik (Kap. 19).

Hier sollte sich die Lektüre weiterführender Literatur anschließen.

Am Ende des Buches findet man noch

- eine Erläuterung von Dimensionen und Einheiten physikalischer Größen,
- das Literaturverzeichnis (in alphabetischer Reihenfolge),
- eine Liste der wichtigsten verwendeten Symbole und Zeichen,
- ein Register der wichtigsten Begriffe und die Stelle ihrer Einführung.

1.1 Folgende **Bezeichnungen und Schreibweisen** werden häufig benutzt:

A	Axiom oder Annahme
D	Definition
S	Satz oder beweisbare Aussage
B	Beweis
⊠	Beweisende
I_M oder nur I	Identische Abbildung einer Menge M
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}^{0+}$	nicht-negative reelle Zahlen
C^k	Klasse der k-mal differenzierbaren Funktionen
$\times^r$	r-faches kartesisches Produkt
$f\|_V$	Einschränkung einer Funktion f auf V
$\forall$	"für alle"
$\exists$	"es existiert"
$f\,g$	Hintereinanderschaltung von Abbildungen (erst g, dann f)
$:=$	definitorische Gleichheit
$\equiv$	"wird hier identifiziert mit"
$\simeq$	kanonisch isomorph

Die Bezeichnungen f und $f(\cdot)$ für Funktionen sind synonym.

Der Übersichtlichkeit halber wurde davon abgesehen, alle Gleichungen zu numerieren. Lediglich die wichtigsten haben Namen bekommen, z. B. "EGF" für *Eulersche Geschwindigkeitsformel*. Die Statements A, D, S wurden kapitelweise durchnumeriert. So bedeutet z. B. "A 11.1" das 1. Statement - in diesem Fall ein Axiom - im 11. Kapitel.

Insgesamt großgeschriebene Autorennamen wie z. B. "EINSTEIN" sind im alphabetischen Literaturverzeichnis am Ende des Buches aufgeführt. Sind von einem Autor mehrere Arbeiten angeführt, so wird - falls erforderlich - noch zusätzlich das Erscheinungsjahr angeführt, z. B. "NOLL (1972)".

Teil I : Mathematische Propädeutik

Empfohlene Literatur: BOWEN/ WANG, CHOQUET/ DE WITT/ DILLARD, FLEMING, LOOMIS/ STERNBERG, NOLL (1987)

2. Lineare Abbildungen

Empfohlene Literatur: DE BOER, FLEMING, GREUB, HALMOS, HOLMANN, BOWEN/ WANG

In diesem Kapitel sollen die Grundbegriffe der linearen und multilinearen Algebra kurz eingeführt werden.

Im weiteren sind $V_1, V_2, V_3, \ldots$ endlich-dimensionale reelle **lineare Räume** oder **Vektorräume** der Dimension $dim V_i = n_i \in \mathbb{N}$ (zunächst ohne inneres Produkt). Die Menge der **Tensoren oder linearen Abbildungen** von V_1 nach V_2 bezeichnen wir mit

$$Lin(V_1,V_2) := \{ A : V_1 \to V_2 \,|\, \text{linear} \}$$

(s. Auflistung auf Seite 28). Die **Verknüpfung** oder Hintereinanderschaltung zweier linearer Abbildungen $A_1 \in Lin(V_1,V_2)$ und $A_2 \in Lin(V_2,V_3)$ sei $A_2 A_1 \in Lin(V_1,V_3)$, so daß

$$A_2 A_1(v) := A_2(A_1(v)) \qquad \forall v \in V_1,$$

d. h. es wird erst A_1 auf v angewendet und anschließend A_2 auf das Ergebnis.

Auf $Lin(V_1,V_2)$ führt man auf natürliche Weise eine lineare Struktur ein, in dem man die linearen Operationen wertweise vollzieht:

$$(\alpha A_1 + A_2)(v) := \alpha A_1(v) + A_2(v) \qquad \forall v \in V_1, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Damit bildet $Lin(V_1,V_2)$ einen linearen Raum der Dimension $n_1 n_2$. Wir bezeichnen die **Identität** auf einem Raum oder einer Menge V mit I_V. Sie ist für lineare Räume aus $Lin(V,V)$. Die **Isomorphismen** zweier Vektorräume sind die invertierbaren linearen Abbildungen

$$Iso(V_1,V_2) := \{ A : V_1 \to V_2 \,|\, \text{linear}, \exists A^{-1} \in Lin(V_2,V_1) \text{ mit } A^{-1}A = I_{V_1} \text{ und } A\,A^{-1} = I_{V_2} \}.$$

Diese Menge ist nur dann nicht leer, wenn $dim V_1 = dim V_2$ ist.

Betrachten wir den Spezialfall $V_1 = V_2 =: V$, so bildet die Menge der **Endomorphismen** $Lin(V,V)$ eine (nicht-kommutative) Algebra, indem wir als Multiplikation die Verknüpfung einführen. Die Menge der **Automorphismen** $Aut(V) := Iso(V,V) \subset Lin(V,V)$ ist *kein* linearer Unterraum von $Lin(V,V)$, aber eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung ("allgemeine lineare Gruppe").

Der **Dualraum** V^* eines Vektorraumes V ist definiert als die Menge der linearen Funktionale

$$V^* := Lin(V,\mathbb{R})$$

und trägt seinerseits eine lineare Struktur derselben Dimension wie V.

Man kann den Dualraum $(V^*)^*$ von V^* auf natürliche Weise mit V identifizieren, indem man für $\mathbf{t} \in V$ und $\mathbf{k} \in V^*$

$$\mathbf{t}(\mathbf{k}) := \mathbf{k}(\mathbf{t})$$

setzt. Dies soll durch die Schreibweise

$$<\mathbf{k},\mathbf{t}> := \mathbf{k}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}(\mathbf{k}) =: <\mathbf{t},\mathbf{k}>$$

ausgedrückt werden.

Zwei Basen $\{\mathbf{t}_i\} \subset V$ und $\{\mathbf{k}^m\} \subset V^*$ werden **dual** genannt, falls gilt:

$$<\mathbf{t}_i,\mathbf{k}^m> = \delta_i{}^m := \begin{cases} 1 & \text{für } i = m \\ 0 & \text{für } i \neq m \end{cases}.$$

Zu jeder Basis existiert eindeutig eine duale Basis, deren Verwendung die Rechnung oft stark vereinfacht.

Wir definieren das **Tensorprodukt** (oder dyadische Produkt) $\otimes$ zwischen $\mathbf{t} \in V$ und $\mathbf{k} \in V^*$

$$\mathbf{t}\otimes\mathbf{k} \in Lin(V,V)$$

durch

$$\mathbf{t}\otimes\mathbf{k}(\mathbf{v}) = <\mathbf{k},\mathbf{v}>\mathbf{t} \qquad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Lineare Operationen zwischen Tensorprodukten können wertweise definiert werden, indem man für alle $\mathbf{v} \in V$ setzt

$$(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{k}^1 + a\,\mathbf{t}_2\otimes\mathbf{k}^2)(\mathbf{v}) := <\mathbf{k}^1,\mathbf{v}>\mathbf{t}_1 + a <\mathbf{k}^2,\mathbf{v}>\mathbf{t}_2$$

$$\forall\, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in V,\ \forall\, \mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2 \in V^*,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

In der Tat lassen sich alle Tensoren $\mathbf{A} \in Lin(V,V)$ nach Wahl zweier Basen $\{\mathbf{t}_i\} \subset V$ und $\{\mathbf{k}^m\} \subset V^*$ eindeutig als Linearkombinationen von Tensorprodukten

$$\mathbf{A} = a^i{}_m\, \mathbf{t}_i\otimes\mathbf{k}^m$$

repräsentieren, wobei wir uns der **Summenkonvention** (Summe über i und m) bedienen. $a^i{}_m$ sind reelle Zahlen, die man in einer $n \times n$-Matrix anordnen kann, wobei $n = dim V$ ist. Umgekehrt stellt jede $n \times n$-Matrix bez. $\{\mathbf{t}_i\}$ und $\{\mathbf{k}^m\}$ einen bestimmten Tensor dar.

Die n^2 Elemente $\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{k}^m$ bilden also eine Basis $\{\mathbf{t}_i\otimes\mathbf{k}^m\}$ in $Lin(V,V)$. Die Zahlen $a^i{}_m$ sind die Komponenten von $\mathbf{A}$ bez. dieser Basis.

Analog werden die folgenden Tensorprodukte definiert:

$$\begin{aligned} &\mathbf{k}\otimes\mathbf{t} \in Lin(V^*,V^*), && \mathbf{t} \in V \text{ und } \mathbf{k} \in V^* \\ &\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2 \in Lin(V^*,V), && \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in V \\ &\mathbf{k}^1\otimes\mathbf{k}^2 \in Lin(V,V^*), && \mathbf{k}^1, \mathbf{k}^2 \in V^* \end{aligned}$$

sowie deren jeweiligen Linearkombinationen.

Betrachten wir den zu $Lin(V^*,V)$ dualen Raum

$$Lin^*(V^*,V) := Lin[Lin(V^*,V),\mathbb{R}],$$

so können wir diesen identifizieren mit

$$Lin(V,V^*).$$

Seien nämlich

$$\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2 \in Lin(V^*,V)$$

und

$$\mathbf{k}^1\otimes\mathbf{k}^2 \in Lin(V,V^*),$$

so kann man die skalarwertige Abbildung

$$<\mathbf{k}^1\otimes\mathbf{k}^2,(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2)> := <\mathbf{k}^1,\mathbf{t}_1><\mathbf{k}^2,\mathbf{t}_2>$$

in dem in runden Klammern stehenden Argument linear auf $Lin(V^*,V)$ erweitern. Dasselbe gilt, wenn wir statt $\mathbf{k}^1\otimes\mathbf{k}^2$ Linearkombinationen von Tensorprodukten aus $Lin(V,V^*)$ nehmen.

Ebenso lassen sich konstatieren:

$$\begin{aligned} Lin^*(V,V^*) &\simeq Lin(V^*,V) \\ Lin^*(V,V) &\simeq Lin(V^*,V^*) \\ Lin^*(V^*,V^*) &\simeq Lin(V,V) \end{aligned}$$

Ein ausgezeichnetes Element aus $Lin^*(V^*,V^*)$ ist die **Spur**; sie leistet für alle

$$\mathbf{A} = a_m{}^i\, \mathbf{k}^m \otimes \mathbf{t}_i \qquad \in Lin(V^*,V^*)$$

$$sp\,\mathbf{A} = sp(a_m{}^i\, \mathbf{k}^m \otimes \mathbf{t}_i) := a_m{}^i <\mathbf{k}^m, \mathbf{t}_i> \quad .$$

Sie soll analog in $Lin^*(V,V)$ definiert werden

$$sp(\mathbf{t}\otimes\mathbf{k}) := <\mathbf{t},\mathbf{k}> = <\mathbf{k},\mathbf{t}> = sp(\mathbf{k}\otimes\mathbf{t}) ,$$

nicht jedoch auf $Lin(V,V^*)$ oder $Lin(V^*,V)$.

Wir können auch allgemeinere Tensorprodukte einführen, z. B.

$$\mathbf{t}\otimes\mathbf{k} \quad \in Lin(V_1,V_2) \qquad \text{mit } \mathbf{k}\in V_1{}^*,\ \mathbf{t}\in V_2$$

durch

$$\mathbf{t}\otimes\mathbf{k}(\mathbf{v}) := <\mathbf{k},\mathbf{v}>\, \mathbf{t} \qquad \forall\, \mathbf{v}\in V_1.$$

Dies führt zu Tensoren

$$\mathbf{A} = a^i{}_m\, \mathbf{t}_i\otimes\mathbf{k}^m \qquad \in Lin(V_1,V_2) ,$$

wobei die Komponenten in einer $dim V_2 \times dim V_1$-Matrix angeordnet werden können, die nur in Sonderfällen quadratisch ist. Wegen dieser Darstellung wählt man für $Lin(V_1,V_2)$ auch die Schreibweise als Tensorprodukt zwischen Vektorräumen $V_2\otimes V_1{}^*$.

Betrachten wir in Verallgemeinerung des vorher gesagten den zu $Lin(V_1,V_2)$ dualen Raum

$$Lin^*(V_1,V_2) := Lin\,[Lin(V_1,V_2), \mathbb{R}] ,$$

so können wir ihn identifizieren mit $Lin(V_1{}^*,V_2{}^*)$. Seien nämlich

$$\mathbf{t}_2\otimes\mathbf{k}^1 \quad \in Lin(V_1,V_2)$$

und

$$\mathbf{k}^2\otimes\mathbf{t}_1 \quad \in Lin(V_1{}^*,V_2{}^*)$$

mit

$$\mathbf{t}_1\in V_1 ,\ \ \mathbf{t}_2\in V_2 ,\ \ \mathbf{k}^1\in V_1{}^* ,\ \ \mathbf{k}^2\in V_2{}^* ,$$

so kann die Abbildung

$$<\mathbf{k}^2\otimes\mathbf{t}_1, (\mathbf{t}_2\otimes\mathbf{k}^1)> := <\mathbf{k}^2,\mathbf{t}_2>\, <\mathbf{k}^1,\mathbf{t}_1>$$

auch linear in dem in runden Klammern stehenden Argument erweitert werden.

Wir verallgemeinern nun den Begriff der Dualität von linearen Räumen auf den von linearen Abbildungen:

Sei $\mathbf{A}\in Lin(V_1,V_2)$, so ordnet man $\mathbf{A}$ eindeutig die **duale Abbildung** $\mathbf{A}^*\in Lin(V_2{}^*,V_1{}^*)$ zu durch die Vorschrift

$$<\mathbf{t}_1, \mathbf{A}^*(\mathbf{k}^2)> := <\mathbf{A}(\mathbf{t}_1), \mathbf{k}^2> \qquad \forall\, \mathbf{t}_1\in V_1 ,\ \forall\, \mathbf{k}^2\in V_2{}^* .$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\mathbf{A}} & V_2 \\ V_1{}^* & \xleftarrow{\mathbf{A}^*} & V_2{}^* \end{array}}$$

Für einfache Tensorprodukte bildet man die Duale durch einfaches Umdrehen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{t}_2\otimes\mathbf{k}^1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{k}^1\otimes\mathbf{t}_2 .$$

Für Tensoren

$$\mathbf{A} = a^i{}_m\ \mathbf{t}_{2i}\otimes\mathbf{k}^{1m} \qquad \in Lin(V_1,V_2)$$

verifiziert man mit der Definitionsgleichung von $\mathbf{A}^*$ die Darstellung

$$\mathbf{A}^* = a^i{}_m\ \mathbf{k}^{1m}\otimes\mathbf{t}_{2i} ,$$

d.h. die Komponentenmatrix von $\mathbf{A}^*$ bez. $\{\mathbf{k}^{1m}\otimes\mathbf{t}_{2i}\}$ ist gleich der transponierten von $\mathbf{A}$ bez. $\{\mathbf{t}_{2i}\otimes\mathbf{k}^{1m}\}$.

Wir wollen einen Spezialfall gesondert betrachten:

Für

$$V_1 = V_2{}^* =: V$$

gilt:

$$\mathbf{A}\in Lin(V,V^*) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^*\in Lin(V,V^*) ,$$

Folgendes ist dann möglich:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* .$$

$\mathbf{A}$ heißt dann **symmetrisch**. Wir bezeichnen mit

$$Sym(V,V^*) := \{\, \mathbf{A}\in Lin(V,V^*) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \,\}$$

was ein linearer Unteraum von $Lin(V,V^*)$ ist.

Ein $\mathbf{A}\in Lin(V,V^*)$ heißt **positiv-definit**, wenn

$$<\mathbf{A}(\mathbf{t}), \mathbf{t}> \ > 0 \qquad \forall\ \mathbf{t} \neq \mathbf{o} \in V.$$

Die Menge der positiv-definiten und symmetrischen Abbildungen sei $Sym^+(V,V^*)$.

Gilt hingegen für ein $\mathbf{A}\in Lin(V,V^*)$:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^* ,$$

so heißt $\mathbf{A}$ **antimetrisch** (oder schief-symmetrisch). Wir schreiben für die Menge, die einen linearen Unterraum bildet,

$$Skw(V,V^*) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V^*) \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^* \} .$$

Die vorigen Definitionen lassen sich analog auf $Lin(V^*,V)$ einführen, nicht jedoch auf $Lin(V,V)$ oder $Lin(V^*,V^*)$.

Für die Endomorphismen $Lin(V,V)$ können wir **Eigenwertprobleme** betrachten: Ein **Eigenvektor** $\mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V$ und der zugehörige **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ eines Tensors $\mathbf{A} \in Lin(V,V)$ sind definiert als Lösung der Gleichung (falls existent)

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} .$$

Man sieht, daß mit $\mathbf{v}$ auch jedes von Null verschiedene skalare Vielfache von $\mathbf{v}$ Eigenvektor zum selben Eigenwert ist. Äquivalent zur obigen Gleichung ist die Form

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{o} .$$

Schreiben wir diese Gleichung komponentenweise bezüglich dualer Basen $\{\mathbf{t}_i\} \in V$ und $\{\mathbf{k}^m\} \in V^*$ auf, so erhalten wir ein lineares homogenes Gleichungssystem in den Komponenten von $\mathbf{v}$

$$(a^i{}_m - \lambda \delta^i{}_m)\, v^m = 0 ,$$

$i = 1, \dots, n = dim V$, das nur dann Lösungen verschieden von Null hat, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 - \lambda & a^1{}_2 & a^1{}_3 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 - \lambda & a^2{}_3 & \dots & a^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & a^n{}_3 & \dots & a^n{}_n - \lambda \end{bmatrix}$$

Null wird, was dem reellen Nullstellenproblem eines Polynoms von n-tem Grad in λ , der **charakteristischen Gleichung**

$$\boxed{(-\lambda)^n + \mathrm{I}_{\mathbf{A}} (-\lambda)^{n-1} + \mathrm{II}_{\mathbf{A}} (-\lambda)^{n-2} + \dots + \mathrm{N}_{\mathbf{A}} = 0}$$

entspricht. Ließe man auch komplexe Wurzeln zu, so ist deren Existenz grundsätzlich gesichert. Die Koeffizienten $\mathrm{I}_{\mathbf{A}}, \mathrm{II}_{\mathbf{A}}, \dots, \mathrm{N}_{\mathbf{A}}$ sind wie λ von der Wahl der speziellen Basen $\{\mathbf{t}_i\}$ und $\{\mathbf{k}^m\}$ unabhängig und heißen deshalb **Hauptinvarianten** von $\mathbf{A}$. $\mathrm{I}_{\mathbf{A}}$ ist gleich der bereits erwähnten Spur von $\mathbf{A}$. Sie berechnet sich als Summe der Diagonalelemente der Komponentenmatrix von $\mathbf{A}$

$$\mathrm{I}_{\mathbf{A}} = sp\,\mathbf{A} = a^1{}_1 + a^2{}_2 + \dots + a^n{}_n .$$

Die letzte Hauptinvariante $\mathrm{N}_{\mathbf{A}}$ heißt **Determinante** des Tensors, weil ihr Wert gleich der Determinante der Komponentenmatrix $[a^i{}_m]$ ist. Die Determinante ist multiplikativ:

$$det(\mathbf{AB}) = det\,\mathbf{A}\ \ det\,\mathbf{B} .$$

Die Abbildungen $\mathbf{A}$ mit $|det\,\mathbf{A}| = 1$ bilden die **unimodulare Gruppe**

$$Unim(V) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V) \mid |det\,\mathbf{A}| = 1 \} \subset Aut(V) ,$$

deren Untermengen mit positiver Determinante

$$Unim^+(V) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V) \mid det\,\mathbf{A} = 1 \}$$

die **spezielle lineare Gruppe** ist.

Für den wichtigen *dreidimensionalen Fall* mit der charakteristischen Gleichung

$$\boxed{-\lambda^3 + \mathrm{I}_{\mathbf{A}} \lambda^2 - \mathrm{II}_{\mathbf{A}} \lambda + \mathrm{III}_{\mathbf{A}} = 0}$$

gelten folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{\mathbf{A}} &= sp\mathbf{A} = a^1{}_1 + a^2{}_2 + a^3{}_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
\mathrm{II}_{\mathbf{A}} &= \tfrac{1}{2}[sp^2\mathbf{A} - sp(\mathbf{AA})] \\
&= a^1{}_1 a^2{}_2 - a^1{}_2 a^2{}_1 + a^2{}_2 a^3{}_3 - a^2{}_3 a^3{}_2 + a^3{}_3 a^1{}_1 - a^1{}_3 a^3{}_1 \\
&= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \\
\mathrm{III}_{\mathbf{A}} &= det\,\mathbf{A} = \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \\
&= a^1{}_1 (a^2{}_2 a^3{}_3 - a^2{}_3 a^3{}_2) - a^1{}_2 (a^2{}_1 a^3{}_3 - a^2{}_3 a^3{}_1) + a^1{}_3 (a^2{}_1 a^3{}_2 - a^3{}_1 a^2{}_2)
\end{aligned}$$

Ist A ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Raumes V mit den Hauptinvarianten $I_A, II_A, \dots, N_A$, so gilt die Gleichung von ***Cayley-Hamilton***:

$$\boxed{(-A)^n + I_A(-A)^{n-1} + \dots + N_A I_V = 0_V}$$

wobei A^i die i-fache Verknüpfung von A bedeutet, und 0_V der Nulltensor auf V ist. Im *dreidimensionalen Fall* erhalten wir die Version

$$-A^3 + I_A A^2 - II_A A + III_A I_V = 0_V ,$$

und, falls A invertierbar ist,

$$-A^2 + I_A A - II_A I_V + III_A A^{-1} = 0_V .$$

Diese Gleichungen werden häufig dazu benutzt, höhere Tensorpolynome in solche niedrigeren Grades zu verwandeln.

2.1 Tensoren höherer Stufe

Die bisher betrachteten Tensoren aus $Lin(V,V)$ bezeichnet man auch als Tensoren 2. Stufe. Man kann sie aber auch auffassen als Elemente von $Lin(V^* \times V, \mathbb{R})$, indem man setzt für $A = a^i{}_m t_i \otimes k^m$

$$A(v,w) := a^i{}_m \langle t_i, v\rangle \langle k^m, w\rangle \qquad \forall v \in V^*, \forall w \in V .$$

Diese Darstellung läßt sich verallgemeinern auf **Tensoren vom (p,q)-Typ** mit $p, q \geq 0$, indem man das dyadische Produkt generalisiert zu einem $(p+q)$-fachen Tensorprodukt

$$A = a^{ij\dots l}{}_{mn\dots r}\, t_{1i} \otimes t_{2j} \otimes \dots \otimes t_{pl} \otimes k^{1m} \otimes k^{2n} \otimes \dots \otimes k^{qr}$$

$$\in Lin[(\otimes^p V^*) \otimes (\otimes^q V), \mathbb{R}] =: (\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V^*),$$

mit $t_{ij} \in V$ und $k^{ij} \in V^*$, so daß

$$A(v^1 \otimes \dots \otimes v^p \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_q)$$
$$= a^{ij\dots l}{}_{mn\dots r} \langle t_{1i}, v^1\rangle \langle t_{2j}, v^2\rangle \dots \langle t_{pl}, v^p\rangle \langle k^{1m}, w_1\rangle \langle k^{2n}, w_2\rangle \dots \langle k^{qr}, w_q\rangle$$

mit $w_i \in V$ und $v^i \in V^*$. Die linearen Operationen, wiederum wertweise definiert, machen aus den Mengen $Lin[(\otimes^p V^*) \otimes (\otimes^q V), \mathbb{R}]$ lineare Räume.

Besonders wichtig sind die **Tetraden** aus $Lin[(\otimes^2 V^*) \otimes (\otimes^2 V), \mathbb{R}]$, die man für zwei Basen $\{t_i\}$ und $\{k^i\}$ folgendermaßen darstellen kann:

$$A = a^{ij}{}_{kl}\, t_i \otimes t_j \otimes k^k \otimes k^l .$$

Ihre besondere Bedeutung erwächst aus der Tatsache, daß sie auch als die linearen Abbildungen zwischen Tensoren 2. Stufe aufgefaßt werden können

$$A \in Lin\,[Lin(V^*,V), Lin(V^*,V)]$$

gemäß

$$A(w_1 \otimes w_2) := a^{ij}{}_{kl}\, t_i \otimes t_j \langle k^k, w_1\rangle \langle k^l, w_2\rangle \qquad \forall w_i \in V ,$$

und für Linearkombinationen entsprechend.

2.2 Bilinearformen und innere Produkte

Eine **Bilinearform** G ist eine Abbildung

$$G : V \times V \to \mathbb{R} ,$$

die in beiden Argumenten linear ist. Sie heißt

- **symmetrisch**, falls $G(u,v) = G(v,u)$ für alle $u, v \in V$ ist;
- **positiv-definit**, falls $G(u,u)$ für alle $u \neq o \in V$ positiv ist.

Eine positiv-definite symmetrische Bilinearform nennt man auch **inneres Produkt** von V (was weiter unten gerechtfertigt wird).

Der Zusammenhang zu den linearen Abbildungen des vorigen Abschnitts wird durch folgenden **Satz** hergestellt: Jedem inneren Produkt entspricht eineindeutig eine positiv-definite symmetrische Abbildung aus $Sym^*(V,V^*)$. Sei nämlich G eine solche, so ist die Operation

$$\langle G(\cdot), \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

sicher in beiden Argumenten linear. Die obigen Symmetrie- und Definitheits-Definitionen fallen mit denen des vorigen Abschnitts zusammen.

Da alle $G \in Sym^+(V,V^*)$ linear und invertierbar sind, kann man sie benutzen, um einen linearen Raum mit seinem Dualraum V^* zu identifizieren, weil G dann auch invertierbar ist. Damit ist $G = I_V = I_{V^*}$, und man schreibt

$$< u, v >_G := < G(u), v > = < u, G(v) > \qquad \forall\, u, v \in V$$

für das innere Produkt. Wir werden den Suffix G weiterhin weglassen, wenn klar ist, auf welches inneres Produkt man sich bezieht.

Betrachten wir nun zwei duale Basen $\{k^l\}$ und $\{t_i\}$ eines Raumes mit innerem Produkt, so können wir einen Kovektor k^l bez. der Vektorbasis $\{t_i\}$ ausdrücken

$$k^l = g^{lm}\, t_m \ ,$$

und es folgt für die Komponenten

$$g^{lm} = g^{ml} = <k^l, k^m> \ ,$$

die **kontravariante Metrikkoeffizienten** genannt werden. Analog definiert man die **kovarianten** als

$$g_{ml} = g_{lm} = <t_m, t_l> \ ,$$

so daß

$$t_m = g_{ml}\, k^l \ .$$

Es gilt

$$g_{sm}\, g^{mj} = \delta_s{}^j \ ,$$

d.h. die Matrizen der Metrikkoeffizienten sind invers zueinander.

Die Identität $G = I_V = G^{-1}$ hat folgende Darstellungen

$$I_V = g^{lm}\, t_l \otimes t_m = g_{lm}\, k^l \otimes k^m = t_m \otimes k^m = k^m \otimes t_m \ ,$$

denn

$$I_V(k^j) = k^m \otimes t_m(k^j) = k^m <t_m, k^j> = k^m\, \delta_m{}^j = k^j \ .$$

Sei v ein Vektor mit den Darstellungen bez. dualer Basen

$$v = v^m\, t_m = v_l\, k^l \ ,$$

so können wir die eine in die andere überführen durch die identische Abbildung in einer geeigneten Repräsentation, z. B.

$$I_V(v) = g^{mj}\, t_m \otimes t_j(v_l\, k^l) = g^{mj}\, t_m\, v_l <t_j, k^l> = g^{mj}\, v_l\, \delta_j{}^l\, t_m = g^{ml}\, v_l\, t_m \ .$$

Durch Komponentenvergleich erhält man die Regel

$$v^m = g^{ml}\, v_l \ .$$

Analog ergibt sich

$$v_l = g_{lm}\, v^m \ .$$

Genauso können wir jeden Tensor $T \in Lin(V,V)$ durch seine *kovarianten*, *kontravarianten*, gemischt *ko-kontravarianten* und gemischt *kontra-kovarianten* Komponenten darstellen:

$$T = t^{lm}\, t_l \otimes t_m = t_{lm}\, k^l \otimes k^m = t^l{}_m\, t_l \otimes k^m = t_l{}^m\, k^l \otimes t_m \ .$$

Man stellt auch hier ähnliche Transformationsregeln fest:

$$t_{lm} = g_{lj}\, t^j{}_m = g_{lj}\, t^{js}\, g_{sm} = t_l{}^s\, g_{sm} \ .$$

Wir nennen eine Basis $\{e_i\}$ in V **Orthonormalbasis**, wenn gilt

$$< e_i, e_j > = \delta_{ij} \ .$$

Sie fällt mit ihrer dualen Basis zusammen.

Ein inneres Produkt G induziert eine **Norm** auf V durch

$$\|u\| := \sqrt{< u, u >}$$

und eine **Metrik** oder einen Abstand auf V durch

$$d(u, v) := \|u - v\| \ ,$$

womit V neben der linearen nun auch eine metrische Struktur trägt. Als **Winkel** ϕ zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren u und v definieren wir die Lösung der Gleichung

$$\cos\phi = \frac{<u,v>}{\|u\|\,\|v\|}$$

zwischen 0 und π. Man kann das innere Produkt und die Norm von V sofort auf beliebige Tensorprodukte von V hochheben. Seien beispielsweise

$$A = a^{ij\ldots l}\, e_i \otimes e_j \otimes \ldots \otimes e_l \ , \quad B = b^{ij\ldots l}\, e_i \otimes e_j \otimes \ldots \otimes e_l$$

die Darstellungen von Tensoren der Stufe p bez. einer Orthonormalbasis $\{e_i\}$, so sind

$$<A, B> := a^{ij\ldots l}\, b^{ij\ldots l}$$

ein **inneres Produkt** und

$$\|A\| := \sqrt{<A, A>} := \sqrt{\sum (a^{ij\ldots l})^2}$$

eine **Norm** (Summe über alle Indizes). Es gilt insbesondere für Tensoren 2. Stufe der Zusammenhang mit der Spur:

$$<A, B> = sp(A\, B^*) = sp(A^*\, B) \ .$$

Ist $A \in Lin(V_1,V_2)$ und somit $A^* \in Lin(V_2^*,V_1^*)$, und sind G_i innere Produkte auf V_i , so wird die Abbildung

$$A^{adj} := G_1^{-1}\, A^*\, G_2 : V_2 \to V_1$$

als **adjungierte Abbildung** bezeichnet, und dies fällt mit unserer Definition einer dualen Abbildung vom vorigen Abschnitt zusammen, wenn man G_i als Identifikation von V_i mit V_i^* auffaßt.

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[d, "G_1"'] & V_2 \arrow[l, shift left, "A^{adj}"] \arrow[d, "G_2"] \\ V_1^* & V_2^* \arrow[l, "A^*"] \end{tikzcd}$$

Gilt zudem $A^{-1} = A^{adj}$, so heißt A **orthogonal** . Die orthogonalen Abbildungen sind deshalb wichtig, weil sie die Isomorphismen der Inneren-Produkt-Räume sind. Denn:

$$< u, v >_{G_1} = < A(u), A(v) >_{G_2} \qquad \forall\, u, v \in V_1 .$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$G_1 = A^*\, G_2\, A ,$$

oder, wenn wir die inneren Produkte wieder als Identifikation auffassen, mit

$$I_{V_1} = A^*\, A$$

oder mit

$$I_{V_2} = A\, A^* .$$

Für den Spezialfall $V_1 = V_2 =: V$ bildet die Menge der orthogonalen Abbildungen eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $Aut(V)$, die sogenannte **orthogonale Gruppe** $Ort(V)$. Sie enthält die Gruppe der *orientierungstreuen* orthogonalen Abbildungen $Ort^+(V)$ mit positiver Determinante, die **spezielle orthogonale Gruppe**. Sind auf V verschiedene innere Produkte in gebrauch, so muß angegeben werden, auf welches sich die Orthogonalität bezieht. Wir schreiben dann

$$Ort(V,G) := \{ A \in Aut(V) \mid A^*\, G\, A = G \} .$$

Auf Räumen V mit innerem Produkt nennt man die duale Abbildung A^* zu einem $A \in Lin(V,V)$ auch **transponierten Tensor**. Für solche Räume gilt der nützliche **Spektral-Satz:**

Für symmetrische Endomorphimen $A \in Sym(V,V)$ auf innerem Produktraum V existieren generell n (nicht notwendig verschiedene) reelle Eigenwerte λ_i und n orthogonale und normierte Eigenvektoren v_i ($< v_i, v_j > = \delta_{ij}$) , so daß A die Spektraldarstellung

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i \otimes v_i$$

besitzt.

Betrachten wir jetzt noch Hintereinanderschaltungen von Automorphismen:

Seien

$$L_1, L_2, \ldots, L_m \in Aut(V) ,$$

so kann man daraus ein

$$L := L_m \ldots L_2\, L_1 \in Aut(V)$$

hintereinanderschalten. Es gelten

$$L^* = L_1^*\, L_2^* \ldots L_m^*$$

und

$$L^{-1} = L_1^{-1}\, L_2^{-1} \ldots L_m^{-1}$$

und

$$L^{-*} := (L^{-1})^* = (L^*)^{-1} = (L_m^*)^{-1} \ldots (L_2^*)^{-1}\, (L_1^*)^{-1} .$$

Übersicht über die Bezeichnungen

Bezeichnung	Definition	Eigenschaft
$Lin(V_1,V_2)$	$:= \{ A : V_1 \to V_2 \mid \text{linear} \}$ Homomorphismen	linearer Raum
$Iso(V_1,V_2)$	$:= \{ A \in Lin(V_1,V_2) \mid \text{invertierbar} \}$ Isomorphismen	offene Untermenge
$Lin(V,V)$	Endomorphismen	Algebra (nicht-kommutativ)
$Aut(V)$	$:= Iso(V,V)$ Automorphismen, allgemeine lineare Gruppe	Gruppe
$Sym(V,V^*)$	$:= \{ A \in Lin(V,V^*) \mid A = A^* \}$ symmetrische Abbildungen	linearer Raum
$Sym^+(V,V^*)$	$:= \{ A \in Sym(V,V^*) \mid \text{positiv definit} \}$ innere Produkte	
$Skw(V,V^*)$	$:= \{ A \in Lin(V,V^*) \mid A = -A^* \}$ antimetrische Abbildungen	linearer Raum
$Unim(V)$	$:= \{ A \in Lin(V,V) \mid det\, A = \pm 1 \}$ unimodulare Gruppe	Gruppe
$Unim^+(V)$	$:= \{ A \in Lin(V,V) \mid det\, A = +1 \}$ spezielle lineare Gruppe	Gruppe
$Ort(V,G)$	$:= \{ A \in Aut(V) \mid A^* G A = G \}$ orthogonale Gruppe bez. G	Gruppe
für $V = V^*$	linearer Raum mit innerem Produkt	
$Ort(V)$	$:= \{ A \in Lin(V,V) \mid A^* A = I_V \}$ orthogonale Gruppe	Gruppe
$Ort^+(V)$	$:= \{ A \in Ort(V) \mid det\, A = +1 \}$ spezielle orthogonale Gruppe	Gruppe

Man beachte, daß * zwei unterschiedliche Bedeutungen hat.

2.3 Alternierende Multilinearformen

Empfohlene Literatur: HOLMANN/ RUMMLER, WESTENHOLZ, SPIVAK, FLEMING

Sei V n-dimensionaler reeller Vektorraum (zunächst ohne inneres Produkt) und V^k sein k-faches kartesisches Produkt:

$$V^k := \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{k\text{-mal}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Als **multilineare k-Form** bezeichnet man eine Abbildung

$$f : V^k \to \mathbb{R} ,$$

die in *jedem* Argument linear ist:

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \alpha v_i + \beta w, v_{i+1}, \ldots, v_k)$$
$$= \alpha f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) + \beta f(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_k)$$
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_2, \ldots, v_k, w \in V .$$

Man kann sich überlegen, daß die multilinearen k-Formen den Tensoren vom $(0,k)$-Typ (s. S. 22) entsprechen, was weiter unten noch genauer betrachtet wird.

Eine Multilinearform heißt **alternierend**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(1) für eine Permutation π ihrer Argumente gilt:

$$f\,\pi = sgn(\pi)\, f$$

mit $sgn(\pi) = 1$ für gerade Permutationen π und $sgn(\pi) = -1$ für ungerade.

(2) sind zwei Eingabevektoren gleich, so ist der Wert der Form Null:

$$f(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0 \qquad \forall v \in V .$$

Daraus folgt, daß für $k > n$ alle alternierenden Multilinearformen Nullabbildungen sind.

Wir können aus der Menge $A^k(V)$ der alternierenden multilinearen k-Formen einen Vektorraum machen, indem wir die linearen Operationen wertweise durchführen:

$$(af_1 + f_2)(v) := a\, f_1(v) + f_2(v)$$

$$\forall\, v \in V^k,\ \forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, f_1, f_2 \in \Lambda^k(V)\ .$$

Man setzt $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ und identifiziert: $\Lambda^1(V) = V^*$. Es zeigt sich, daß der Vektorraum $\Lambda^k(V)$ die Dimension des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ hat. Demnach haben die 0-Formen und die n-Formen die Dimension 1, die $n-1$ und die 1-Formen die Dimension n, die k-Formen mit $k > n$ die Dimension 0.

Bildet man die *direkte Summe*

$$\Lambda(V) := \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(V) \oplus \Lambda^{n+1}(V) \oplus \ldots\ ,$$

so erhält man auf natürliche Weise einen Vektorraum der Dimension 2^n.

Beispiel: für $n = 3$ erhält man

Raum	Dimension
$\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$	1
$\Lambda^1(V) = V^*$	$\binom{3}{1} = 3$
$\Lambda^2(V)$	$\binom{3}{2} = 3$
$\Lambda^3(V)$	$\binom{3}{3} = 1$
$\Lambda(V)$	$2^3 = 8$

Daneben wird eine Abbildung

$$\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \to \Lambda^{k+l}(V)$$

$$(f, g) \mapsto f \wedge g\ ,$$

genannt **äußeres Produkt** (wedge product), definiert durch

$$(f \wedge g)(v) := 1/(k!\,l!) \sum_\pi sgn(\pi)\, (f, g)\, \pi(v) \qquad \forall\, v \in V^{k+l}\ ,$$

wobei über alle $(k+l)!$ Permutationen π von v summiert wird und $(f, g)(v)$ die Anwendung von f auf die ersten k Elemente von v und von g auf die restlichen l Elemente mit anschließender Multiplikation der Werte bedeutet. Für $k = 0$ oder $l = 0$ sei $\wedge$ die Skalarenmultiplikation.

Das äußere Produkt hat folgende Eigenschaften:

- $\wedge$ ist bilinear;
- $\wedge$ ist antikommutativ:

$$f \wedge g = (-1)^{kl}\, g \wedge f \qquad \forall\, f \in \Lambda^k(V),\ \forall\, g \in \Lambda^l(V)\ ;$$

- $\wedge$ ist assoziativ:

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h\ ;$$

- $1 \in \mathbb{R} = \Lambda^0(V)$ ist das beidseitige Einselelement von $\wedge$:

$$1 \wedge f = f \wedge 1 = f \qquad \forall\, f \in \Lambda^k(V),\ k = 0, 1, \ldots .$$

Damit können wir in $\Lambda^k(V)$ eine Basis konstruieren: wir wählen eine Basis $\{k^i\}$, $i = 1, \ldots, n$ in V^* und bilden die äußeren Produkte von allen <u>geordneten</u> k-fachen Kombinationen aus $\{k^i\}$. Man beachte, daß die (willkürliche) Ordnung von $\{k^i\}$ in diese Konstruktion eingeht.

Beispiel: für $k = 2$ und $n = 3$ bildet

$$\{k^1 \wedge k^2,\ k^2 \wedge k^3,\ k^1 \wedge k^3\}$$

eine Basis von $\Lambda^2(T)$.

Für $k = 3 = n$ bildet

$$\{k^1 \wedge k^2 \wedge k^3\}$$

eine Basis für $\Lambda^3(T)$.

Die Komponentendarstellung einer Form lautet dann

$$f = \sum_\sigma f_{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(k)}\, k^{\sigma(1)} \wedge k^{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge k^{\sigma(k)}\ ,$$

wobei über alle <u>geordneten</u> k-fachen Kombinationen σ summiert wird.

Der Raum $\Lambda(V)$ bildet mit den linearen Verknüpfungen und dem äußeren Produkt eine graduierte Algebra, die ***Grassmann***- oder **äußere Algebra**.

Zu einer alternativen Darstellung zu der obigen gelangen wir mittels des Tensorprodukts des vorigen Abschnitts:

Man macht sich leicht klar, daß ein schiefsymmetrischer Tensor $A \in Skw(V, V^*)$ für $v, w \in V$ mittels $< A(v), w >$ als alternierende 2-Form aufgefaßt werden kann. Betrachten wir beispielsweise die 2-Form

$$k^1 \wedge k^2 \quad \in \Lambda^2(V)$$

Sie leistet dasselbe wie der antimetrischen Tensor

$$A := k^2 \otimes k^1 - k^1 \otimes k^2 \in Skw(V,V^*) \qquad \forall\, v, w \in V\,,$$

denn

$$\begin{aligned} \langle A(v), w\rangle &= \langle [k^2 \otimes k^1 - k^1 \otimes k^2](v), w\rangle \\ &= \langle k^1, v\rangle \langle k^2, w\rangle - \langle k^1, w\rangle \langle k^2, v\rangle \\ &= k^1(v)\, k^2(w) - k^1(w)\, k^2(v) \\ &= k^1 \wedge k^2\,(v, w)\,. \end{aligned}$$

Analog lassen sich auch antimetrische Tensoren k-ter Stufe definieren, die alternierende k-Formen darstellen.

Wir wollen als nächstes den Spezialfall betrachten, daß V ein *inneres Produkt* $G \in Sym^+(V,V^*)$ trägt. Durch G wird auf $\Lambda^k(V)$ ebenfalls ein inneres Produkt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V) \to \mathbb{R}$$

induziert: Seien die folgenden Komponentendarstellungen gegeben

$$f = f_{\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(k)}\, k^{\alpha(1)} \wedge k^{\alpha(2)} \wedge \ldots \wedge k^{\alpha(k)} \in \Lambda^k(V)\,,$$

$$g = g_{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(k)}\, k^{\pi(1)} \wedge k^{\pi(2)} \wedge \ldots \wedge k^{\pi(k)} \in \Lambda^k(V)\,,$$

wobei über alle geordneten k-fachen Kombinationen α und π summiert werden soll. Dann definieren wir

$$\langle f, g\rangle := f_{\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(k)}\, g_{\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(k)}\; k^{\alpha(1)} \wedge \ldots \wedge k^{\alpha(k)}\left(G^{-1}(k^{\pi(1)}), \ldots, G^{-1}(k^{\pi(k)})\right).$$

Für $k = 0$ sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Produkt reeller Zahlen.

Betrachten wir zunächst den Raum $\Lambda^n(V)$ mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Da es sich um einen $\binom{n}{n} = 1$-dimensionalen linearen Raum handelt, ist er den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ isomorph. Zu einer bis auf das Vorzeichen kanonischen isometrischen Isomorphie gelangen wir, wenn wir eine Orthonormalbasis $e \in \Lambda^n(V)$ (Normierung: $\langle e, e\rangle = 1$) mit der 1 der reellen Zahlen identifizieren. Da man ebenso -1 hätte nehmen können, bleibt diese Willkür. Man **orientiert** deshalb $\Lambda^n(V)$ durch die Auszeichnung eines $e \in \Lambda^n(V)$ als (positive) **Orientierung**. Ein solches e kann man sich dadurch konstruieren, daß man eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ in V wählt und definiert

$$e := e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots e_n$$

Es gilt dann

$$\langle e, e\rangle = 1$$

Aus Dimensionsgründen sind allgemein die Räume $\Lambda^k(V)$ und $\Lambda^{n-k}(V)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ isomorph. Sie werden auf kanonische Weise isomorph, wenn V ein orientierter Vektorraum mit innerem Produkt ist. Dann gibt es nämlich einen ausgezeichneten Isomorphismus

$$* : \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)\,,$$

genannt Stern- oder *Hodge*operator. Er ist durch die folgende Gleichung definiert

$$\langle *f, g\rangle := \langle e, f \wedge g\rangle \quad f \in \Lambda^k(V)\,,\ \forall\, g \in \Lambda^{n-k}(V)\,,$$

wobei $e \in \Lambda^n(V)$ die Orientierung ist und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die induzierten inneren Produkte darstellt.

Nach dieser abstrakten Definition sei eine sehr anschauliche Eigenschaft des Stern-Operators gezeigt: ist $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis in V, so bildet $*$ einen Basisvektor

$$e_{\alpha(1)} \wedge e_{\alpha(2)} \wedge \ldots \wedge e_{\alpha(p)} \in \Lambda^p(V)$$

in

$$sgn(\alpha)\, e_{\alpha(p+1)} \wedge e_{\alpha(p+2)} \wedge \ldots \wedge e_{\alpha(n)} \in \Lambda^{n-p}(V)$$

ab, wobei α eine Permutation von $(1, 2, \ldots n)$ ist und $sgn(\alpha)$ ihr Vorzeichen.

Betrachten wir zwei Spezialfälle:

(1) $$g = e \in \Lambda^n(V)\,,\quad f = 1 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad \langle *1, e\rangle = \langle e, e\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad *1 = e$$

(2) $$g = 1 \in \mathbb{R}\,,\quad f = e \in \Lambda^n(V)$$
$$\Rightarrow \quad \langle *e, 1\rangle = \langle e, e\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad *e = 1$$

Der Stern-Operator hat folgende Eigenschaften:

(3) $$\langle *f, g\rangle = (-1)^{(n-p)p}\langle f, *g\rangle \qquad \forall\, f \in \Lambda^p(V)\,,\ \forall\, g \in \Lambda^{n-p}(V)$$

(4) $$\langle *f, *g\rangle = \langle f, g\rangle \qquad \forall\, f, g \in \Lambda^p(V)$$

(5) $$**f = (-1)^{(n-p)p} f \qquad \forall\, f \in \Lambda^p(V)$$

Für ungerade n ist immer $(-1)^{(n-p)p} = +1$.

Im Fall $n = 3$ leistet der Stern-Operator die Zuordnung

$$*: \Lambda^3(V) \to \Lambda^0(V) = \mathbb{R}$$

$$k^1 \wedge k^2 \wedge k^3 \mapsto [k^1, k^2, k^3]\,.$$

die als **Spatprodukt**

$$[\cdot,\cdot,\cdot] : V^* \times V^* \times V^* \to \mathbb{R}$$

bezeichnet wird. Es erfüllt für alle $A \in Lin(V^*,V^*)$ die wichtige **Determinanten-Regel**:

$$[A(\cdot), A(\cdot), A(\cdot)] = [\cdot,\cdot,\cdot]\ det(A) .$$

Das **Kreuzprodukt** definiert man mittels

$$*: \Lambda^2(V) \to \Lambda^1(V)$$

$$k^i \wedge k^j \mapsto (k^i \times k^j) ,$$

also als

$$\cdot \times \cdot : V^* \times V^* \to V^* .$$

Sei weiterhin V dreidimensionaler linearer Raum mit innerem Produkt und

$$A = a^{ij}\, e_i \otimes e_j \quad \in Lin(V,V)$$

und dessen antimetrischem Anteil

$$A^a := \tfrac{1}{2}\,(A - A^*) = \tfrac{1}{2}\, a^{ij}\,(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) \quad \in Skw(V,V) ,$$

so gilt

$$A^a(v) = \tfrac{1}{2}\, u \times v \qquad \forall\, v \in V .$$

mit dem **axialen Vektor** von A

$$u = a^{ij}\, e_j \times e_i =: axi(A) ,$$

denn

$$\begin{aligned}
2 < A^a(v), w > &= < a^{ij}\,(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)(v), w > \\
&= a^{ij}\,(<e_j, v> <e_i, w> - <e_i, v> <e_j, w>) \\
&= a^{ij}\ e_j \wedge e_i\,(v, w) \\
&= a^{ij}\ <e_j \wedge e_i, v \wedge w> \\
&= a^{ij}\ <*(e_j \wedge e_i), *(v \wedge w)> \\
&= a^{ij}\ <(e_j \times e_i), *(v \wedge w)> \\
&= <u, *(v \wedge w)> \\
&= <*(v \wedge w), u> \\
&= <e, v \wedge w \wedge u> \\
&= <e, u \wedge v \wedge w> \\
&= <*(u \wedge v), w> \\
&= <u \times v, w> \qquad \forall\, v, w \in V .
\end{aligned}$$

Man kann im Dreidimensionalen auch ein Kreuzprodukt zwischen Vektoren v und Tensoren T definieren:

$$T \times v = (t^{ij}\, e_i \otimes e_j) \times (v^k\, e_k) := t^{ij}\, v^k\, e_i \otimes (e_j \times e_k)$$

und

$$v \times T = (v^k\, e_k) \times (t^{ij}\, e_i \otimes e_j) := t^{ij}\, v^k\, (e_k \times e_i) \otimes e_j .$$

Nimmt man für T eine einfache Dyade $a \otimes b$, so gilt

$$(a \otimes b) \times v = a \otimes (b \times v)$$

$$v \times (a \otimes b) = (v \times a) \otimes b .$$

Es läßt sich schnell nachrechnen, daß das Kreuzprodukt des Einstensors mit einem beliebigen Vektor immer antimetrisch ist:

$$v \times I_V = I_V \times v \quad \in Skw(V,V) \qquad \forall\, v \in V .$$

Es gilt damit für den antimetrischen Anteil

$$A^a := \tfrac{1}{2}\,(A - A^*)$$

eines Tensors $A \in Lin(V,V)$:

$$A^a = \tfrac{1}{2}\, axi(A) \times I_V = \tfrac{1}{2}\, I_V \times axi(A) .$$

3. Euklidische Räume

Empfohlene Literatur: NOLL (1964, 1973), WANG/ TRUESDELL

EUKLID (etwa 365 - 300 v.u.Z.)

Ziel dieses Kapitels ist es, ein geeignetes mathematisches Objekt einzuführen, das der klassischen *euklid*ischen Vorstellung des uns umgebenden physikalischen Raumes entspricht, in dem wir Längen und Winkel messen können. In der Literatur wird dies meistens dadurch erreicht, daß man ein kartesisches Koordinatensystem wählt, damit den Raum in den $\mathbb{R}^3$ abbildet, und dort mittels seiner Standardstruktur Geometrie betreibt.

Diese Vorgehensweise hat den Nachteil, daß ein Koordinatensystem willkürlich ausgezeichnet wird und man die Invarianz der Untersuchungen gegen Koordinatensystem-Wechsel jedesmal sicherstellen muß. Dieser Nachteil wird nur zu einem Teil beseitigt, wenn man den Raum durch (willkürliche) Auszeichnung eines Bezugspunktes in den linearen Raum der *Ortsvektoren* abbildet, da in der Natur ein solcher nicht ausgezeichnet ist.

Erst die Einführung des *Euklid*ischen Raumes, die zunächst etwas aufwendiger ist als die oben beschriebenen Wege, kommt ohne willkürliche Auszeichnungen aus und damit auch ohne spätere Invarianzpostulate und Nachweise, gestattet uns aber in gleicher Weise, *Euklid*ische Geometrie zu betreiben.

Ausgangspunkt ist die Vorstellung, die Punkte des betrachteten Raumes identifizieren zu können und ihren Abstand zueinander (momentan) vermessen zu können. Außerdem werden wir später noch fordern müssen, daß er - grob gesagt - eine unbegrenzte Ausdehnung und nur endlich viele voneinander unabhängige Richtungen besitzt.

Sei (E, d) ein *metrischer Raum*. Seine Automorphismen sind die (bijektiven) **Isometrien**:

$$J := \{ \alpha : E \to E \mid \alpha \text{ surjektiv}, d(x,y) = d(\alpha(x), \alpha(y)) \ \forall x, y \in E \}.$$

Aus der Surjektivität einer Isometrie folgt mit der Abstandstreue sofort ihre Bijektivität (= Invertierbarkeit). J bildet eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderschaltung. Da die Identität auf E in J enthalten ist, existiert in jedem metrischen Raum eine nicht-leere Isometriegruppe.

Wir interessieren uns besonders für eine spezielle Untergruppe von J, deren Existenz allerdings nicht für jeden metrischen Raum gesichert ist.

D 3.1: Sei J Isometriegruppe eines metrischen Raumes (E, d).
Eine Untergruppe V von J heißt **Translationsgruppe**, falls gilt
(mit " + " wird die Hintereinanderschaltung bezeichnet):

(T1) V ist *kommutative Gruppe*,
d. h. $u + v = v + u \in V \qquad \forall u, v \in V;$

(T2) V ist *transitiv*,
d. h. $\forall x, y \in E$ existiert ein $u \in V$ mit $u(x) = y$;

(T3) V ist *fixpunktfrei*,
d. h. wenn $v(x) = x$ für ein $x \in E$, so folgt: $v = I_E$;

(T4) V ist *Vektorraum*
bez. " + " und einer *Skalarenmultiplikation*

$$\mathbb{R} \times V \to V$$

mit einem *inneren Produkt*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

verträglich mit der Metrik, d. h.

$$d(x,y)^2 = \langle u, u \rangle \qquad \forall x, y \in E \text{ mit } u(x) = y.$$

Wegen der linearen Struktur von V ist es üblich, für die inverse Translation $-v := v^{-1}$ und für das neutrale Element $o := I_E$ zu schreiben.

Für $v \in V$ und $x, y \in E$ wollen wir statt $y = v(x)$ auch schreiben $v = \vdash x, y \dashv$. Gemäß *(T2)* existiert für alle $x, y \in E$ auch $\vdash x, y \dashv$. Darüber hinaus ist die Zuordnung

$$(x, y) \mapsto \vdash x, y \dashv$$

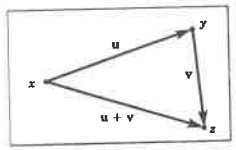
auch eindeutig: durch die Angabe von zwei Punkten allein ist die Abbildung als ganze determiniert. . Gäbe es nämlich $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1(x) = y = v_2(x)$, so folgt aus der Gruppeneigenschaft von V, daß

$$v_1^{-1}\, v_1(x) = x = v_1^{-1}\, v_2(x)$$

und mit (*T3*)

$$v_1^{-1}\, v_2 = I_E$$

d. h. $v_1 = v_2$.



Es sei darauf hingewiesen, daß wegen der Verträglichkeitsbedingung in (*T4*) das innere Produkt auf V durch die Metrik eindeutig gegeben ist. Mit $x, y, z \in E$ und $u = \vdash x, y \dashv$ und $v = \vdash y, z \dashv$ folgt nämlich:

$$\begin{aligned} d(x,z)^2 &= \langle u + v\,,\, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle u, v \rangle \\ &= d(x,y)^2 + d(y,z)^2 + 2 \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \langle u, v \rangle = \tfrac{1}{2} [\, d(x,z)^2 - d(x,y)^2 - d(y,z)^2] \ .$$

(Cosinussatz)

Wegen der Linearität eines inneren Produktes folgt, daß ebenso die Skalarenmultiplikation eindeutig ist.

Es gilt dann der

S 3.2: **Eindeutigkeitssatz** (NOLL 1964)
Für einen metrischen Raum gibt es höchstens eine Translationsgruppe. Deren Skalarenmultiplikation und inneres Produkt sind dann determiniert.

B: Wir nehmen an, V_1 und V_2 seien zwei Translationsgruppen eines metrischen Raumes (E, d). Wir wählen nun ein beliebiges festes $q \in E$ und definieren eine Abbildung

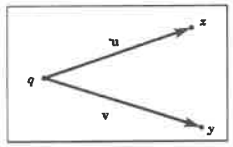
$$\begin{aligned} f_q : V_1 &\to V_2 \\ v_1 &\mapsto v_2 \ , \end{aligned}$$

die jedem $v_1 \in V_1$ dasjenige $v_2 = f_q(v_1) \in V_2$ zuordnet, das q in $v_1(q)$ transportiert:

$$f_q(v_1) = \vdash q, v_1(q) \dashv_2 \ .$$

f_q ist bijektiv und leistet für $v_1 = I_E$

$$f_q(I_E) = I_E \ .$$



Seien $x, y \in E$ beliebig und $u, v \in V_1$ derart, daß

$$u(q) = x \ , \quad v(q) = y \ ,$$

dann gelten

$$(f_q(u))(q) = x \ , \quad (f_q(v))(q) = y \ .$$

Aus der Verträglichkeit der inneren Produkte $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von V_1 und $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ von V_2 mit der Metrik d folgt

$$\begin{aligned} d^2(x,y) &= \langle u - v\,,\, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2 \langle u, v \rangle \\ &= \langle\!\langle f_q(u) - f_q(v)\,,\, f_q(u) - f_q(v) \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle f_q(u), f_q(u) \rangle\!\rangle + \langle\!\langle f_q(v), f_q(v) \rangle\!\rangle - 2 \langle\!\langle f_q(u), f_q(v) \rangle\!\rangle \ . \end{aligned}$$

Die quadratischen Terme heben sich wegen der Verträglichkeit auf, womit sich die inneren Produkte entprechen:

$$\langle u, v \rangle = \langle\!\langle f_q(u), f_q(v) \rangle\!\rangle \ .$$

Dasselbe gilt für die Skalarenmultiplikationen $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V_1$:

$$\begin{aligned} \langle\!\langle f_q(\alpha u + \beta w)\,,\, f_q(v) \rangle\!\rangle &= \langle \alpha u + \beta w, v \rangle \\ &= \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle w, v \rangle \\ &= \alpha \langle\!\langle f_q(u), f_q(v) \rangle\!\rangle + \beta \langle\!\langle f_q(w), f_q(v) \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \alpha f_q(u) + \beta f_q(w), f_q(v) \rangle\!\rangle \ , \end{aligned}$$

und somit

$$\langle f_q(\alpha u + \beta w) - \alpha f_q(u) - \beta f_q(w) \,,\, f_q(v) \rangle = 0.$$

Aus den Axiomen eines inneren Produkts folgt die Linearität von f_q.
Seien $v \in V_1$ und $x \in E$ beliebig, so gilt mit $u := \vdash q, x \dashv \in V_1$

$$\begin{aligned} v(x) &= v[u(q)] = [u + v](q) = [f_q(u + v)](q) \\ &= [f_q(v) + f_q(u)](q) = f_q(v)[f_q(u)(q)] \\ &= [f_q(v)](x) \end{aligned}$$

d. h. $f_q(v)$ leistet dasselbe wie v für alle $x \in E$ unabhängig von der speziellen Wahl von $q \in E$. Damit sind V_1 und V_2 identisch. ☒

D 3.3: Ein metrischer Raum (E, d) mit Translationsgruppe V endlicher Dimension heißt ***Euklidischer* Raum**.

Man identifiziert die **Dimension** eines *Euklid*ischen Raumes E mit derjenigen seiner Translationsgruppe V.

Durch Auszeichnung eines beliebigen Punktes $o \in E$, genannt **Bezugspunkt** (BZP), erhalten wir eine Bijektion ι_o zwischen E und seinen Translationsraum V durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \iota_o : E &\to V \\ x &\mapsto \vdash o, x \dashv \end{aligned}$$

die obendrein mit der Metrik verträglich ist:

$$d(x,y)^2 = \langle \vdash o, x \dashv - \vdash o, y \dashv , \vdash o, x \dashv - \vdash o, y \dashv \rangle \qquad \forall x, y \in E$$

Die Bilder von ι_o heißen **Ortsvektoren**. Wegen der linearen Struktur von V ist es oft praktischer, mit Ortsvektoren anstatt mit Punkten zu arbeiten, muß dabei aber immer die Abhängigkeit von der willkürlichen Wahl des Bezugspunktes bedenken.

Durch Wahl eines Bezugspunktes und einer Vektorbasis $\{v_i\}$ in V können wir jedem Punkt $x \in E$ eindeutig die Komponenten seines Ortsvektors bez. $\{v_i\}$ zuordnen. Damit erhalten wir eine Bijektion zwischen $E \simeq V$ und dem $\mathbb{R}^n$, die linear

ist. Ist die gewählte Basis obendrein Orthonormalbasis, so ist diese Bijektion auch Isometrie bezüglich der Standardmetrik des $\mathbb{R}^n$. Wir nennen das Paar (Bezugspunkt, Basis) **Bezugssystem** (BZS) von E. Dabei sind alle BZSe von E gleichberechtigt, keines ist ausgezeichnet.

Zusammenfassung: Wir können folgende Identifikationen vornehmen:

E	$\simeq V$	nach Auszeichnung eines Bezugspunktes
	$\simeq \mathbb{R}^n$	nach Auszeichnung einer Basis

oder gleich

E	$\simeq \mathbb{R}^n$	nach Auszeichnung eines BZSs.

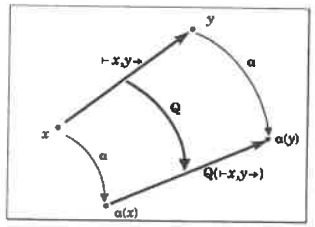
Über dem Translationsraum V, den wir wegen des inneren Produkts mit seinem dualen Raum V^* identifizieren, können wir den Raum der alternierenden Multilinearformen errichten. Üblicherweise orientiert man ihn willkürlich, z. B. für $n = 3$ mittels der "Rechte-Hand-Regel".

Wir wollen als nächstes klären, wie sich die Translationsgruppe unter Isometrien transformiert.

S, D 3.4: Sei $\alpha \in J$ Isometrie eines *Euklid*ischen Raumes E mit Translationsraum V. Dann ist für alle $v \in V$ die Verknüpfung $\alpha v \alpha^{-1}$ wieder eine Translation und die Zuordnung

$$Q : v \mapsto \alpha v \alpha^{-1}$$

aus $Ort(V)$.
Q heißt die durch α **induzierte Drehung des Translationsraumes.**



B: Wir zeigen zunächst, daß die Menge $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ eine Translationsgruppe ist, weil sie die vier Axiome erfüllt.

(T1) $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ ist *kommutative Gruppe*,
denn mit $u, v \in V$ und den Abbildungen $\underline{u} := \alpha\, u\, \alpha^{-1} \in \alpha\, V\, \alpha^{-1}$ und $\underline{v} := \alpha\, v\, \alpha^{-1} \in \alpha\, V\, \alpha^{-1}$ folgt:

$$\underline{u} + \underline{v} := \underline{u}\,\underline{v} = \alpha\, u\, \alpha^{-1}\, \alpha\, v\, \alpha^{-1} = \alpha\, u\, v\, \alpha^{-1} = \alpha\, v\, u\, \alpha^{-1} = \alpha\, v\, \alpha^{-1}\, \alpha\, u\, \alpha^{-1}$$
$$= \underline{v} + \underline{u} \in \alpha\, V\, \alpha^{-1}$$

(T2) $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ ist *transitiv*
denn: seien $x, y \in E$ beliebig und $\underline{x} := \alpha^{-1}(x)$, $\underline{y} := \alpha^{-1}(y)$, so gibt es ein $u \in V$ mit $u(\underline{x}) = \underline{y} = u\, \alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(y) \Rightarrow \alpha\, u\, \alpha^{-1}(x) = y$

(T3) $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ ist *fixpunktfrei*
denn: sei $x \in E$ derart, daß $\alpha\, v\, \alpha^{-1}(x) = x$ für ein $v \in V$, so folgt
$v\, \alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(x) \Rightarrow v = I_E \Rightarrow \alpha\, v\, \alpha^{-1} = \alpha\, \alpha^{-1} = I_E$

(T4) $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ ist *Vektorraum*
Wir bilden

$$\langle \alpha\, u\, \alpha^{-1}, \alpha\, v\, \alpha^{-1} \rangle := \tfrac{1}{4}[\, d(\alpha(x), \alpha(z))^2 - d(\alpha(x), \alpha(y))^2 - d(\alpha(y), \alpha(z))^2]$$
$$= \tfrac{1}{4}[\, d(x, z)^2 - d(x, y)^2 - d(y, z)^2]$$
$$= \langle u, u \rangle \ .$$

Die Addition auf $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ wurde unter *(T1)* erklärt. Die Skalarenmultiplikation sei $\beta(\alpha\, u\, \alpha^{-1}) := \alpha\, (\beta u)\, \alpha^{-1}$. Dann ist auch $\langle , \rangle$ ein inneres Produkt.

Also ist auch $\alpha\, V\, \alpha^{-1}$ eine Translationsgruppe. Nach dem **S 3.2** fällt diese aber mit V zusammen. Q ist nach der Definition der Addition unter *(T1)* und der Skalarenmultiplikation unter *(T4)* linear und nach der Definition des inneren Produktes unter *(T4)* obendrein orthogonal. ⊠

Ist die Isometrie α orientierungstreu, so gilt dies auch für Q , d. h.

$$Q \in Ort^+(V) \ .$$

4. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Empfohlene Literatur: HU, BRICKELL/ CLARK, SPIVAK

Ein **Homöomorphismus** (topologische Abbildung) zwischen topologischen Räumen ist stetig und stetig invertierbar, d. h. er bildet (nur) offene Mengen in offene Mengen ab.

D 4.1: Eine n-dimensionale **Mannigfaltigkeit** M ist ein topologischer *Hausdorff*-Raum, dessen Punkte $x \in M$ offene Umgebungen U_x besitzen, die homöomorph zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind, d. h. es gibt einen Homöomorphismus ϕ zu U_x , so daß $\phi(U_x)$ offen im $\mathbb{R}^n$ ist. Das Paar (U_x, ϕ) heißt **Karte** um x .

Sind p^i die Projektionen des $\mathbb{R}^n$:

$$p^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ ,$$

so heißen die n Abbildungen

$$\phi^i := p^i\, \phi : U_x \to \mathbb{R}$$

Koordinaten um x .

Bei einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit **mit Rand** sind die offenen Umgebungen ihrer Elemente entweder zu $\mathbb{R}^n$ oder zu $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{0+}$ homöomorph. Erstere heißen **innere Punkte**, letztere **Randpunkte**.

Es ist nicht immer möglich, ganz M topologisch in den $\mathbb{R}^n$ abzubilden (s. Sphäre, Torus) und so die Mannigfaltigkeit mit nur einer Karte zu beschreiben.
Sind (U_x, ϕ) und (U_y, ψ) Karten um innere Punkte $x, y \in M$ und ist $U_x \cap U_y$ nicht leer, so heißt die Abbildung $\psi\, \phi^{-1}$ **Kartenwechsel**.

D 4.2: Ein System von Karten

$$A = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), \ldots\}$$

heißt **Atlas** der Mannigfaltigkeit M , falls es ganz M überdeckt, d. h. falls

$$\bigcup_i U_i = M \ .$$

Sind alle Kartenwechsel aus einem Atlas k-mal stetig differenzierbar ($k = 1, 2, \dots, \infty$), so heißt der Atlas **differenzierbare Struktur** und M **differenzierbare Mannigfaltigkeit** der Klasse C^k.

Wir werden im weiteren nur C^∞-Mannigfaltigkeiten betrachten. Seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten A_M bzw. A_N. Dann heißt eine Abbildung

$$f : M \to N$$

k-mal differenzierbar, falls die Abbildungen

$$\psi \, f \, \phi^{-1}$$

für alle Karten $(U_\phi, \phi) \in A_M$ und $(U_\psi, \psi) \in A_N$ überall, wo sie definiert sind, k-mal differenzierbar sind.

f heißt **Diffeomorphismus**, falls f

- Homöomorphismus ist und
- f und f^{-1} beliebig oft differenzierbar sind.

4.1 Tangential- und Kotangentialraum

Sei L_x die Menge der reellwertigen C^∞-Funktionen, die auf Umgebungen von $x \in M$ definiert sind. Wir führen auf L_x eine Äquivalenzrelation ein:

$g \sim f$: es existiert eine offene Umgebung U_x von x, so daß

$$g|_{U_x} = f|_{U_x} \quad .$$

Die Äquivalenzklassen bez. $\sim$ heißen **Funktionskeime** in x.

Die natürliche Abbildung von $\sim$ sei p, und der Quotientenraum sei

$$G_x := L_x / \sim \quad .$$

Wir können auf G_x eine (kommutative) Algebra einführen, indem wir die Addition, Multiplikation und Skalarenmultiplikation an Repräsentaten im Wertebereich $\mathbb{R}$ durchführen und die Ergebnisfunktionen mit p in G_x abbilden.

Wir betrachten nun einen Unterraum des Duals $G_x^* := Lin(G_x, \mathbb{R})$, der durch die *Leibniz*regel gekennzeichnet ist.

D 4.3: Ein **Tangentenvektor** ist eine Abbildung

$$t : G_x \to \mathbb{R} \quad ,$$

- die *linear* ist:

$$t(\alpha g + \beta f) = \alpha t(g) + \beta t(f) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in G_x \ ,$$

- und die der *Leibniz-Regel (Produktregel)* genügt:

$$t(g\, f) = t(g)\, f(x) + t(f)\, g(x) \qquad \forall f, g \in G_x \ .$$

Die Menge aller Tangentenvektoren heißt **Tangentialraum** T_xM in x an M.

Man macht sich leicht klar, daß die partiellen Ableitungen $\partial/\partial\phi^i$ bez. eines Koordinatensystems mittels

$$\partial/\partial\phi^i(g)|_x := \partial(g\,\phi^{-1})/\partial\phi^i|_{\phi(x)} \qquad \forall g \in g \in G_x$$

Tangentenvektoren sind. T_xM trägt eine lineare Struktur vermittels

$$(\alpha t_1 + \beta t_2)(g) := \alpha t_1(g) + \beta t_2(g) \qquad \forall t_1, t_2 \in T_xM, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall g \in G_x \ ,$$

d. h. durch die entsprechenden Verknüpfungen im Wertebereich. Damit bildet T_xM einen Vektorraum.

Wir definieren auf G_x eine Äquivalenzrelation $\approx$:

$$g \approx f : \quad t(g - f) = 0 \qquad \forall t \in T_xM \ .$$

Sei q die natürliche Abbildung bez. $\approx$.

$$\begin{tikzcd} L_x \arrow[d, "p"] & \\ G_x \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{R} & T_x{}^*M \end{tikzcd}$$

D 4.4: Der Quotientenraum

$$T_x{}^*M := G_x/\approx$$

heißt **Kotangentialraum** in x an M.

Man erzeugt auch auf $T_x{}^*M$ eine lineare Struktur durch:

$$\alpha\, k^1 + \beta\, k^2 := q(\alpha f_1 + \beta f_2) \qquad \forall\, k^1, k^2 \in T_x{}^*M, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

mit $q(f_1) = k^1$, $q(f_2) = k^2$, $f_1, f_2 \in G_x$.

Die Verknüpfung

$$d := q\, p : L_x \to T_x{}^*M$$

ordnet jeder Funktion f die Funktionenklasse $d(f)$ mit derselben Ableitung zu. Man schreibt

$$df := d(f)$$

und nennt es das **Differential** von f.

Da die Koordinaten ϕ^i um x einer Karte auch aus L_x sind, können wir speziell auch immer $d\phi^i \in T_x{}^*M$ bilden.

Es lassen sich für differenzierbare Mannigfaltigkeiten M der Dimension n folgende Sätze zeigen:

S 4.5: T_xM und $T_x{}^*M$ sind duale Vektorräume (ohne inneres Produkt) der Dimension n vermittels der Vorschrift

$$df(t) := t\,p(f) \qquad \forall\, t \in T_xM, \forall\, f \in L_x.$$

S, D 4.6: Seien ϕ^i Koordinaten um $x \in M$. Dann sind:

- $\{\partial/\partial\phi^1, \partial/\partial\phi^2, \dots, \partial/\partial\phi^n\}$ eine Basis von T_xM: die **Tangentenbasis**,
- $\{d\phi^1, d\phi^2, \dots, d\phi^n\}$ eine Basis von $T_x{}^*M$: die **Gradientenbasis**,

Die Basen sind dual, d. h. $< \partial/\partial\phi^i, d\phi^j > = \delta_i{}^j$. Sie werden ***Gauß*sche** oder **natürliche Basen** von $\{\phi^i\}$ genannt.

Da alle Karten und damit auch alle Koordinatensysteme um x gleichberechtigt sind, gibt es auch keine ausgezeichnete Basis in T_xM oder in $T_x{}^*M$.

Alternative:
Oft wird der Tangentialraum in der Literatur auch über *Wege (Kurven)* eingeführt, was den Vorteil hat, auch für Mannigfaltigkeiten nur endlicher Differenzierbarkeitsklasse verallgemeinerbar zu sein.

Ein **Weg** ist eine differenzierbare Abbildung einer reellen Nullumgebung $I \subset \mathbb{R}$

$$w : I \to M.$$

Sei $x \in M$ und $w(0) = x$ und $f \in L_x$, so können wir in $t = 0$ die Ableitung

$$d/dt\,(f\,w)$$

bilden. Zwei Wege w_1 und w_2 heißen äquivalent, wenn für alle C^1-Funktionen f, die in einer Umgebung von x definiert sind, in x gilt

$$d/dt\,(f\,w_1) = d/dt\,(f\,w_2).$$

Man kann zeigen, daß jeder Äquivalenzklasse von Wegen auf kanonische Weise ein Tangentenvektor bijektiv zugeordnet werden kann. Den Kotangentialraum kann man äquivalent als Dual des Tangentialraumes einführen.

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$f : M \to N$$

Funktion der Klasse C^∞. Sei $x \in M$ und $y = f(x) \in N$. Wir definieren:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\xi f"'] & N \arrow[d, "\xi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

durch

$$f^\circ : L_y \to L_x$$
$$\xi \mapsto \xi f \qquad \forall\, \xi \in L_y.$$

Dann gibt es genau eine Abbildung, genannt **Kodifferential**:

$$f^* : T_y{}^*N \to T_x{}^*M,$$

so daß

$$d_x f^0 = f^* d_y \ ,$$

ist, d. h.

$$d_x(\xi, f) = f^* d_y(\xi) \ , \qquad \forall \xi \in L_y \ ,$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
L_x \arrow[d, "d_x"] & L_y \arrow[l, "f^0"'] \arrow[d, "d_y"] \\
T_x{}^*M & T_y{}^*N \arrow[l, "f^*"'] \\
T_xM \arrow[r, "f_*"'] & T_yN
\end{tikzcd}$$

sowie eine Abbildung, genannt **Differential** von f

$$f_* : T_xM \to T_yN$$

mit

$$\langle f_*(t), k \rangle = \langle t, f^*(k) \rangle \qquad \forall t \in T_xM, \forall k \in T_y{}^*N \ .$$

f^* und f_* sind linear und erfüllen die *Kettenregeln*:

$$g : M \to N \quad \text{und} \quad f : N \to O$$

$$h := f g \ : M \to O$$

$$\Rightarrow \qquad h^* = g^* f^*$$

$$\Rightarrow \qquad h_* = f_* g_* \ .$$

Das Differential wird also als duale Abbildung des Kodifferentials eingeführt, d. h. $f_* := (f^*)^*$. Damit gilt ebenfalls $f^* = (f_*)^*$, d. h. der obere Stern symbolisiert wie in Abschnitt 2 die Dualisierung einer linearen Abbildung.

Für konkrete Berechnungen benötigen wir die Darstellung des Differentials bezüglich (beliebig gewählter) Karten. Wir wählen auf M eine Karte (U_x, ϕ) und auf N eine Karte (U_y, ψ) . Dann ist

$$\psi f \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

im $\mathbb{R}^m$ definierbar mit $m = dim(M)$, $n = dim(N)$. Wir schließen die i-te Projektion p^i an und erhalten

$$f^i := p^i \psi f \phi^{-1} = \psi^i f \phi^{-1} \ .$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\psi f \phi^{-1}"] \arrow[dr, "f^i"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "p^i"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$f_* (\partial/\partial\phi^j) = \partial f^i/\partial\phi^j \ \partial/\partial\psi^i \ ,$$

woraus wir die Darstellung des folgenden Satzes entnehmen:

S 4.7: Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten,

$$f : M \to N$$

differenzierbare Abbildung, (U_x, ϕ) Karte um $x \in M$ und (U_y, ψ) Karte um $y = f(x) \in N$. Dann hat das Differential von f die Darstellung

$$\boxed{f_* = \frac{\partial(\psi^i f \phi^{-1})}{\partial\phi^k} \ \partial/\partial\psi^i \otimes d\phi^k}$$

und das Kodifferential die folgende

$$\boxed{f^* = \frac{\partial(\psi^i f \phi^{-1})}{\partial\phi^k} \ d\phi^k \otimes \partial/\partial\psi^i}$$

Die Koeffizientenmatrix $[\partial(\psi^i f \phi^{-1})/\partial\phi^k]$ heißt **Funktional- oder *Jacobi*-Matrix**. Ihr Rang heißt **Rang** des Differentials; er ist unabhängig von der Wahl der Karte.

4.2 Bündel, Felder und Differentialformen

Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit, $x \in M$,

T_xM Tangentialraum in x an M,

$T_x{}^*M$ Kotangentialraum in x an M.

Eine Abbildung heißt *(tangentiales) Vektorfeld*, falls sie jedem $x \in M$ ein Element aus T_xM zuordnet. Um den Bildbereich dieser Abbildung angeben zu können, benötigt man den Begriff des *Tangential-Bündels*. Da *Bündel* später noch in einem anderen Zusammenhang benötigt werden, definieren wir zunächst allgemeine *Bündel* und betrachten dann spezielle Beispiele, die auf Mannigfaltigkeiten definiert sind.

D 4.8: Ein **Bündel** $\langle F, B, \pi \rangle$ besteht aus einer Menge F, einem **Basis-Raum** B und einer Surjektion

$$\pi : F \to B,$$

genannt **Fußpunkt-Projektion**. Die Mengen

$$\pi^{-1}(t) \qquad t \in B$$

heißen **Faser** über t. Eine Abbildung

$$v : B \to F$$

heißt **Schnitt des Bündels**, falls

$$\pi v = I_B$$

ist.

Ein Element $X \in F$ ist gekennzeichnet durch

- seinen Fußpunkt $\pi(X) \in B$
- und ein Element der Faser $\pi^{-1}\pi(X)$.

Trivialerweise ist F die disjunkte Vereinigung aller seiner Fasern

$$F = \cup_{t \in B}\, \pi^{-1}(t).$$

Oft bezeichnet man deshalb verkürzt F selbst als Bündel.

Tragen die Fasern eine Struktur, so heißt ein Raum, der zu allen Fasern isomorph ist, **typische Faser**.

Als einfaches Beispiel betrachten wir das **Produktbündel** über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M:

$$F = M \times \mathbb{R}^k.$$

M ist Basisraum und

$$\pi : M \times \mathbb{R}^k \to M$$

die natürliche Projektion. Der $\mathbb{R}^k$ ist typische Faser. Ein Schnitt des Produktbündels für $k = 1$ heißt **Skalarfeld**.

Ein anderes Exemplar bildet das **Vektorbündel** über einer Mannigfaltigkeit M: In diesem Fall sind der Basisraum eine Mannigfaltigkeit und die Fasern Vektorräume gleicher Dimension. Da diese zueinander isomorph sind, ist jeder von ihnen typische Faser. Wichtigstes Beispiel dafür ist das **Tangentialbündel** TM über einer Mannigfaltigkeit. Hierbei sind

$$TM := \cup_{X \in M}\, T_XM$$

$$\pi^{-1}(X) = T_XM$$

und π die Zuordnung eines Elementes aus T_XM zu X. Seien nun $\langle U, \phi \rangle$ Karte der C^∞-Struktur von M und

$$\psi : T_XM \to \mathbb{R}^n$$

diejenige Abbildung, die jedem Tangentenvektor v seine Komponenten v_i bez. der Tangentenbasis $\{\partial/\partial\phi_i\}$ zuordnet. Dann ist $\langle \pi^{-1}(U), \xi \rangle$ mit

$$\xi : \pi^{-1}(U) = \cup_{X \in U} \{X\} \times T_XM \to \mathbb{R}^{2n},$$

$$(X, t) \mapsto (\phi(X), \psi(t))$$

Karte des Tangentialbündels, das auf natürliche Weise eine C^∞-Struktur trägt und somit selbst eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Auf analoge Weise erzeugt man sich folgende Bündel:

$$T^*M := \cup_{X \in M}\, T_X{}^*M$$

$$(\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^*M) := \cup_{X \in M}\, (\otimes^p T_XM) \otimes (\otimes^q T_X{}^*M)$$

$$\Lambda^k(TM) := \cup_{X \in M}\, \Lambda^k(T_XM)$$

$$\Lambda(TM) := \cup_{X \in M}\, \Lambda(T_XM),$$

die alle auf natürliche Weise differenzierbare Mannigfaltigkeiten bilden, wobei die linearen Operationen fußpunktweise ausgeführt werden. Damit sind dann auch Differenzierbarkeitsklassen von Schnitten definiert. Man nennt einen Schnitt des Bündels

TM :	**Vektorfeld**
T^*M :	**Kovektorfeld**
$(\otimes^p TM)\otimes(\otimes^q T^*M)$:	**(p,q)-Tensorfeld**
$\Lambda^k(TM)$:	**Differential-k-Form.**

Bezüglich der natürlichen Basen $\{\partial/\partial\phi^i\}$ bzw. $\{d\phi^i\}$ eines Koordinatensystems können alle diese Felder lokal dargestellt werden durch ihre Komponentenfunktionen von den n Koordinaten. Die Differenzierbarkeits-Klassen der Felder entsprechen dann der Differenzierbarkeit dieser Komponentenfunktionen.

Uns werden insbesondere die Differential-n-Formen auf M interessieren. Sie können wir im Bereich einer Karte (U_X,ϕ) immer darstellen als

$$\begin{aligned} dm &= \mu_\phi(\underline{x})\; d\phi^1(\underline{x}) \wedge d\phi^2(\underline{x}) \wedge \ldots \wedge d\phi^n(\underline{x}) \\ &= \mu_\phi(\underline{x})\; (\wedge_i\, d\phi^i(\underline{x})) \qquad\qquad \forall\, \underline{x} \in U_X . \end{aligned}$$

Bei Kartenwechsel gelten die folgenden Transformationsgleichungen:

$$dm = \mu_\phi\,(\wedge_i\, d\phi^i) = \mu_\psi\,(\wedge_i\, d\psi^i)$$

mit

$$\mu_\psi = \mu_\phi\, J_{\phi\psi^{-1}}$$

worin

$$J_{\phi\psi^{-1}} := det\left[\partial(\phi^i\,\psi^{-1})/\partial\psi^j\right]$$

die Funktional-Determinante (*Jacobi*-) des Kartenwechsels ist. μ_ϕ, μ_ψ und $J_{\phi\psi^{-1}}$ sind abhängig von $\underline{x} \in U_\phi \cap U_\psi$ (Skalarfelder).

Eine Mannigfaltigkeit heißt **orientierbar**, falls eine nirgends verschwindende C^∞-Differential-n-Form existiert. Eine Mannigfaltigkeit heißt **orientiert**, falls eine solche Form (als "positiv orientiert") ausgezeichnet ist. Gleichbedeutend ist ein Atlas, bei dem die Funktional-Determinanten aller Kartenwechsel positiv sind.

Alle diese Begriffe benötigen wir, um auf Mannigfaltigkeiten integrieren zu können.

Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit, (U_ϕ,ϕ) eine positiv orientierte Karte, $G \subset U_\phi$ ein kompaktes Gebiet in M und dm eine glatte Differential-n-Form mit der Darstellung

$$dm = \mu_\phi\,(\wedge_i\, d\phi^i)$$

in U_ϕ. Wir definieren das Integral von dm über G als

$$\int_G dm := \int_{\phi(G)} \mu_\phi\, \phi^{-1}\, dV .$$

Wir integrieren also (im *Riemann*schen oder *Lebesgue*schen Sinne) über eine in $\mathbb{R}^n$ definierte reelle Funktion $\mu_\phi\,\phi^{-1}$ über das Standardvolumenelement dV des $\mathbb{R}^n$. Um zu zeigen, daß die Definition unabhängig von der gewählten Karte ist, wählen wir eine zweite Karte (U_ψ, ψ) mit $G \subset U_\psi$. Wir verwenden erstens die Transformationsformel für die Komponenten einer n-Form unter der Koordinaten-Transformation $\phi\,\psi^{-1}$:

$$\mu_\psi = \mu_\phi\, J_{\phi\psi^{-1}} ,$$

wobei $J_{\phi\psi^{-1}}$ die Funktional - Determinante des Koordinatenwechsels ist. Zweitens gilt die Transformationsregel für Integrale im $\mathbb{R}^n$ aus der Analysis:
Seien $\phi^i(\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^n)$ und $\psi^i(\phi^1,\phi^2,\ldots,\phi^n)$ die Koordinaten-Transformationen in beiden Richtungen, A_ϕ Integrationsgebiet im Koordinaten-Raum von ϕ^i und A_ψ dessen Transformierte in den Koordinaten-Raum von ψ^i. Dann gilt bekanntlich für integrable Funktionen der Koordinaten $f_\phi(\phi^1,\phi^2,\ldots,\phi^n)$

$$\int_{A_\phi} f_\phi(\phi^1,\ldots,\phi^n)\; dV = \int_{A_\psi} f_\psi(\psi^1,\ldots,\psi^n)\; dV$$

mit

$$f_\psi(\psi^1,\ldots,\psi^n) := f_\phi(\phi^1(\psi^1,\ldots,\psi^n),\ldots,\phi^n(\psi^1,\ldots,\psi^n))\; det\left[\partial\phi^i/\partial\psi^j\right]$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} f_\phi &= \mu_\phi\,\phi^{-1} \\ f_\psi &= J_{\phi\psi^{-1}}\, f_\phi\,\phi\,\psi^{-1} = J_{\phi\psi^{-1}}\;\mu_\phi\,\phi^{-1}\,\phi\,\psi^{-1} = \mu_\psi\,\psi^{-1} \\ A_\phi &= \phi(G) \\ A_\psi &= \psi(G) , \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_G dm &= \int_{\phi(G)} \mu_\phi\;\phi^{-1}\; dV \\ &= \int_{\psi(G)} \mu_\psi\;\psi^{-1}\; dV \end{aligned}$$

und damit die Invarianz gegen Kartenwechsel.

Handelt es sich um einen Integrationsbereich G, der nicht durch eine Karte allein abgedeckt wird, so kann man ihn möglicherweise in endlich viele Gebiete G_i mit $\cup_i G_i = G$ und $\cap_i G_i = \{$Menge vom Maße Null$\}$ zerlegen, einzeln integrieren und anschließend aufsummieren. Versagt auch diese Technik, so gibt es noch andere Möglichkeiten (z. B. mittels *Partition der Eins*), auf die hier jedoch nicht eingegangen werden soll. Von physikalischen Fragestellungen treten an dieser Stelle selten Probleme auf.

5. Euklidische Mannigfaltigkeiten

Empfohlene Literatur: WANG/TRUESDELL, FLEMING

In diesem Abschnitt soll der *Euklidische Raum* als *differenzierbare Mannigfaltigkeit* aufgefaßt werden, um zu sehen, wie sich dann Tangential- und Kotangentialraum etc. darstellen. Bevor wir damit beginnen, sollen zunächst zwei einfachere Räume untersucht werden.

Der $\mathbb{R}^n$ ist auf kanonische Weise differenzierbare Mannigfaltigkeit, weil seine Identität als globale Karte aufgefaßt werden kann. Damit bilden die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x_i$ eine ausgezeichnete Basis in $T_x\mathbb{R}^n$ für alle $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, und das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n$ ist kanonische isomorph zu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (was einen kanonischen *Parallelismus* zwischen Tangentialräumen mit unterschiedlichem Fußpunkt impliziert).

Sei nun V ein *endlich-dimensionaler reeler Vektorraum*. Nach Wahl einer Basis $\{t_i\}$ erhält man mit den Komponentenprojektionen

$$\phi : V \to \mathbb{R}^n$$
$$v = v^i t_i \mapsto (v^1, \dots, v^n)$$

eine globale Karte, die V zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit macht. ϕ ist bijektiv und hat die Inverse

$$\phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$$
$$(v^1, \dots, v^n) \mapsto v = v^i t_i ,$$

die linear und natürlich auch differenzierbar ist. Ihre partiellen Ableitungen $\partial/\partial v^i$ bilden eine Basis des Tangentialraumes T_xV in allen $x \in V$ an V, die zu $\{t_i\}$ kanonisch isomorph ist. Nimmt man eine andere Basis aus V, so erhält man dieselbe Isomorphie $T_xV \simeq V$, da der Basiswechsel linear ist und für die partiellen Ableitungen die Kettenregel gilt. Durch Dualisieren erhält man $T_x{}^*V \simeq V^*$. Für das Tangentialbündel gibt es die kanonische Isomorphie $TV \simeq V \times V$, die wiederum einen kanonischen Parallelismus impliziert.

Betrachten wir nach dieser Vorbereitung einen n-dimensionalen *Euklid*ischen Raum E als Mannigfaltigkeit, wobei wir nach Auszeichnung eines Bezugspunktes $x \in E$ durch die Bijektion

$$\iota_x : E \to V$$
$$y \mapsto r = \vdash x, y \dashv ,$$

die differenzierbare Struktur von V auf E zurückholen können, die sich dann als unabhängig vom BZP erweist. Das Differential von ι_x an der Stelle x leistet

$$\iota_{x*} : T_xE \to T_oV \simeq V$$

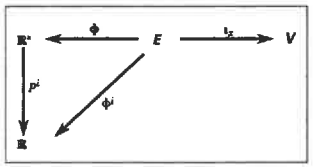
und ist für jeden Fußpunkt kanonisch. Dies impliziert den (kanonischen) ***Euklid*ischen Parallelismus**

$$\iota_{y*}^{-1}\, \iota_{x*} : T_xE \to T_yE \qquad \forall\, x, y \in E$$

zwischen Tangentialräumen mit unterschiedlichen Fußpunkten. Das *Euklid*ische Tangentialbündel mit der typischen Faser V ist $TE \simeq E \times V$, so daß ein Vektorfeld

$$v : E \to TE \simeq E \times V$$

im ersten Ausgang trivialerweise die Identität ist.



Da V ein inneres Produkt trägt, erhalten wir die kanonischen Isomorphien zwischen

$$T_xE \simeq T_oV \simeq V \simeq V^* \simeq T_o{}^*V \simeq T_x{}^*E \ .$$

Seien nun (E,Φ) globale Karte und p^i die natürlichen Koordinatenprojektionen, die wir folgendermaßen erweitern:

$$\Phi^i = p^i\, \Phi = p^i\, \Phi\, \iota_x^{-1}\, \iota_x : E \to \mathbb{R} \ .$$

Dann gilt die Kettenregel für das Differential

$$\Phi^i{}_* = (p^i\, \Phi\, \iota_x^{-1})_*\, \iota_{x*} : T_xE \to T_o\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \ .$$

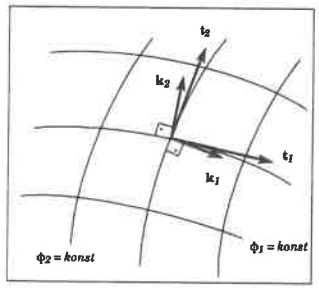
Wenden wir das Differential auf eine partielle Ableitung $\partial/\partial\Phi^j$ (als Tangentialvektor aufgefaßt) an, so gilt

$$\Phi^i{}_*(\partial/\partial\Phi^j) = \delta^i{}_j = (\Phi^i\, \iota_x^{-1})_*\, \iota_{x*}\, (\partial/\partial\Phi^j)$$

wobei

$$\partial x/\partial\Phi^j := \iota_{x*}\, (\partial/\partial\Phi^j) \in T_oV \simeq V$$

als j-ter **Tangentenvektor** bezeichnet wird. $\{\partial x/\partial\Phi^j\}$ bildet die **(kovariante) Tangentenvektorbasis**. Sie ist kanonisch isomorph zu $\{\partial/\partial\Phi^j\} \subset T_xE$.



Andererseits ist

$$\nabla\Phi^i := d\Phi^i/dx := (\Phi^i\, \iota_x^{-1})_* \in T_o{}^*V \simeq V^* \simeq V$$

der i-te **Gradientenvektor**. Die **(kontravariante) Gradientenvektorbasis** $\{d\Phi^i/dx\}$ ist ihrerseits kanonisch isomorph zur Basis $\{d\Phi^i\} \subset T_x{}^*E$ und - wie gesehen - dual zur Tangenvektorbasis:

$$\langle \partial x/\partial\Phi^m\, , d\Phi^i/dx \rangle = \delta_m{}^i \ .$$

Zur Berechnung der beiden Basen kann man folgendermaßen vorgehen:

1.) man wähle sich ein Koordinatensystem $\{\phi^i\}$;

2.) man wähle sich einen beliebigen Bezugspunkt $o \in E$ und stelle den Ortsvektor r bezüglich o als Funktion der Koordinaten dar: $r(\phi^1, \dots, \phi^n)$;

3.) man differenziere $r(\phi^1, \dots, \phi^n)$ partiell nach allen ϕ^i und erhält die Tangentenbasis $\{\partial r/\partial\phi^i\}$;

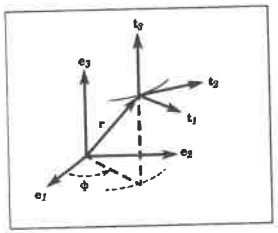
4.) man berechne die Gradientenbasis in jedem Punkt als Lösung der Dualitätsbeziehungen

$$<\partial r/\partial\phi^m, d\phi^i/dr> = \delta_m{}^i ,$$

einem linearen inhomogenen Gleichungssystem für die Komponenten von $d\phi^i/dr$, das immer eindeutig lösbar ist.

Im *Dreidimensionalen* können wir mittels des Kreuzprodukts und des Spatprodukts (s. Abschnitt 2.3) die zu einer Basis $\{t_i\}$ duale Basis explizit darstellen als:

$$\begin{aligned} k^1 &= (t_2 \times t_3) / [t_1, t_2, t_3] \\ k^2 &= (t_3 \times t_1) / [t_1, t_2, t_3] \\ k^3 &= (t_1 \times t_2) / [t_1, t_2, t_3] . \end{aligned}$$



Beispiel: Zylinder-Koordinaten. Sei $\{e_i\}$ Orthonormalbasis in V . Der Ortsvektor läßt sich darstellen als

$$r(r, \phi, z) = r \cos\phi \, e_1 + r \sin\phi \, e_2 + z \, e_3$$

Die Tangentenvektorbasis berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} t_1(r, \phi, z) &= \cos\phi \, e_1 + \sin\phi \, e_2 \\ t_2(r, \phi, z) &= - r \sin\phi \, e_1 + r \cos\phi \, e_2 \\ t_3(r, \phi, z) &= e_3 . \end{aligned}$$

und die duale Basis zu:

$$\begin{aligned} k^1(r, \phi, z) &= \cos\phi \, e_1 + \sin\phi \, e_2 \\ k^2(r, \phi, z) &= - 1/r \sin\phi \, e_1 + 1/r \cos\phi \, e_2 \\ k^3(r, \phi, z) &= e_3 . \end{aligned}$$

5.1 Analysis in Euklidischen Räumen

Im folgenden seien einige nützliche Differential-Operatoren auf *Euklid*ischen Mannigfaltigkeiten eingeführt, von denen wir später häufig Gebrauch machen werden. Dabei knüpfen wir an den Begriff des Differentials f_* einer Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten an

$$f : M \to N$$

mit den Karten (U_x, ϕ) von M und $(U_{f(x)}, \psi)$ von N , wofür wir im Satz S 4.7 die Darstellung

$$f_* = \frac{\partial(\psi^i f \phi^{-1})}{\partial\phi^k} \, \partial/\partial\psi^i \otimes d\phi^k$$

hergeleitet haben.

Wir wenden dies nun auf verschiedene Felder an, indem wir $M = E$ setzen und über N nach Belieben verfügen. Auf diese Weise definieren wir in jedem Punkt von M den Gradienten des Feldes, der seinerseits ein Feld darstellt. Dazu benutzen wir wieder die kanonische Isomorphie

$$T_xE \simeq V \simeq T_x{}^*E \qquad \forall x \in E .$$

Seien (U_x, ϕ) eine Karte und

$$\{\partial/\partial\phi^i \simeq \partial r/\partial\phi^i\}$$

und

$$\{d\phi^i \simeq d\phi^i/dr\}$$

die *Gauß*schen Basen in x .

Als erstes Beispiel betrachten wir für f eine *Isometrie*

$$f = \alpha : E \to E .$$

Damit sind also $E = M = N$. Es soll folgendes bewiesen werden:

S 5.1: Ist α Isometrie des *Euklid*ischen Raumes und Q die durch sie induzierte Drehung des Translationsraumes (s.S 3.4), so ist

$$grad\, \alpha := \alpha_* = Q ,$$

also räumlich konstant.

B: Wir wählen eine globale Karte (E,ϕ) und eine andere Karte (E,ψ), die durch $\psi := \phi\ \alpha^{-1}$ definiert ist. Damit ist $\psi\ \alpha\ \phi^{-1} = I$, die Identität des $\mathbb{R}^n$. Die Isometrie schiebt und dreht somit das Koordinatengitter ϕ als starres Ganzes in ψ. Die Tangentenvektoren $\partial/\partial\phi^k$ und $\partial/\partial\psi^k$ entsprechen einander, und was $\partial/\partial\phi^k$ im Urbildbereich leistet, leistet $\partial/\partial\psi^k$ im Bildbereich:

$$y := \partial/\partial\phi^k(x) \Leftrightarrow \alpha(y) = \partial/\partial\psi^k(\alpha(x)) \qquad \forall x \in E .$$

Wir bilden das Differential α_* gemäß S 4.7 und konstatieren, daß

$$\frac{\partial(\psi^i\ \alpha\ \phi^{-1})}{\partial\phi^k} = \frac{\partial(p^i\ \psi\ \alpha\ \phi^{-1})}{\partial\phi^k} = \partial p^i/\partial\phi^k = \delta^i{}_k$$

die Elemente der Einheitsmatrix sind. Somit verbleibt

$$\alpha_* = \partial/\partial\psi^i \otimes d\phi^i .$$

Wenden wir α_* auf einen Tangentenvektor $\partial/\partial\phi^k$ an, so gilt

$$\alpha_*(\partial/\partial\phi^k) = \partial/\partial\psi^k .$$

Ist $x \in E$ sowie $y := \partial/\partial\phi^k(x)$, so ist nach S 3.4

$$\alpha_*(\partial/\partial\phi^k) = \alpha_*(\vdash x,y \dashv) = \partial/\partial\psi^k = \vdash \alpha(x), \alpha(y) \dashv = Q(\vdash x,y \dashv) = Q(\partial/\partial\phi^k) .$$

Da dies für alle Basis-Vektoren gilt, ist $\alpha_* = Q$. ⊠

Ein **Skalarfeld** auf E ist eine differenzierbare Abbildung

$$f : E \to \mathbb{R} .$$

Wir identifizieren also $N = \mathbb{R}$, einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit. Der Tangentialraum an $\mathbb{R}$ ist an jeder Stelle ebenfalls $\mathbb{R}$, seine Standardbasis $\{1\}$.

Das Differential von f ist dann

$$grad\, f := f_* = df = \frac{\partial(f\ \phi^{-1})}{\partial\phi^k}\ 1 \otimes d\phi^k = \frac{\partial(f\ \phi^{-1})}{\partial\phi^k}\ d\phi^k$$

das (ko-)vektorwertige **Gradientenfeld** von f.

Da die Gradientenbasis $\{d\phi^k\}$ vom Fußpunkt $x \in E$ abhängt, gilt dies auch für die Komponenten des (Ko-)Vektors "Gradient". Der Vektor selbst ist freilich für alle Karten derselbe. Bildet man den Gradienten der Koordinatenfunktionen $\phi^k = p^k\ \phi$, so erhält man das Gradientenbasisvektorfeld $d\phi^k$, was den Namen rechtfertigt.

Etwas komplizierter ist der Fall eines **Vektorfeldes** als differenzierbarem Schnitt des Tangentialbündels

$$v : E \to TE \cong E \times V .$$

Wegen des *Euklid*ischen Parallelismus ist es im ersten Ausgang trivial, so daß wir nur noch schreiben

$$v : E \to V .$$

Der Gradient wird wieder als das Differential

$$v_* : T_xE \to T_0V \cong V$$

eingeführt. Dazu wählen wir auf E eine Karte (U,ϕ) und in V zwei beliebige duale Basen $\{u_i\}$ und $\{w^i\}$ (oder parallele Basisfelder auf E). Dann bilden die Abbildungen

$$\psi^i : V \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto \langle v, w^i \rangle$$

ein globales Koordinatensystem von V mit den *Gauß*schen Basen $\{\partial/\partial\psi^i = u_i\}$ und $\{d\psi^i = w^i\}$ (s. S. 55). Die Darstellung des Gradienten ist mit Satz S 4.7

$$\begin{aligned} grad\, v = v_* &= \partial(\langle v\,\phi^{-1}, w^i \rangle)/\partial\phi^m\ u_i \otimes d\phi^m . \\ &= \partial(\langle v\,\phi^{-1}, w^i \rangle u_i)/\partial\phi^m \otimes d\phi^m \\ &= \partial(v\,\phi^{-1})/\partial\phi^m \otimes d\phi^m \\ &= \partial(\langle v\,\phi^{-1}, d\phi^i \rangle\ \partial/\partial\phi^i)/\partial\phi^m \otimes d\phi^m \\ &= \partial[v^i(\phi^1, \dots, \phi^n)\ \partial/\partial\phi^i(\phi^1, \dots, \phi^n)]/\partial\phi^m \otimes d\phi^m \\ &= [\partial v^i/\partial\phi^m\ \partial/\partial\phi^i + v^i\ \partial(\partial/\partial\phi^i)/\partial\phi^m] \otimes d\phi^m , \end{aligned}$$

Dabei haben wir von der Tatsache gebrauch gemacht, daß man das Vektorfeld im Kartenbereich auch als $\mathbf{v} = v^i\, \partial/\partial\phi^i$ darstellen kann, wobei sowohl die Komponenten v^i als auch die Basisvektoren $\partial/\partial\phi^i$ Felder sind, also von den Koordinaten $\phi^1, \dots, \phi^n$ abhängen und mittels der Produktregel partiell differenziert werden müssen. Der Gradient eines Vektorfeldes ist also ein Tensorfeld, d.h. in jedem Punkt von E aus $Lin(V,V)$. Es sei darauf hingewiesen, daß die Darstellung des Gradienten in der Literatur nicht einheitlich ist; manchmal definiert man ihn auch im transponierten Sinne.

Als **Divergenz** des Vektorfeldes $\mathbf{v} : E \to V$ bezeichnet man die Spur des Gradienten in jedem Punkt

$$div\, \mathbf{v} := sp\,(grad\, \mathbf{v}) \quad ,$$

und im *Dreidimensionalen* ist die **Rotation** von $\mathbf{v}$ dasjenige Vektorfeld, das punktweise dem negativen axialen Vektor des Gradienten von $\mathbf{v}$ entspricht

$$rot\, \mathbf{v} := -\, axi\,(grad\, \mathbf{v})$$

wie er in Abschnitt 2.3 eingeführt wurde. Man beachte auch hier mögliche Abweichungen in der Literatur, beispielsweise bezüglich des Vorzeichens. Es gilt dann

$$grad^*\, \mathbf{v} - grad\, \mathbf{v} = rot\, \mathbf{v} \times \mathbf{I}_V = \mathbf{I}_V \times rot\, \mathbf{v} \quad .$$

Wir werden später auch die Divergenz eines Tensorfeldes

$$\mathbf{A} : E \to TE \otimes T^*E \simeq E \times Lin(V,V)$$

benötigen. Sie kann man definieren durch die Vorschrift

$$<div(\mathbf{A}), \mathbf{v}> := div[\, \mathbf{A}^*(\mathbf{v})] \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V \; .$$

Die Bedeutung dieser Operation wird ersichtlich, wenn man den Gaußschen Satz (S 5.2) auf Tensorfelder anwendet. Ist dagegen $\mathbf{v}$ nicht konstant, sondern ein differenzierbares Vektorfeld, so gilt die Produktregel in der Form

$$div[\, \mathbf{A}^*(\mathbf{v})] = <div(\mathbf{A}), \mathbf{v}> + <\mathbf{A}, grad\, \mathbf{v}> \; .$$

Diese (und andere) Felder lassen sich formal einfach darstellen und leicht berechnen durch Einführung des **Nabla**-Operators ∇. Seine Darstellung bez. eines beliebigen Koordinatensystems $\{\phi^i\}$ und dessen Gradientenbasis $\{\mathbf{k}^i := d\phi^i/d\mathbf{x}\}$ ist

$$\nabla := \partial/\partial\phi^i\, \mathbf{k}^i \; .$$

Man schreibt für *Skalarfelder* f :

$$grad\, f = f\nabla \qquad \text{ein Vektorfeld ;}$$

für *Vektorfelder* $\mathbf{v}$:

$$grad\, \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes \nabla \qquad \text{ein Tensorfeld ;}$$
$$div\, \mathbf{v} = <\mathbf{v}, \nabla> \qquad \text{ein Skalarfeld ;}$$
$$rot\, \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \nabla \qquad \text{ein Vektorfeld ;}$$

und für *Tensorfelder* $\mathbf{A}$:

$$div\, \mathbf{A} = \mathbf{A}(\nabla) \qquad \text{ein Vektorfeld .}$$

Dabei ist in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit so zu verfahren, daß

1.) die partiellen Differentialoperatoren $\partial/\partial\phi^i$ auf den Vektor, d. h. auf Komponenten *und* Basisvektoren (nach der Produktregel) angewendet werden, und
2.) die kovarianten Basisvektoren $\mathbf{k}^i$ mit dem Ergebnis entsprechend algebraisch verknüpft werden.

Mittels der Kettenregel sieht man dann, daß die sich ergebenden Felder koordinaten- und basisunabhängig sind und den obigen Definitionen, die auf dem Differentialbegriff fußen, entsprechen.

Als Beispiel bilden wir die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ in seiner Komponentendarstellung bez. einer beliebigen Basis $\{\mathbf{a}_i\}$, die im allgemeinen von den Ortskoordinaten $\{\phi^i\}$ abhängt:

$$div\, \mathbf{v} = <\mathbf{v}, \nabla> = <v^i \mathbf{a}_i, \partial/\partial\phi^j\, \mathbf{k}^j> = \partial v^i/\partial\phi^j <\mathbf{a}_i, \mathbf{k}^j> + v^i <\partial\mathbf{a}_i/\partial\phi^j, \mathbf{k}^j> \; .$$

Oft ist es praktisch, durch Klammern anzudeuten, worauf ∇ als Differentialoperator angewendet wird. Also z. B.

$$<\mathbf{v}, \nabla> = <v^i(\mathbf{a}_i, \nabla)> + <\mathbf{a}_i, (v^i \nabla)> \; .$$

Es erweist sich meistens als einfacher, statt einer beliebigen Basis $\{\mathbf{a}_i\}$ die Tangentenbasis $\{\mathbf{t}_i\}$ oder die Gradientenbasis $\{\mathbf{k}^i\}$ zu verwenden.

Die Ableitung von Basisvektoren nach den Koordinaten sind wiederum Vektoren, können also in einer der beiden natürlichen Basen dargestellt werden. Man nennt ihre Komponenten ***Christoffel*symbole**:

$$\partial\mathbf{t}_j/\partial\phi^k = \Gamma^i_{jk}\, \mathbf{t}_i = \Gamma_{ijk}\, \mathbf{k}^i$$

$$\partial k_i / \partial \phi^k = \Gamma^j{}_{ik}\, t_j = \Gamma_i{}^j{}_k\, k^j \,.$$

Sie zeigen folgende Symmetrie-Eigenschaften

$$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj}$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$$

infolge des *Schwarz*schen Vertauschungssatzes und die Antimetrie

$$\Gamma_i{}^j{}_k = -\Gamma_{ijk}$$

infolge der Produktregel. Der erste Index i läßt sich mit den Metrikgrößen $g_{mi} := \langle t_m, t_i \rangle$ und $g^{im} := \langle k^i, k^m \rangle$ herauf- bzw. herunterziehen gemäß (s. S. 24f). Die *Christoffel*symbole lassen sich aus den Metrikkoeffizienten berechnen mittels der Beziehung:

$$\Gamma_{ijk} = \tfrac{1}{2}\left[\partial g_{ij}/\partial\phi^k + \partial g_{ik}/\partial\phi^j - \partial g_{jk}/\partial\phi^i\right] \,.$$

Es ergibt sich dann beispielsweise für den Gradienten eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} grad\, \mathbf{v} &= \mathbf{v} \otimes \nabla \\ &= (v^j t_j \otimes \partial/\partial\phi^i)\, k^i \\ &= \partial v^j/\partial\phi^i\, t_j \otimes k^i + v^j\, \partial t_j/\partial\phi^i \otimes k^i \\ &= \partial v^m/\partial\phi^i\, t_m \otimes k^i + v^j\, \Gamma^m{}_{ji}\, t_m \otimes k^i \\ &= (\partial v^m/\partial\phi^i + v^j\, \Gamma^m{}_{ji})\, t_m \otimes k^i \\ &=: v^m|_i\, t_m \otimes k^i \,, \end{aligned}$$

ein Tensorfeld mit den Komponenten $v^m|_i$ bez. der gemischten Basis, wobei die **kovariante Ableitung** als Abkürzung zu verstehen ist für:

$$v^m|_i := \partial v^m/\partial\phi^i + v^j\, \Gamma^m{}_{ji}$$

Die Divergenz von $\mathbf{v}$ ist dann $v^m|_m$.

Aufgrund des inneren Produkts von V können wir mittels einer Orientierung das Volumenelement

$$dV = *I = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

einführen. Betrachten wir nun im n-dimensionalen *Euklid*ischen Raum ein im Sinne vom KELLOGG (S.85) **normales Gebiet** $B \subset E$ (abgeschlossen, mit stückweise glattem Rand dB). Wir bezeichnen in einem Punkt $x \in dB$ eines glatten Randstücks das

vektorielle **Oberflächenelement** mit $\mathbf{do}$. Es sei bezüglich dB nach außen hin orientiert. Dann gilt der

S 5.2: **Satz von *Gauß***

Sei B ein endliches normales Gebiet in E mit Rand dB, Volumenelement dV und äußerem Flächenelement $\mathbf{do}$.
Seien a differenzierbares Skalarfeld, $\mathbf{v}$ differenzierbares Vektorfeld, $\mathbf{T}$ differenzierbares Tensorfeld. Dann gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} \textstyle\int_B grad\, a\; dV &= \textstyle\int_{dB} a\, \mathbf{do} \\ \textstyle\int_B div\, \mathbf{v}\; dV &= \textstyle\int_{dB} \langle \mathbf{v}, \mathbf{do} \rangle \\ \textstyle\int_B div\, \mathbf{T}\; dV &= \textstyle\int_{dB} \mathbf{T}(\mathbf{do}) \\ \textstyle\int_B div\, [\mathbf{T}(\mathbf{v})]\; dV &= \textstyle\int_{dB} \langle \mathbf{T}(\mathbf{v}), \mathbf{do} \rangle \,. \end{aligned}}$$

Wir werden später noch das **Fundamental-Lemma der Potentialtheorie** in der folgenden Version benutzen (s. , e.g. , SIMONYI, S. 62) :

S 5.3: Sei $\mathbf{v}$ Vektorfeld auf einem endlichen normalen Gebiet B in E und $\mathbf{r}$ der Ortsvektor. Dann gilt für das Vektorfeld

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi} \int_B \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{x}\|}\, dV$$

überall in B die Gleichung

$$div\, grad\, \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \,.$$

Übersicht zu Euklidischen Mannigfaltigkeiten

differenzierbare Mannigfaltigkeit M	*Euklid*ischer Raum E
konstitutive Struktur	
Karten (U_x, ϕ) differenzierbare Struktur (Atlas)	Metrik $d: E \times E \to \mathbb{R}$ Translationsraum V mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$
abgeleitete Konzepte	
Tangentialraum T_xM Kotangentialraum $T_x{}^*M$ *Gaußsche* Basen $\{\partial/\partial\phi^i\} \subset T_xM$ $\{d\phi^i\} \subset T_x{}^*M$	Ortsvektoren $\iota_0: E \to V$ trägt eine diff.-bare Struktur globale Karte durch BZS $\{\partial r/\partial\phi^i\} \subset V$ $\{d\phi^i/dr\} \subset V$
***Euklid*ische Mannigfaltigkeiten**	

$$T_xE \xrightarrow{\iota_{x*}} V, \quad \partial/\partial\phi^i \longmapsto \partial r/\partial\phi^i$$

$$T_x{}^*E \xleftarrow{\iota_x{}^*} V, \quad d\phi^i \longmapsfrom d\phi^i/dr$$

damit ergeben sich

$T_xE \simeq T_x{}^*E \simeq V$, inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Tangentialbündel $TE \simeq E \times V$

inneres Produkt auf $\Lambda^k(T_xE)$

Stern-Operator $*: \Lambda^k(T_xE) \to \Lambda^{n-k}(T_xE)$

*Euklid*ischer Parallelismus $\iota_{y*}^{-1}\,\iota_{x*}: T_xE \to T_yE$

Teil II: Grundlagen der Kontinuumsmechanik

6. Materielle Körper

Mit dem bisher erarbeiteten Rüstzeug ist es nun lapidar, die erste und grundlegende physikalische Größe zu definieren:

A,D 6.1: Ein (materieller) **Körper** ist eine
- kompakte
- normale (s. S. 64)
- orientierte (s. S. 52)
- dreidimensionale

differenzierbare Mannigfaltigkeit B mit Rand dB. Die Elemente von B heißen **materielle Punkte** oder **Körperpunkte**. Im Innern von B sei eine positive integrierbare Differential-3-Form dm ausgezeichnet, die **Massenelement** heißt. Die Zahl $m_B := \int_B dm$ heißt **Masse** von B.

Eine Menge B_1 heißt **Teilkörper** von B, falls gelten:
1.) $B_1 \subset B$;
2.) B_1 ist Körper;
3.) die Massenelemente von B und B_1 fallen im Innern von B_1 zusammen.

Diese Definition, die gleichzeitig auch den Charakter eines Axioms trägt, beinhaltet die **Kontinuums-Hypothese**. Danach ist es im Rahmen der Kontinuumsmechanik nicht möglich, den Körper als endliche oder abzählbare Menge von Massenpunkten zu betrachten. Vielmehr wird der Körper ein endliches Raumgebiet kontinuierlich ausfüllen (das Konzept der *Plazierungen* des folgenden Abschnittes wird das leisten).

Es wurde mehrfach versucht, allgemein Körper als Ausschnitt des Universums darzustellen (s. NOLL 1959, 1973, GURTIN/ WILLIAMS/ ZIEMER). In NOLL/ VIRGA wird mit den *fit regions* ein mathematisches Konzept von Körpergebieten vorgeschlagen. Diese Theorien sind formal recht aufwendig, insbesondere in maßtheoretischer

Hinsicht. Wir wollen uns an dieser Stelle mit diesem Hinweis begnügen, da diese Konzepte für die lokalen Untersuchungen, wie wir sie vorhaben, nicht benötigt werden.

Da wir uns auf kompakte Körper eingeschränkt haben, betrachten wir also nicht das Universum als Ganzes, sondern einen recht willkürlich herausgeschnittenen Teil. Dieses **Schnittprinzip** ist grundlegend für die gesamte Mechanik. HAMEL (1922, S. 5) schreibt dazu:

> *"... erst der große englische Naturphilosoph Bacon of Verulam sprach es um 1600 aus: "Man müsse die Natur zerschneiden." Als Ganzes wären uns fast alle Naturerscheinungen unverständlich, sie wären so kompliziert und mannigfaltig, daß der Mensch bald jeden Versuch eines Verständnisses aufgeben müßte ...".*

Auch NEWTON schreibt bereits 1687 (S. 380):

> *"Ferner lernen wir aus den Erscheinungen, daß sich wechselseitig berührende Teilchen getrennt werden können."*

7. Intrinsische Beschreibung von Deformationen

Empfohlene Literatur: NOLL (1972), KRAWIETZ

7.1 Plazierungen

In der nicht-relativistischen Kontinuumsmechanik wird der Raum unserer physikalischen Anschauung durch den *dreidimensionalen Euklidischen Raum* E^3 modelliert. Dies deckt sich mit den zwei Postulaten, die man üblicherweise dem klassischen Raum-Begriff abverlangt (s. TROSTEL, 1981, S. 73):

- *Homogenität*: es gibt in ihm keine a priori ausgezeichneten Punkte;
- *Isotropie*: es gibt in ihm keine a priori ausgezeichneten Richtungen.

Dabei soll "a priori" bedeuten: bevor wir in ihm materielle Körper einbetten. Denn: beinhaltet der Raum bereits einen Körper, so ist zumindest dessen Massenmittelpunkt ausgezeichnet, sowie die Richtung auf diesen hin.

Man mag nun einwenden, daß wir das Kunststück zu realisieren versuchten, zunächst den ganzen Raum zu evakuieren, um seine a priori-Struktur zu vermessen. Dies ist jedoch nicht gemeint. Wir postulieren lediglich, daß die *Euklid*ische Struktur von den Massenverteilungen unabhängig ist. Konkret: daß der Abstand zweier Raumpunkte unabhängig von der Materie in und um diese Punkte ist. Diese Annahme kann in der Relativitätstheorie nicht mehr aufrechterhalten werden.

Wir haben unabhängig vom Raum den materiellen Körper definiert. Diese beiden Objekte werden durch das Konzept der *Plazierung* miteinander in Beziehung gesetzt: *die Körper werden im Raum plaziert.*

Mathematisch gesehen ist eine *Plazierung* eine Einbettung der Mannigfaltigkeit *Körper* in den dreidimensionalen *Euklid*ischen Raum, ebenfalls als differenzierbare Mannigfaltigkeit aufgefaßt. Dabei soll es keine Überlappungen, Knicke, Risse o. ä. geben, was durch die Einschränkungen *(E1)* bis *(E5)* sichergestellt wird.

D 7.1: Eine **Einbettung** einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit B in eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E ist eine Abbildung

$$\varkappa : B \to E$$

mit folgende Eigenschaften:

(E1): κ ist *injektiv;*

(E2): $\kappa(B)$ ist *reguläre Untermannigfaltigkeit* von E,
d. h. die Abbildung

$$\kappa : B \to \kappa(B) \subset E$$

ist homöomorph (stetig und offen) bez. der Spurtopologie von E auf $\kappa(B)$.

(E3): κ und κ^{-1} sind *einmal stetig differenzierbar;*

(E4): das Differential von κ, d. h. die durch κ im Innern von B induzierte Abbildung der Tangentialräume

$$K_X := \kappa_*|_X : T_X B \to T_{\kappa(X)} E = V$$

ist *injektiv* für alle inneren Punkte $X \in B \setminus dB$;

(E5): B wird unter κ in ein *normales Gebiet* von E abgebildet.

Es sei darauf hingewiesen, daß es in der Literatur unterschiedliche Definitionen von Einbettungen gibt, die also mit der hier gegebenen nicht übereinstimmen brauchen. Beispielsweise fordern wir nicht, daß κ von der Klasse C^∞ ist.

Man setzt üblicherweise das Differential (wie auch die Differentialformen, z. B. das Massenelement) glatt auf den Rand dB des Körpers fort, so daß die Felder auf ganz B erklärt werden können.

D 7.2: Eine **Plazierungsklasse** K des Körpers B ist eine nicht-leere Menge von Einbettungen von B in den dreidimensionalen *Euklid*ischen Raum E^3, genannt **Plazierungen**, mit den Eigenschaften:

(E6): alle Plazierungen haben *die gleiche Orientierung;*
d. h. sind $\kappa_1, \kappa_2 \in K$, so gilt für die Funktionaldeterminante des Plazierungswechsels überall im Innern des Körpers $J_{\kappa_2 \kappa_1^{-1}} > 0$.

(E7): K ist *abgeschlossen gegenüber orientierungstreuen Isometrien* (Starrkörpermodifikationen), d. h., ist $\kappa \in K$ und α Isometrie des E^3 mit positiver Funktionaldeterminante, so ist auch $\alpha\kappa \in K$.

Das Differential $K_X := \kappa_*|_X \in Iso(T_X B, T_{\kappa(X)} E)$ einer Plazierung heißt **Plazierung des Körperelements in** X.

Mit *(E4)* folgt aus Dimensionsgründen, daß das Differential K_X und das Kodifferential K_X^* bijektiv sind. Betrachtet man X als variabel auf B, so bildet K ein Feld linearer Abbildungen.

Jede Plazierung κ induziert auf B eine Metrik d_κ durch

$$d_\kappa(X,Y) := d_{E^3}(\kappa(X),\kappa(Y)) \qquad \forall\, X, Y \in B,$$

dabei ist d_{E^3} die Metrik des E^3. d_κ ist natürlich invariant gegen Isometrien, d. h. wenn $\kappa_1, \kappa_2 \in K$ ist und $\kappa_1 \kappa_2^{-1}$ auf E^3 zu einer Isometrie fortgesetzt werden kann, folgt $d_{\kappa_1} = d_{\kappa_2}$.

Wir gehen im weiteren davon aus, daß jeder Körper eine *Plazierungsklasse* besitzt, die wir als körper-individuelle betrachten. Sie beinhaltet - grob gesagt - die Deformationsmöglichkeiten des Körpers. Es gibt Theorien von Körpertypen, deren Deformationsmöglichkeiten eingeschränkt sind (durch sog. *innere Zwangsbedingungen,* s. Kap. 18); *Inkompressibilität, Undehnbarkeit in bestimmten Richtungen,* und als Extremfall *Starrheit* sind hierfür Beispiele. Die Abgeschlossenheit der Plazierungsklasse gegenüber Starrkörpermodifikationen trägt der Tatsache Rechnung, daß solche Deformationseinschränkungen nicht von der Lage des Körpers im Raum abhängen.

Ist $\{d\phi^i\}$ positiv-orientierte Gradientenbasis einer Karte von B, so können wir das Massenelement auch ausdrücken durch

$$dm = \mu_\phi \, d\phi^1 \wedge d\phi^2 \wedge d\phi^3 .$$

Mittels einer Plazierung kann man es in das Plazierungsgebiet des Körpers schieben

$$dm_e = (\mu_\phi \circ \kappa^{-1}) \; \kappa^{-*}(d\phi^1) \wedge \kappa^{-*}(d\phi^2) \wedge \kappa^{-*}(d\phi^3) .$$

Wir orientieren nun das Volumenelement dV auf E^3 derart, daß überall die Beziehung

$$\rho_\kappa := {}^*dm_e / {}^*dV > 0$$

gilt. Dabei heißt das positive Skalarfeld ρ_κ auf $\kappa(B) \subset E^3$ die (Massen-) **Dichte** in der Plazierung κ. Sie ist unabhängig von der verwendeten Karte. Mittels κ kann man den Definitionsbereich der Dichte auch auf den Körper selbst transformieren, falls dies benötigt wird (s. intrinsische Beschreibungsweise, Abschnitt 10.1). Sie ist aber nur im Zusammenhang mit einer Plazierung erklärt. Die Masse wie auch das Massenelement hingegen wurden intrinsisch erklärt, also unabhängig von der

Plazierung, weil man in der klassischen Mechanik die Konstanz der Masse unterstellt (*Massenerhaltung*).

7.2 Konfigurationen

Als nächstes wollen wir den Begriff der *Konfiguration* (nach NOLL 1972) einführen. Dabei werden wir ähnlich vorgehen wie bei den Plazierungen, die erst global, also für den ganzen Körper, und dann lokal, also für jedes einzelne Körperelement definiert wurden.

Nach unserer Vorstellung verändert man die Verformungen, die ein Körper erleidet, nicht durch überlagerte Starrkörpermodifikationen (Isometrien). Zur Beschreibung von Verformungen sind also die Plazierungen selbst nicht geeignet. Wir fasern deshalb die Plazierungen nach Starrkörpermodifikationen und nennen die entstandenen Klassen *Konfigurationen*.

Dazu führen wir auf der Menge der Plazierungen eine Äquivalenzrelation ein:

D 7.3: Seien $\kappa_1, \kappa_2 \in K$, so definieren wir

$\kappa_1 \sim \kappa_2$: $\kappa_1 \kappa_2^{-1}$ läßt sich zu einer Isometrie auf E^3 fortsetzen.

Die Äquivalenzklassen von K bezüglich $\sim$ heißen **Konfigurationen des Körpers.**

Das bedeutet gleichzeitig: zwei Plazierungen gehören genau dann derselben Konfiguration an, wenn die induzierten Metriken auf B identisch sind.

D 7.4: Sei κ_X Plazierung des Körperelementes in $X \in B$.
Die **Konfiguration des Körperlementes in** X ist die Abbildung

$$G_X : T_X B \to T_X^* B$$

definiert durch

$$G_X := \kappa_X^* \kappa_X .$$

Bei dieser Definition wurde die kanonische Identifikation $T_x E \simeq T_x^* E \simeq V$ benutzt.

S 7.5: Die Konfiguration G_X des Körperelements in X ist ein inneres Produkt für $T_X B$, d. h. symmetrisch und positiv-definit.

B: Symmetrie: $G_X^* = (\kappa_X^* \kappa_X)^* = \kappa_X^* \kappa_X = G_X$

Positive Definitheit:
G_X ist das zurückgezogene innere Produkt von V, denn mit $t_{1,2} \in T_X B$ und $v_{1,2} := \kappa_X(t_{1,2})$ gilt

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \kappa_X(t_1), \kappa_X(t_2) \rangle = \langle t_1, \kappa_X^* \kappa_X(t_2) \rangle = \langle t_1, G_X(t_2) \rangle .$$

Aus der Definitheitseigenschaft eines Skalarproduktes folgt

$$\langle v, v \rangle \text{ ist nicht negativ für } \forall v \in V .$$

Da κ_X gemäß (*E4*) injektiv ist, ist der Kern von κ_X gleich dem Nullelement von $T_X B$, d. h.

$$v = \kappa_X(t) \neq o \quad \Leftrightarrow \quad t \neq o .$$

Damit ist auch G_X positiv-definit. ⊠

S 7.6: Gehören zwei Plazierungen von B derselben Konfiguration von B an, so sind die Konfigurationen aller $X \in B$ gleich.

B: Seien $\kappa_2, \kappa_1 \in K$ derart, daß $\kappa_2 \kappa_1^{-1}$ auf ganz E^3 zu einer Isometrie α fortsetzbar ist. Dann ist nach Satz S 5.1 α_* für alle $X \in B$ orthogonal, d. h. $\alpha_* \alpha^* = I_V$. Nun ist wegen der Kettenregel für alle $X \in B$

$$\alpha_* = \kappa_{2*}|_X \, \kappa_{1*}|_X^{-1} = \kappa_{2X} \kappa_{1X}^{-1} ,$$

also gilt:

$$\kappa_{2X} \kappa_{1X}^{-1} \kappa_{1X}^{-1*} \kappa_{2X}^* = I_V$$

$$\Leftrightarrow \quad \kappa_{2X}^* \kappa_{2X} = \kappa_{1X}^* \kappa_{1X}$$

$$\Leftrightarrow \quad G_{2X} = G_{1X} \qquad \forall X \in B . ⊠$$

S 7.7: Gehören zwei Plazierungen von B derselben Konfiguration von B an, so sind die Massendichten für alle $X \in B$ beider Plazierungen gleich.

B: Folgt in Zusammenhang mit *(E6)* aus der Tatsache, daß bei orientierungstreuen Isometrien die Funktionaldeterminante den Wert *1* hat. ⊠

Die Konfiguration G_X des Massenelementes induziert also auf dem Tangentialraum T_XB ein Skalarprodukt. Damit können wir Winkel und Längen von Tangentialvektoren messen:

$$\|t\| := \sqrt{<t,t>} \qquad \forall\ t \in T_XB\ ,$$

$$\measuredangle(t_1,t_2) := \arccos <t_1,t_2> / (\|t_1\|\ \|t_2\|) \qquad \forall\ t_1,t_2 \neq o \in T_XB\ ,$$

also (lokale) Deformationsgeometrie betreiben. Diese Beschreibung der Deformation heißt **intrinsisch**. Sie wurde - obwohl naheliegend und von der mathematischen Seite schon längst ausgereift - erst 1972 explizit von NOLL in die Rationale Mechanik eingeführt und hat wegen ihrer Abstraktheit erst wenig Verbreitung gefunden. Wesentlich verbreiteter ist die Bezugs-Beschreibung, wie sie im nächsten Kapitel dargestellt wird.

WALTER NOLL 1925 -

7.3 Intrinsische Beschreibungsweise in Koordinaten

Für konkrete Rechnungen benötigt man die Darstellungen aller dieser Größen in Basis- und Koordinatensystemen.

Sei (U_X,ϕ) eine Karte der Umgebung U_X eines materiellen Punktes $X \in B$. Deren Koordinaten

$$\phi^i := p^i\ \phi : U_X \to \mathbb{R} \qquad i = 1,2,3$$

heißen **materielle Koordinaten**.

Der Tangentialraum T_XB in X an B hat die natürliche Basis $\{\partial/\partial\phi^i\}$ und der Kotangentialraum die duale Basis $\{d\phi^i\}$.

Sei $\{\psi^i\}$ Koordinatensystem des E^3 . Wir berechnen dann in jedem Punkt des Koordinatenbereichs die Tangentenbasis $\{t_i = \partial r/\partial\psi^i\}$ und die Gradientenbasis $\{k^i = d\psi^i/dr\}$, so daß

$$<t_i, k^m> = \delta_i{}^m\ .$$

Sei $\kappa \in K$:

$$\kappa : B \to E^3$$

Plazierung. Dann ist die induzierte Abbildung der Tangentialräume das Differential von κ nach Satz S 4.7

$$K_X := \kappa_*|_X = \partial(\psi^i\ \kappa\ \phi^{-1})/\partial\phi^j\ t_i \otimes d\phi^j = k^i_j\ t_i \otimes d\phi^j : T_XB \to V \qquad \forall X \in B.$$

$[k^i_j]$ ist eine 3 x 3-Matrix mit Rang 3. Sei

$$v = v^j\ \partial/\partial\phi^j \in T_XB\ ,$$

so ist

$$K_X(v) = k^i_j\ t_i \otimes d\phi^j\ (v^j\ \partial/\partial\phi^j) = k^i_j\ v^j\ t_i \in V\ .$$

Speziell werden die Basisvektoren $\partial/\partial\phi^j \in T_XB$ abgebildet in die drei linear-unabhängigen Vektoren

$$K_X(\partial/\partial\phi^j) = k^i_j\ t_i\ ,$$

die den Raum V aufspannen.

Die Duale $K_X{}^*$ zu K_X ist definiert durch

$$<K_X(v), u> = <v, K_X{}^*(u)> \qquad \forall\ v \in T_XB\ ,\ \forall\ u \in V\ .$$

Mit

$$v = v^j\ \partial/\partial\phi^j\ ,\ u = u_m\ k^m\ ,\ K_X{}^* = k^*_i{}^j\ d\phi^j \otimes t_i$$

ist dann

$$<K_X(v), u> = <k^i_j\ t_i \otimes d\phi^j\ (v^j\ \partial/\partial\phi^j)\ ,\ u_m\ k^m> = k^m{}_i\ v^i\ u_m$$

$$= <v, K_X{}^*(u)> = <v^j\ \partial/\partial\phi^j\ ,\ k^*_i{}^j\ d\phi^j \otimes t_i\ (u_m\ k^m)> = k^*{}_i{}^m\ v^i\ u_m\ .$$

Demnach ist

$$K_X{}^* = k^i_j\ d\phi^j \otimes t_i\ .$$

Die Konfiguration G_X von $X \in B$ berechnet sich zu

$$G_X := K_X{}^*\ K_X = (k^*_i{}^j\ d\phi^j \otimes t_i)\ (k^m{}_j\ t_m \otimes d\phi^j\ ) = k^i_j\ g_{im}\ k^m{}_j\ d\phi^j \otimes d\phi^j\ .$$

Einen interessanten *Spezialfall* erhält man, wenn man die Koordinatensysteme (ϕ) und $\{\psi^i\}$ so wählt, daß

$$\psi^l \kappa \, \phi^{-1} = \phi^l$$

wird. Das bedeutet, daß ein materieller Punkt intrinsisch und in der Plazierung κ dieselben Koordinatenwerte hat. Dann werden

$$k^l_i = \delta^l_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{K}_X = t_i \otimes d\phi^i$$

$$\mathbf{G}_X = g_{lm} \; d\phi^l \otimes d\phi^m$$

besonders einfach. Wegen der Freiheit in der Koordinatenwahl läßt sich dieser Spezialfall immer erzeugen.

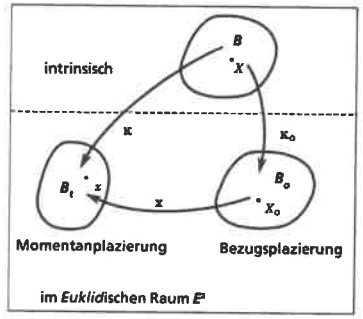
Im Abschnitt 8.6 wird als wichtiges Beispiel einer Deformation die *einfache Scherung* beschrieben.

8. Bezogene Beschreibung von Deformationen

Empfohlene Literatur: GURTIN (1981), KRAWIETZ, LEIGH, TRUESDELL/ NOLL, WANG/ TRUESDELL

8.1 Bezugsplazierung

Eine weitaus verbreitetere Beschreibungsweise von Deformationen als die intrinsische ist die bezogene. Dabei wird eine spezielle Plazierung $\kappa_0 \in K$ des Körpers als *Bezugsplazierung* willkürlich ausgezeichnet. Es wird nicht gefordert, daß κ_0 überhaupt jemals vom Körper eingenommen wurde oder wird, im Gegensatz zur Plazierung selbst, die zur Unterscheidung *Momentanplazierung* genannt wird. Größen, die sich auf die Bezugsplazierung beziehen, werden mit dem Suffix "Null" gekennzeichnet. Die Bezugsplazierungen der Körperelemente bilden das Tensorfeld $\mathbf{K}_0(X)$. Völlig analog zur Dichte einer Plazierung definiert man die Dichte der Bezugsplazierung ρ_0, einem überall positiven Skalarfeld.



Wir definieren folgende Abbildung, die **Verrückung** oder **Deplazierung** heißt

$$\chi := \kappa \, \kappa_0^{-1} : B_0 \to B_t$$

mit

$\mathcal{B}_o := \kappa_o(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}^3$: Körpergebiet in der Bezugsplazierung

$\mathcal{B}_t := \kappa(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}^3$: Körpergebiet in der Momentanplazierung.

$\mathbf{x}$ hat folgende Eigenschaften:

- Bijektivität (wegen *E1*);
- von der Klasse C^1 auf $\mathcal{B}_o$ (wegen *E3*);
- Orientierungstreue (wegen *E6*).

Es existiert in $\mathcal{B}_o$ der Gradient (oder das Differential) von $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{F}(X_o) := \mathbf{x}_*|_{X_o} = Grad\ \mathbf{x}|_{X_o} = \kappa_* \ \kappa_{o*}^{-1}|_{X_o} = \mathbf{K}_X \mathbf{K}_o X^{-1} \in Aut(V)$$

$$\forall\ X_o \in \mathcal{B}_o \text{ mit } X = \kappa_o^{-1}(X_o)\ ,$$

genannt **Deformationsgradient**. Es ist üblich, die Differentialoperatoren, die sich auf $\mathcal{B}_o$ beziehen, groß zu schreiben (*Grad, Div, Rot*) und diejenigen bez. $\mathcal{B}_t$ klein (*grad, div, rot*).

Es gilt wegen der Orientierungstreue von $\mathbf{x}$ überall $det\ \mathbf{F} > 0$.

Seien dV und dV_o die Volumenelemente des $\mathcal{E}^3$ in der Plazierung κ bzw. in der Bezugsplazierung κ_o . Da sich die Volumenelemente lokal mit der Funktional-Determinante der Verrückung $\mathbf{x}$ transformieren (s. S. 34):

$$dV = det\ \mathbf{F}\ dV_o\ ,$$

gilt für die Dichten wegen der Massenerhaltung ($dm_\kappa = dm_o = dm$)

$$\rho_\kappa := *dm\ /\ *dV\ ,\quad \rho_o := *dm\ /\ *dV_o$$

$$\boxed{\rho_o/\rho_\kappa = det\ \mathbf{F}}$$

Nach Einführung eines Bezugspunktes $o \in \mathcal{E}^3$ bildet man für $\forall\ X \in \mathcal{B}$ die Ortsvektoren

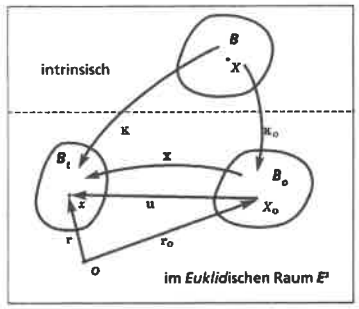
$$\mathbf{r}_o(X) := \vdash o, \kappa_o(X) \dashv$$

und

$$\mathbf{r}(X) := \vdash o, \kappa(X) \dashv$$

und definiert ihre Differenz als den **Verschiebungsvektor**

$$\mathbf{u}_l(X) := \mathbf{r}(X) - \mathbf{r}_o(X) = \vdash \kappa_o(X), \kappa(X) \dashv .$$



Meistens transformiert man sein intrinsisches Argument X gemäß $X = \kappa_o^{-1}(X_o)$ in die Bezugsplazierung und erhält das Vektorfeld

$$\mathbf{u}_l(X_o) := \mathbf{r}(\kappa_o^{-1}(X_o)) - \mathbf{r}_o(\kappa_o^{-1}(X_o)).$$

Dessen Differential

$$\mathbf{H}(X_o) := Grad\ \mathbf{u}_l(X_o) = \mathbf{F}(X_o) - \mathbf{I} \in Lin(V,V)$$

heißt **Verschiebungsgradient**. Sowohl $\mathbf{u}_l(X_o)$ als auch $\mathbf{H}(X_o)$ sind unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes.

Durch $\mathbf{F}(X_o)$ wird lokal die *Deplazierung des Körperlementes* gegenüber seiner Bezugsplazierung beschrieben, also die Deformation sowie Starrkörperbewegungen, genauer: Drehungen. Dies wird durch den folgenden wichtigen Satz deutlich:

S 8.1: **Satz von der polaren Zerlegung** (FINGER 1892)
Sei V endlich-dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt.
Dann läßt sich jeder invertierbare Tensor $\mathbf{F} \in Aut(V)$ auf zwei Arten eindeutig multiplikativ zerlegen:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R}\ \mathbf{U} = \mathbf{V}\ \mathbf{R}}$$

mit

$$\mathbf{R} \in Ort(V)$$

$$\mathbf{U}\ ,\ \mathbf{V} \in Sym^+(V,V)$$

B: 1) Sei $\mathbf{F}$ invertierbar und

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^*\mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{F}^*\mathbf{F} = \mathbf{C}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \mathbf{C}(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{F}^*\mathbf{F}(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{F}(\mathbf{v}), \mathbf{F}(\mathbf{v})\rangle > 0 \qquad \forall\, \mathbf{v} \neq \mathbf{o} \in V .$$

Also ist $\mathbf{C}$ symmetrisch und positiv-definit. $\mathbf{C}$ hat dann eine Spektraldarstellung

$$\mathbf{C} = \sum_i \lambda_i\, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

mit $\mathbf{u}_i$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i > 0$. $\{\mathbf{u}_i\}$ bildet eine Orthonormalbasis. $\mathbf{C}$ hat eine eindeutige positiv-definite symmetrische Wurzel

$$\mathbf{U} := \sum_i \sqrt{(\lambda_i)}\, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \qquad \in Sym^+(V,V) ,$$

so daß

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\,\mathbf{U} = \mathbf{C} .$$

Sei

$$\mathbf{R} := \mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1} .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\,\mathbf{R}^* &= \mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{U}^{-1*}\,\mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{F}\,(\mathbf{U}^{-1})^2\,\mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{F}\,(\mathbf{U}^2)^{-1}\,\mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{F}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{F}^{-1*}\,\mathbf{F}^* \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{R} \in Ort(V) .$$

2) Eindeutigkeit:

sei

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_1\,\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_2\,\mathbf{U}_2$$

mit

$$\mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 \in Ort(V)$$
$$\mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 \in Sym^+(V,V)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F}^* = \mathbf{U}_1^*\,\mathbf{R}_1^* = \mathbf{U}_1^*\,\mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{U}_2^*\,\mathbf{R}_2^{-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{F}^*\mathbf{F} &= \mathbf{U}_1\,\mathbf{R}_1^{-1}\,\mathbf{R}_1\,\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^2 \\ &= \mathbf{U}_2\,\mathbf{R}_2^{-1}\,\mathbf{R}_2\,\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$$

3) Ebenso zeigt man, daß

$$\mathbf{B} := \mathbf{F}\,\mathbf{F}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \in Sym^+(V,V)$$

und

$$\mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{B}} \quad \in Sym^+(V,V)$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{R}^* := \mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{F} \in Ort(V)$$

und daß die Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{V}\,\mathbf{R}^*$ eindeutig ist.

4) Noch zu zeigen: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U} = \mathbf{V}\,\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^*\,\mathbf{R}^{*\,*}\,\mathbf{V}\,\mathbf{R}^* .$$

Da $\mathbf{R}^* \in Ort(V)$ und $\mathbf{R}^{*\,*}\,\mathbf{V}\,\mathbf{R}^* \in Sym^+(V,V)$ sind, folgt wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$. ⊠

Da $det\,\mathbf{F}$ positiv ist, ist auch $\mathbf{R}$ orientierungstreu. Denn

$$det\,\mathbf{F} = det\,\mathbf{R}\; det\,\mathbf{U} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\,\mathbf{R} = +1 .$$

Wir bezeichnen mit $\bar{\mathbf{u}}_i$ die Eigenvektoren von $\mathbf{V}$, die mit denjenigen von $\mathbf{B}$ zusammenfallen. Man erhält damit folgende

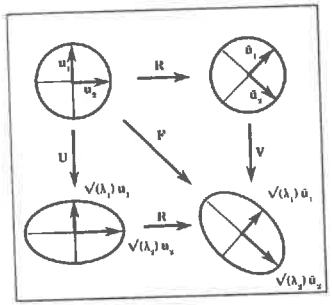
Darstellungen für

den rechten Streckungstensor	$\mathbf{U} = \sum_i \sqrt{(\lambda_i)}\, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$	$\in Sym^+(V,V)$
den rechten *Cauchy-Green*-Tensor	$\mathbf{C} = \sum_i \lambda_i\, \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$	$\in Sym^+(V,V)$
den linken Streckungstensor	$\mathbf{V} = \sum_i \sqrt{(\lambda_i)}\, \bar{\mathbf{u}}_i \otimes \bar{\mathbf{u}}_i$	$\in Sym^+(V,V)$
den linken *Cauchy-Green*-Tensor	$\mathbf{B} = \sum_i \lambda_i\, \bar{\mathbf{u}}_i \otimes \bar{\mathbf{u}}_i$	$\in Sym^+(V,V)$
den Deformationsgradienten	$\mathbf{F} = \sum_i \sqrt{(\lambda_i)}\, \bar{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i$	$\in Aut(V)$
dessen Drehungs-Anteil	$\mathbf{R} = \sum_i \bar{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i$	$\in Ort^+(V)$
	mit $\mathbf{R}(\mathbf{u}_i) = \bar{\mathbf{u}}_i$.	

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY 1789 - 1857
GEORGE GREEN 1793 - 1841

Die geometrische Deutung der polaren Zerlegung ist folgende:
Man kann die Deformation des Tangentialraumes in einem Körperpunkt auffassen als

- zunächst einer reinen Drehung mit $\mathbf{R}$ und einer anschließenden Verzerrung ohne mittlere Drehung mit $\mathbf{V}$, oder
- einer Verzerrung ohne mittlere Drehung mit $\mathbf{U}$ und einer anschließenden reinen Drehung mit $\mathbf{R}$.



Andere in der Literatur verwendete Deformationsmaße sind folgende:

der Verschiebungsgradient $\quad \mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad \in Lin(V,V)$,

der Greensche Tensor $\quad \mathbf{D}^G := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^* + \mathbf{H}^*\mathbf{H}) \quad \in Sym(V,V)$,

der *Almansische* Tensor $\quad \mathbf{D}^A := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad \in Sym(V,V)$,

der *Henckysche* Tensor $\quad \mathbf{D}^H := \ln \mathbf{V} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_i \ln(\lambda_i)\, \hat{\mathbf{u}}_i \otimes \hat{\mathbf{u}}_i \quad \in Sym(V,V)$,

der Flächenkonfigurations-Tensor $\quad \mathbf{D}^F := \det \mathbf{F}\, \mathbf{F}^* \quad \in Aut(V)$.
(s. S. 173)

EMILIO ALMANSI 1869 - 1948

HEINRICH HENCKY 1885 - 1951

Alle diese Tensoren sind - global betrachtet - Felder auf dem deplazierten Körper. Der Übersichtlichkeit halber haben wir das Ortsargument unterdrückt und werden dies auch so beibehalten bei unseren lokalen Betrachtungen.

Fallen Bezugs- und Momentanplazierung zusammen, dann werden einige Verzerrungsmaße zu Identität:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} = \mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{D}^F = \mathbf{I} ,$$

während die folgenden Null werden

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}^G = \mathbf{D}^A = \mathbf{D}^H = \mathbf{O} .$$

8.2 Zusammenhänge zwischen intrinsischer und bezogener Beschreibungsweise

Es waren

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\, \mathbf{K}_o^{-1}$$

der Deformationsgradient und

$$\mathbf{G} := \mathbf{K}^* \mathbf{K}$$

die Konfiguration des Massenelementes. Wir nennen nun

$$\mathbf{G}_o := \mathbf{K}_o^* \mathbf{K}_o$$

Bezugs-Konfiguration. Daraus folgen dann

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}\, \mathbf{G}_o^{-1}\, \mathbf{K}^*$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{K}_o^{-1*}\, \mathbf{G}\, \mathbf{K}_o^{-1}$$

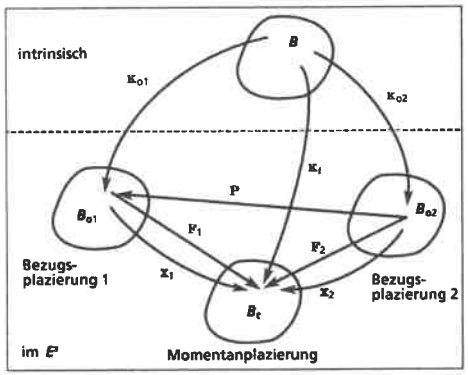
$$\mathbf{G} = \mathbf{K}_o^*\, \mathbf{C}\, \mathbf{K}_o = \mathbf{K}_o^*\, \mathbf{F}^d\, \mathbf{F}\, \mathbf{K}_o .$$

Seien ρ_κ die Massendichte in κ und ρ_o diejenige in κ_o. Dann gilt (s. S. 78)

$$\rho_o/\rho_\kappa = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \sqrt{\det \mathbf{C}} = \sqrt{\det \mathbf{B}} = \sqrt{\det (\mathbf{G}\, \mathbf{G}_o^{-1})} = \sqrt{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)} .$$

8.3 Wechsel der Bezugsplazierung

Die Größen $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}_o$, usw. hängen von der willkürlich gewählten Bezugsplazierung ab. Wir wollen deshalb untersuchen, wie sie sich beim Wechsel der Bezugsplazierung transformieren.



Seien deshalb $\mathbf{x}_{o1}$ und $\mathbf{x}_{o2}$ zwei Bezugsplazierungen. Dann ist

$$\mathbf{x}_{o1}\,\mathbf{x}_{o2}^{-1} : B_{o2} \to B_{o1}$$

der Wechsel der Bezugsplazierung. Auf B_{o2} existiert der Gradient als

$$\mathbf{P} := Grad(\mathbf{x}_{o1}\,\mathbf{x}_{o2}^{-1}) = \mathbf{K}_{o1}\,\mathbf{K}_{o2}^{-1} .$$

Nach der Kettenregel ergeben sich folgende Transformationen der Deformationstensoren

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1\,\mathbf{P}$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{F}_2 - \mathbf{I} = \mathbf{F}_1\,\mathbf{P} - \mathbf{I} = \mathbf{H}_1\,\mathbf{P} + \mathbf{P} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{F}_2^{*}\,\mathbf{F}_2 = \mathbf{P}^{*}\,\mathbf{C}_1\,\mathbf{P}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_2\,\mathbf{F}_2^{*} = \mathbf{F}_1\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^{*}\,\mathbf{F}_1^{*} ,$$

während die intrinsische Konfiguration $\mathbf{G}$ invariant gegen Wechsel der Bezugsplazierung ist, da sie nicht von ihr abhängt. Dies macht den entscheidenden Vorteil der Verwendung intrinsischer Konfigurationen aus.

8.4 Bezogene Beschreibungsweise in Koordinaten

Seien $\{\phi^i\}$ und $\{\psi^i\}$ beliebige Koordinatensysteme in B_o bzw. B_t (oder in E^3) mit den *Gauß*schen Basen

$$\mathbf{t}_{\phi k} := \partial \mathbf{r} / \partial \phi^k \simeq \partial/\partial\phi^k$$
$$\mathbf{k}_\phi{}^i := d\phi^i / d\mathbf{r} \simeq d\phi^i$$

bzw.

$$\mathbf{t}_{\psi k} := \partial \mathbf{r} / \partial \psi^k \simeq \partial/\partial\psi^k$$
$$\mathbf{k}_\psi{}^i := d\psi^i / d\mathbf{r} \simeq d\psi^i$$

und den Metrikkoeffizienten

$$g_{\phi km} := \langle \mathbf{t}_{\phi k}, \mathbf{t}_{\phi m} \rangle$$
$$g_\phi{}^{il} := \langle \mathbf{k}_\phi{}^i, \mathbf{k}_\phi{}^l \rangle$$
$$g_{\psi km} := \langle \mathbf{t}_{\psi k}, \mathbf{t}_{\psi m} \rangle$$
$$g_\psi{}^{il} := \langle \mathbf{k}_\psi{}^i, \mathbf{k}_\psi{}^l \rangle .$$

Die Verrückung wird global beschrieben durch:

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}\,\mathbf{x}_o^{-1} : E^3 \supset B_o \to B_t \subset E^3$$

mit den Koordinatenfunktionen (s. S. 48, 49)

$$x^i := p^i\,\psi\,\mathbf{x}\,\phi^{-1} : \mathbb{E}^3 \supset \phi(B) \to \mathbb{E}$$
$$(\phi^1, \phi^2, \phi^3) \mapsto \psi^i .$$

Der Gradient von $\mathbf{x}$ ist der Deformationsgradient:

$$\mathbf{F} := \mathbf{x}_* = Grad\,\mathbf{x} : V \to V$$

mit der Darstellung gem. S 4.7:

$$\mathbf{F} = \partial x^k(\phi^1, \phi^2, \phi^3) / \partial\phi^i \;\; \mathbf{t}_{\psi k} \otimes \mathbf{k}_\phi{}^i .$$

Damit folgen

$$\mathbf{F}^{*} = \partial x^k(\phi^1, \phi^2, \phi^3) / \partial\phi^i \;\; \mathbf{k}_\phi{}^i \otimes \mathbf{t}_{\psi k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\,\mathbf{F}^* = \partial x^k / \partial\phi^i \;\; \partial x^m / \partial\phi^l \;\; \langle \mathbf{k}_\phi{}^i, \mathbf{k}_\phi{}^l \rangle \;\; \mathbf{t}_{\psi k} \otimes \mathbf{t}_{\psi m}$$
$$= \partial x^k / \partial\phi^i \;\; \partial x^m / \partial\phi^l \; g_\phi{}^{il} \; \mathbf{t}_{\psi k} \otimes \mathbf{t}_{\psi m}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^*\,\mathbf{F} = \partial x^k / \partial\phi^i \;\; \partial x^m / \partial\phi^l \;\; \langle \mathbf{t}_{\psi k}, \mathbf{t}_{\psi m} \rangle \;\; \mathbf{k}_\phi{}^i \otimes \mathbf{k}_\phi{}^l$$
$$= \partial x^k / \partial\phi^i \;\; \partial x^m / \partial\phi^l \; g_{\psi km} \;\; \mathbf{k}_\phi{}^i \otimes \mathbf{k}_\phi{}^l \, .$$

Es gibt zwei interessante *Spezialfälle*:

1) B_0 und B_t werden bez. *eines* Koordinatensystems beschrieben:

$$\psi^i = \phi^i$$
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{t}_{\phi i} = \mathbf{t}_{\psi i}$$
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{k}_\phi{}^i = \mathbf{k}_\psi{}^i \, ,$$

was die Rechnung vereinfacht.

2) **mitgeschleppte Koordinaten**: hier werden die Funktionen x_i trivial:

$$\phi^i = x^i(\phi^1, \phi^2, \phi^3)$$

physikalische Interpretation: ein materieller Punkt hat in beiden Plazierungen dieselben Koordinatenwerte. Hier wird $\partial x^k / \partial\phi^i$ zur Einheitsmatrix $[\delta^k{}_i]$. $\mathbf{F}$ ist jedoch weiterhin nicht-trivial, da *räumlich* zwischen ϕ^i und ψ^i unterschieden werden muß und damit auch zwischen den natürlichen Basen $\{\mathbf{t}_{\phi i}\}$, $\{\mathbf{t}_{\psi i}\}$ und $\{\mathbf{k}_\phi{}^i\}$, $\{\mathbf{k}_\psi{}^i\}$. Es gelten die besonders einfachen Darstellungen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{t}_{\psi i} \otimes \mathbf{k}_\phi{}^i$$
$$\mathbf{B} = g_\phi{}^{il} \; \mathbf{t}_{\psi i} \otimes \mathbf{t}_{\psi l}$$
$$\mathbf{B}^{-1} = g_{\phi il} \; \mathbf{k}_\psi{}^i \otimes \mathbf{k}_\psi{}^l$$
$$\mathbf{C} = g_{\psi il} \; \mathbf{k}_\phi{}^i \otimes \mathbf{k}_\phi{}^l$$
$$\mathbf{C}^{-1} = g_\psi{}^{il} \; \mathbf{t}_{\phi i} \otimes \mathbf{t}_{\phi l}$$
$$\mathbf{D}^G = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \tfrac{1}{2}(g_{\psi il} - g_{\phi il}) \; \mathbf{k}_\phi{}^i \otimes \mathbf{k}_\phi{}^l$$
$$\mathbf{D}^A = \tfrac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \tfrac{1}{2}(g_{\psi il} - g_{\phi il}) \; \mathbf{k}_\psi{}^i \otimes \mathbf{k}_\psi{}^l \, .$$

d. h. $\mathbf{D}^G$ und $\mathbf{D}^A$ haben dieselben Matrizen-Repräsentationen als Differenzen der Metrikkoeffizienten bezüglich der unterschiedlichen Basen.

Da wir in der Wahl der Koordinatensysteme frei sind, lassen sich diese Spezialfälle immer erzeugen.

8.5 Kleine Verformungen

Ein Maß für die Größe von Verformungen (= Verzerrungen und Drehungen) ist die Norm des Verschiebungsgradienten:

$$\varepsilon := \|\mathbf{H}\| = \sqrt{sp(\mathbf{H}\,\mathbf{H}^*)} \, .$$

Man gelangt zur **Theorie kleiner Verformungen** (gegenüber einer bestimmten Bezugsplazierung), wenn man alle Terme von der Größenordnung ε^2 gegenüber linearen vernachlässigt. Dies soll nun präzisiert werden.

Seien U und V normierte Vektorräume und

$$f : U \to V$$

eine Funktion (es reichte, wenn f auf einer Nullumgebung in U definiert wäre). Dann heißt f **von der Ordnung** ε^2, falls

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\|f(\mathbf{H})\| / \varepsilon \right) = 0$$

für alle Nullfolgen gilt. Wir schreiben in diesem Falle

$$f(\mathbf{H}) \approx 0 \, .$$

Zwei Funktionen

$$f, g : U \to V$$

sind gleich von der Ordnung ε^2, falls ihre Differenz von der Ordnung ε^2 ist:

$$f \approx g \quad : \qquad f - g \approx 0 \, .$$

Wir definieren den **linearisierten Greenschen Verzerrungstensor**

$$\mathbf{E}(\mathbf{H}) := \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) = \mathbf{D}^G(\mathbf{H}) \in Sym(V,V)$$

Ihm kommt eine große praktische Bedeutung zu, da er linear in den Verschiebungen ist. Es gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{H})^2 \approx \mathbf{O}\,.$$

Stellt man den Verschiebungsvektor bez. einer Orthonormalbasis $\{e_i\}$ dar als $\mathbf{u} = u^i e_i$, so hat $\mathbf{E}$ bez. $\{e_i \otimes e_j\}$ die Komponenten

$$\varepsilon^{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial u^i/\partial x^j + \partial u^j/\partial x^i)\,.$$

S 8.2: In der Theorie kleiner Verformungen gelten folgende Beziehungen:

1) $\mathbf{R} \approx \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^*) = \mathbf{I} - \tfrac{1}{2}\,rot\,\mathbf{u} \times \mathbf{I}$
2) $\mathbf{U} \approx \mathbf{I} + \mathbf{E} \approx \mathbf{V}$
3) $\mathbf{U}^{-1} \approx \mathbf{I} - \mathbf{E} \approx \mathbf{V}^{-1}$
4) $\mathbf{C} \approx \mathbf{B} \approx \mathbf{I} + 2\mathbf{E}$
5) $\mathbf{C}^{-1} \approx \mathbf{B}^{-1} \approx \mathbf{I} - 2\mathbf{E}$
6) $\mathbf{F}^{-1} \approx \mathbf{I} - \mathbf{H}$
7) $det\,\mathbf{U} = det\,\mathbf{V} = det\,\mathbf{F} \approx 1 + sp\,\mathbf{E}$
8) $det\,\mathbf{B} = det\,\mathbf{C} \approx 1 + 2\,sp\,\mathbf{E}$
9) $\mathbf{D}^F \approx (1 + sp\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} - \mathbf{H}^*$

B: $\mathbf{D}^G := \tfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$

$\Rightarrow \quad \mathbf{C} = 2\,\mathbf{D}^G + \mathbf{I} \approx 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$

$\mathbf{U} \approx \mathbf{E} + \mathbf{I}$, weil $\mathbf{U}^2 := \mathbf{C}$ (2.1)

$\mathbf{U}^{-1} \approx \mathbf{I} - \mathbf{E}$, weil $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} \approx \mathbf{I}$ (3.1)

$\mathbf{R} = \mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1} \approx (\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{E}) = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^*) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}$

mit $\boldsymbol{\phi} := -\tfrac{1}{2}\,rot\,\mathbf{u}$ (s. S. 35, 62) (1)

$\mathbf{V} = \mathbf{R}\,\mathbf{U}\,\mathbf{R}^* \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I})(\mathbf{I} + \mathbf{E})(\mathbf{I} - \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) \approx \mathbf{I} + \mathbf{E}$ (2.2), (3.2)

$\mathbf{U}^2 \approx \mathbf{V}^2 := \mathbf{B} \approx \mathbf{C}$ (4)

$\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{C} \approx (\mathbf{I} + 2\mathbf{E})(\mathbf{I} - 2\mathbf{E}) \approx \mathbf{I}$ (5)

$\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-1} \approx (\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{H}) \approx \mathbf{I}$ (6)

Seien d_i die Eigenwerte von $\mathbf{D}^G$.

$det\,\mathbf{U} \approx det(\mathbf{I} + \mathbf{D}^G) = (1 + d_1)(1 + d_2)(1 + d_3)$

$\approx 1 + sp\,\mathbf{D}^G \approx det\,\mathbf{V} \approx 1 + sp\,\mathbf{E}$ (7)

$det\,\mathbf{C} = det\,\mathbf{U}^2 \approx (1 + sp\,\mathbf{E})^2 \approx 1 + 2\,sp\,\mathbf{E}$ (8)

$\mathbf{D}^F := det\,\mathbf{F}\,\mathbf{F}^* \approx (1 + sp\,\mathbf{E})(\mathbf{I} - \mathbf{H}^*)$

$\approx (1 + sp\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} - \mathbf{H}^*$ (9) ⊠

Bei kleinen Verformungen benutzt man meistens $\mathbf{E}$ als (linearen) Deformationstensor und dessen Spur als Maß für die Volumenänderung, denn

$$\rho_0/\rho_K \approx 1 + sp\,\mathbf{E}$$

oder

$$\rho_K/\rho_0 \approx 1 - sp\,\mathbf{E} \approx 1 - (\rho_K - \rho_0)/\rho_0$$

und schließlich

$$(\rho_K - \rho_0)/\rho_0 \approx sp\,\mathbf{E}\,.$$

Wir wollen schließlich noch den lokalen Drehungs-Anteil von $\mathbf{F}$ bei kleinen Deformationen genauer betrachten. Es läßt für jedes orthogonale $\mathbf{R}$ mit positiver Determinante eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ derart finden, daß $\mathbf{R}$ bez. $\{e_i \otimes e_j\}$ die folgende Komponentenmatrix besitzt:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

weil $\cos\phi \approx 1$ und $\sin\phi \approx \phi$ sind. Vergleichen wir dies mit dem Ergebnis des vorigen Satzes unter (1), so sehen wir, daß die letzte Matrix $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}$ mit $\boldsymbol{\phi} = \phi\,e_3$ repräsentiert. Man beachte, daß kleine Deformationen nicht nur *kleine Dehnungen*, sondern auch *kleine Drehungen* impliziert.

8.6 Einfache Scherung

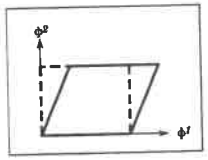
Wir betrachten einen beliebig geformten Körper, beispielsweise einen Quader, der in der Bezugsplazierung im Gebiet der kartesischen Koordinaten ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 liegt, während die Momentanplazierung durch die kartesischen Koordinaten ψ^1, ψ^2, ψ^3 abgedeckt sei. Die Verrückung sei gegeben durch die Koordinatenbeziehungen

$$\mathbf{x}^k(\phi^1, \phi^2, \phi^3) := \psi^k \circ \boldsymbol{\phi}^{-1} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$$

in der Form

$$\begin{aligned} \psi^1 &= \phi^1 + K\,\phi^2 \\ \psi^2 &= \phi^2 \\ \psi^3 &= \phi^3 \end{aligned}$$

mit der *Scherzahl* $K \in \mathbb{R}$. Für $K = 0$ koinzidieren Bezugs- und Momentanplazierung.



Für kartesische Koordinaten fallen die *Gauß*schen Basen zu einer Orthogonalbasis $\{e_k\}$ zusammen. Der Deformationsgradient ist gem S. 85:

$$\mathbf{F} = \partial x^k(\phi^1, \phi^2, \phi^3) / \partial \phi^i \;\; t_{\psi k} \otimes k_\phi{}^i = \mathbf{I} + K\, e_1 \otimes e_2 \; .$$

Da er nicht vom Ort abhängt, handelt es sich also um einen *homogenen* Deformationszustand. Wegen $\det \mathbf{F} = 1$ sind die Dichten in allen Plazierungen gleich, so daß die einfache Scherung die wichtige Eigenschaft besitzt, *isochor* (volumentreu) zu sein. Das Verschiebungsvektorfeld ist hier

$$\mathbf{u} = K\,\phi^2\, e_1$$

und der Verschiebungsgradient folglich

$$\mathbf{H} = K\, e_1 \otimes e_2 \; ,$$

was durch die Beziehung

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$$

verifiziert wird. Man weist mit

$$\mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$$

schnell die Darstellung der Inversen

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - K\, e_1 \otimes e_2$$

nach. Um zur polaren Zerlegung von $\mathbf{F}$ zu gelangen, bilden wir zunächst die beiden *Cauchy-Green*-Tensoren, nämlich den rechten

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^* \mathbf{F} = \mathbf{I} + K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + K^2\, e_2 \otimes e_2$$

und den linken

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\,\mathbf{F}^* = \mathbf{I} + K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + K^2\, e_1 \otimes e_1 \; .$$

Deren Inversen sind

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{F}^{-*} = \mathbf{I} - K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + K^2\, e_1 \otimes e_1$$

bzw.

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-*}\,\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + K^2\, e_2 \otimes e_2 \; .$$

Weiterhin erhalten wir den *Green*schen Verzerrungstensor als

$$\mathbf{D}^G = \tfrac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \tfrac{1}{2}K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \tfrac{1}{2}K^2\, e_2 \otimes e_2$$

und den *Almansi*schen Tensor

$$\mathbf{D}^A = \tfrac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) = \tfrac{1}{2}K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) - \tfrac{1}{2}K^2\, e_2 \otimes e_2 \, .$$

Für kleine Deformationen müßte

$$|K| \ll 1$$

sein. Bei der Linearisierung des *Green*schen Verzerrungstensors verschwindet der quadratische Ausdruck in K, so daß

$$\mathbf{E} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) = \tfrac{1}{2}K(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$$

ist. Auch hier erhält man statt einer Dichteänderung

$$sp\, \mathbf{E} = 0 \; .$$

Das Eigenwertproblem von $\mathbf{C}$ (und $\mathbf{U}$) besteht darin, orthogonale Richtungen u_i zu suchen, für die

$$\langle \mathbf{F}(u_i) \, , \mathbf{F}(u_j) \rangle = \langle u_i \, , \mathbf{C}(u_j) \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

wird. Man rät zunächst $u_3 = e_3$ als Eigenrichtung, womit u_1 und u_2 durch Drehung von e_1 und e_2 in ihrer Ebene erzeugt werden können. Ist θ der noch zu bestimmende Drehwinkel, so sind

$$\mathbf{u}_1 = \cos\theta\, \mathbf{e}_1 + \sin\theta\, \mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{u}_2 = -\sin\theta\, \mathbf{e}_1 + \cos\theta\, \mathbf{e}_2 \ .$$

Damit folgt

$$<\mathbf{u}_1 , \mathbf{C}(\mathbf{u}_2)> = K\,(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) + K^2 \sin\theta\cos\theta = 0 \ ,$$

so daß

$$K = \tan\theta - \cot\theta = -2\cot(2\theta)$$

oder

$$\theta = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arccot}(-\tfrac{1}{2}K) \ .$$

Diese transzendentale Gleichung löst für jedes $K \in \mathbb{R}$ genau ein θ, das betragsmäßig zwischen $\pi/4$ und $\pi/2$ liegt. Die zugehörigen Eigenwerte erhält man aus dem *Rayleigh*-Quotienten, z. B. den ersten

$$\lambda_1 = <\mathbf{u}_1 , \mathbf{C}(\mathbf{u}_1)>/<\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1> = \cos^2\theta + 2K\cos\theta\sin\theta + (1 + K^2)\sin^2\theta \ .$$

Setzt man darin für K obige Beziehung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta + \sin^2\theta + (\tan^2\theta - 2 + \cot^2\theta)\sin^2\theta \\ &= (1 + \tan^2\theta)\sin^2\theta \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin^2\theta / \cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta \ .\end{aligned}$$

Der dritte Eigenwert ist offensichtlich $\lambda_3 = 1$, und aus der Beziehung

$$1 = \det^2 \mathbf{F} = \det \mathbf{C} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

bestimmt man

$$\lambda_2 = \cot^2\theta \ .$$

Da der Deformationsgradient allgemein die Darstellung

$$\mathbf{F} = \sum \sqrt{(\lambda_i)}\ \hat{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

hat, erhält man die Eigenvektoren $\mathbf{u}_i$ von $\mathbf{B}$ (und $\mathbf{V}$) vermittels

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_i) = \sqrt{(\lambda_i)}\ \hat{\mathbf{u}}_i \ ,$$

also

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_1 &= 1/\sqrt{(\lambda_1)}\ \mathbf{F}(\mathbf{u}_1) \\ &= (1/\tan\theta)\ [(\cos\theta + K\sin\theta)\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2] \\ &= (\cos^2\theta/\sin\theta)\,\mathbf{e}_1 + K\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2 \\ &= \sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_2 \ ,\end{aligned}$$

und dazu senkrecht

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = -\cos\theta\,\mathbf{e}_1 + \sin\theta\,\mathbf{e}_2 \ .$$

Zur geometrischen Interpretation des Vorhergehenden führen wir den Winkel

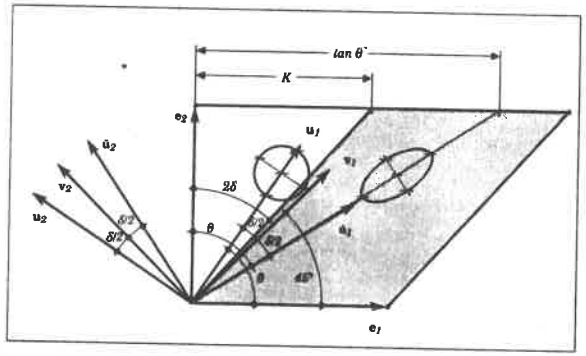
$$\delta := 2\theta - \pi/2$$

ein und berechnen mittels der trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned}2\sin\theta\cos\theta &= \sin 2\theta \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta &= \cos 2\theta\end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned}K &= \tan\theta - \cot\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)/\sin\theta\cos\theta = -2\cos 2\theta/\sin 2\theta \\ &= -2\cot 2\theta = -2\tan(\pi/2 - 2\theta) = 2\tan(2\theta - \pi/2) = 2\tan\delta \ .\end{aligned}$$



Der Winkel, um den der Drehungs-Anteil

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{u}}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

dreht, ist der *arccos* von

$$\begin{aligned}<\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1> &= <\hat{\mathbf{u}}_1 , \mathbf{u}_1> \\ &= 2\sin\theta\cos\theta \\ &= \sin 2\theta \\ &= \sin(\delta + \pi/2) \\ &= \cos\delta \ ,\end{aligned}$$

also δ selbst. Man sieht, daß bei kleinen Deformationen mit $|K| \ll 1$ auch die Drehwinkel δ klein sein müssen: $|\delta| \ll 1$.

In der Bezugsplazierung sind die meisten der vorangehenden Ausdrücke nur als Grenzwerte definiert, falls $K \to 0$, $\theta \to 45°$ und $\delta \to 0$. Für $K = 0$ sind alle Richtungen Eigenrichtungen von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$.

Für $K \to \infty$ gehen θ und δ nach $90°$ und $\mathbf{u}_1$ nach $\mathbf{e}_2$, sowie $\hat{\mathbf{u}}_1$ nach $\mathbf{e}_1$.

Für $K > 0$ und damit $\theta > 45°$ erhalten wir für die Eigenwerte von $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_1} &= \tan\theta > 1 \\ \sqrt{\lambda_2} &= \cot\theta < 1 \\ \sqrt{\lambda_3} &= 1 \end{aligned}$$

Ist K negativ, so ist das Ergebnis symmetrisch zum vorigen bezüglich der $\mathbf{e}_2$ -Achse.

Die physikalische Interpretation ist gemäß der polaren Zerlegung folgende: Die maximal gedehnten Linienelemente (Tangentenvektoren) liegen in der Momentanplazierung in Richtung von $\hat{\mathbf{u}}_1$ und in der Bezugsplazierung in Richtung von $\mathbf{u}_1$. Die minimal gedehnten, d.h. maximal gestauchten sind diejenigen in Richtung von $\hat{\mathbf{u}}_2$ bzw. $\mathbf{u}_2$. Für verschiedene K handelt es sich dabei auch um verschiedene Linienelemente.

Würde man in der Bezugsplazierung auf den Körper in der $\{\phi_1, \phi_2\}$ -Ebene einen Einheits-Kreis malen, so würde sich dieser während der Scherung in eine Ellipse mit den Hauptradien $\sqrt{\lambda_1}$ und $\sqrt{\lambda_2}$ verformen, deren Hauptachsen $\hat{\mathbf{u}}_1$ und $\hat{\mathbf{u}}_2$ wären. Markierte man ihre Richtungen auf dem Körper, so gingen diese bei der Rückdeformation in die Ausgangslage $(K = 0)$ in diejenigen von $\mathbf{u}_1$ bzw. $\mathbf{u}_2$ über.

Das Beispiel wird auf S. 113 fortgesetzt.

9. Raum - Zeit - Kontinuum

Empfohlene Literatur: WANG/ TRUESDELL, TRUESDELL, NOLL (1967)

9.1 Zeit

Bisher haben wir nur einzelne "diskrete" Deformationen beschrieben. Da aber zeitliche Abläufe in der Mechanik eine grundlegende Rolle spielen, soll nun auch die *Zeit* neben dem *Raum* als fundamentale unabhängige Variable axiomatisch eingeführt werden, und zwar, ähnlich dem physikalischen Raum, als Kontinuum. Wir denken uns in der nicht-relativistischen Mechanik Zeit und Raum als unabhängig voneinander : die Zeit soll an allen Orten gleich ablaufen.

D 9.1: Die Zeit ist ein eindimensionaler orientierter *Euklid*ischer Raum $\mathcal{T}$.

Die Orientierung sei positiv für in die Zukunft gerichtete Translationen. Der Eins-Abstand zweier Zeitpunkte heißt **Zeiteinheit**.

D 9.2: Ein positiv-orientiertes normiertes Bezugssystem $(0, \{\mathbf{e}\})$ in $\mathcal{T}$ heißt **Uhr**.

Dabei ist es üblich, als Bezugspunkt 0 den Geburtszeitpunkt berühmter Männer (warum nicht Frauen?) zu wählen, z. B. J. Christus, Mohammed. In der physikalischen Welt jedoch gibt es keinen ausgezeichneten Bezugspunkt.

Die positive Orientierung von $\mathbf{e}$ soll bewirken, daß für $t \in \mathcal{T}$

$$\lambda\,\mathbf{e}(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

für $\lambda > 0$ spätere Zeitpunkte als t und für $\lambda < 0$ frühere beschreibt.

Jede Uhr induziert eine orientierte Isometrie

$$\begin{aligned} U : \mathcal{T} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \tau = \vdash 0, t \dashv \end{aligned}$$

(Zeit-Koordinate). Werden zwei Uhren $U_1 = (0_1, \{\mathbf{e}\})$, $U_2 = (0_2, \{\mathbf{e}\})$ verwendet, so läßt sich der Uhrenwechsel als affine Abbildung

$$U_1\, U_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\tau_2 = \vdash O_2, t \to \quad \mapsto \quad \tau_1 = \vdash O_1, t \to = \vdash O_1, O_2 \to + \vdash O_2, t \to = \tau_0 + \tau_2$$

mit der Konstanten $\tau_0 := \vdash O_1, O_2 \to \in \mathbb{R}$ darstellen. Das Differential des Uhrenwechsels ist $(U_1\, U_2^{-1})_* = 1 \in \mathbb{R}$.

Sei V ein normierter Vektorraum und

$$f : T \to V$$

eine vektorwertige Zeitfunktion. Dann ist die Zeitableitung, falls existent, definiert durch (s. S 4.7)

$$f_*(\tau_1) := \partial(f\, U^{-1})/\partial\tau|_{\tau_1}\, 1 \otimes 1 = d/d\tau(f\, U^{-1})|_{\tau_1} \quad .$$

Transformieren wir die Zeitableitung wieder auf T zurück, so ist

$$f'(t) := f_*[\, U(t)\,] \; .$$

Verwendet man zwei Uhren, so ist die Zeitableitung unabhängig von der benutzten Uhr, wie es auch Zeitdifferenzen sind.

9.2 Raum-Zeit-Kontinuum

Wir haben den *Raum* als dreidimensionalen *Euklid*ischen Raum und die *Zeit* unabhängig davon als eindimensionalen *Euklid*ischen Raum eingeführt. Um Bewegungen von Körpern zu beschreiben, müssen beide Konzepte miteinander in Beziehung gebracht werden.

Dafür haben wir den geometrischen Begriff *Bündel* zum zentralen Konzept gewählt. Wenn, wie in unserem Falle, Basis und Fasern eines Bündels *Euklid*isch sind (ohne Parallelelismus), nennen wir es ***Euklid*ische Bündel**.

Anschaulich gesprochen gehen wir davon aus, daß wir von dem *Raum* samt *Körper* zu jedem Zeitpunkt fotogrammetrische Aufnahmen machen können. Jede Aufnahme entspricht einer Bündelfaser. Wir protokollieren zu jeder Aufnahme den Aufnahme-Zeitpunkt (Fußpunkt). Die *Zeit* ist damit der Basisraum des Bündels. Wir

können auf jeder Aufnahme räumliche Entfernungen messen und zwischen den Aufnahmen zeitliche Abstände bestimmen. Räumliche Entfernungen zwischen nicht-gleichzeitigen Punkten sind jedoch ohne den *Beobachter*-Begriff des nächsten Abschnitts nicht definiert.

Da der Basisraum und die Faserräume als metrische auch Topologien tragen, kann man mit deren Hilfe auch das Bündel topologisieren. Wir werden dies jedoch nicht tun, da die übliche Bündel-Topologie in physikalischer Hinsicht zu grob ist.

D 9.3: Als (*Newton*sches) **Raum-Zeit-Kontinuum** (Ereigniswelt) bezeichnen wir ein *Euklid*isches Faserbündel C mit der Zeit T als Basisraum, der Zeitpunkt-projektion π und dem dreidimensionalen orientierten *Euklid*ischen Raum E^3 als typischer Faser.
Ein Element aus C heißt (raum-zeitliches) **Ereignis**; ein Schnitt

$$\beta : T \to C$$

des Raum-Zeit-Kontinuums heißt **Bahn**.

Letztere läßt sich deuten als zeitabhängige Folge von Ereignissen.

Wir wollen uns zunächst klarmachen, welche Metriken durch die Metriken von T und E^3 in C induziert werden.

Einmal können wir die Metrik des Basisraums T als Quasimetrik Δt auf C zurückziehen:

$$\Delta t(x, y) := |\pi(x) - \pi(y)| \qquad x, y \in C .$$

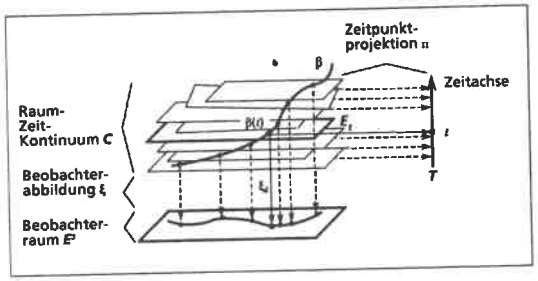
Wir nennen Δt **Zeitdifferenz** der Ereignisse x und y. Ist sie Null, so heißen die Ereignisse **simultan**. Da die Mengen der simultanen Ereignisse gerade den Faserräumen $E_t := \pi^{-1}(t)$ entsprechen, heißen jene auch **Simultanräume**. Da diese isomorph zur typischen Faser E^3 sein sollen, sind die Simultanräume ebenfalls dreidimensionale *Euklid*ische Räume. Man kann das Raum-Zeit-Kontinuum nun auch als die disjunkte Vereinigung der Simultanräume auffassen $C = \cup_{t \in T} E_t$ und den Wert einer Bahn als das Ereignis $\beta(t) \in E_t \subset C$.

Da jeder Simultanraum *Euklid*isch ist, trägt er eine Metrik d, genannt **räumlicher Abstand** der simultanen Ereignisse. Man beachte, daß für nicht-simultane Ereignisse eine Zeitdifferenz, nicht jedoch ein räumlicher Abstand erklärt sind. Das Bündel C ist

also kein metrischer und schon gar kein *Euklid*ischer Raum, und trägt zunächst auch keine differenzierbare Struktur oder einen kanonischen Parallelismus.

9.3 Beobachter

Bisher sind das Raum-Zeit-Kontinuum C und die Menge $T \times E^3$ bezüglich ihrer *Euklid*ischen Teilstrukturen zwar isomorph, es ist jedoch kein Isomorphismus ausgezeichnet. Bei dem folgenden Begriff handelt es sich um einen solchen willkürlichen Isomorphismus.



D 9.4: Sei C Raum-Zeit-Kontinuum, T die Zeit, E^3 typische Faser, genannt **Beobachterraum**. Dann ist ein **Beobachter** ξ eine bijektive Abbildung

$$\xi : C \to T \times E^3 ,$$

so daß

$$\pi\, \xi^{-1}(\cdot, E^3) = I_T$$

ist, und auf den Fasern

$$\xi|_{E_t} : E_t \to (t, E^3)$$

für alle $t \in T$ isometrisch und orientierungstreu sind.

Es gibt offensichtlich unendlich viele Beobachter, darunter aber keinen, der ausgezeichnet ist.

Wie bereits angedeutet, kann man einen Beobachter ξ immer dadurch konstituieren, daß auf jeder Faser $E_t := \pi^{-1}(t)$ eine zeitabhängige Abbildung auf den Beobachterraum

$$\xi_t : E_t \to E^3 \qquad \forall\, t \in T$$

angegeben wird, die isometrisch und orientierungstreu ist. Dann ist nämlich

$$\xi(\cdot) := (\pi(\cdot), \xi_{\pi(\cdot)}(\cdot))$$

eine Beobachterabbildung. Wenn wir später ξ_t auch auf Ereignisse anwenden, so wird das Bündel C als disjunkte Vereinigung seiner Fasern E_t aufgefaßt. Damit müssen die Argumente von ξ_t aus $E_t \subset C$ sein.

Mit Hilfe eines Beobachters können wir nun auch den räumlichen Abstand zweier Ereignisse einführen, die *nicht* simultan stattfinden:

Seien $x, y \in C$, so sei

$$d_\xi(x,y) := d(\xi_{\pi(x)}(x), \xi_{\pi(y)}(y)) .$$

Dieser Abstand ist offensichtlich beobachterabhängig.

Eine Bahn β heißt **raumfest** bezüglich des Beobachters ξ, falls

$$\xi\, \beta : T \to T \times E^3$$

im zweiten Ausgang konstant ist, d. h. es existiert ein $y \in E^3$, so daß

$$(t, y) = \xi\, \beta(t) \qquad \forall\, t \in T.$$

Die Menge der raumfesten Bahnen bezüglich eines Rahmens ist offenbar kanonisch isomorph zum E^3, aber für jeden Beobachter auf andere Weise.

9.4 Geschwindigkeit und Beschleunigung

D 9.5: Sei ξ ein Beobachter des Raum-Zeit-Kontinuums C. Sei V der Translationsraum des E^3 und β Bahn. Sei p die Projektion

$$p : T \times E^3 \to E^3 ,$$

und $o \in E^3$ BZP, so ist

$$r_\xi(\cdot) := \vdash o , p\, \xi\, \beta(\cdot) \dashv : T \to V$$

eine Abbildung, deren Zeitableitungen erklärt sind (s. S. 96). Ist sie aus C^1, so heißt

$$v_\xi := r_\xi^{\cdot} : T \to V$$

Geschwindigkeit der Bahn β bezüglich des Beobachters ξ. Ist sie aus C^2, so heißt

$$b_\xi := r_\xi^{\cdot\cdot} = v_\xi^{\cdot} : T \to V$$

Beschleunigung der Bahn β bezüglich ξ.

Es sei betont, daß beide Begriffe nur bezüglich eines Beobachters definiert sind. Wir werden später sehen, wie sie sich bei differenzierbaren Beobachterwechseln transformieren. Man macht sich außerdem klar, daß v_ξ und b_ξ nicht vom BZP abhängen.

9.5 Bezugssysteme im Raum-Zeit-Kontinuum

kann man sich dadurch beschaffen, daß man

1.) für T eine Uhr wählt, und
2.) folgendermaßen in den Simultanräumen E_t BZSe konstruiert:
   - man wählt in E^3 ein Bezugssystem $(o, \{e_i\})$
   - man wählt einen Beobachter ξ und
   - zieht mit ξ_t^{-1} das BZS in die Simultanräume zurück:

$$o_\xi(t) := \xi_t^{-1}(o) \qquad \forall\, t \in T$$

$$e_{\xi i}(t) := \vdash \xi_t^{-1}(o) , \xi_t^{-1} e_i(o) \dashv \qquad i = 1,2,3.$$

Dann sind $(o_\xi(t) , \{e_{\xi i}(t)\})$ BZSe in den Simultanräumen E_t, die die Eigenschaft haben, bezüglich des Beobachters ξ raumfest zu sein (deswegen der Index ξ).

Bezüglich eines anderen Beobachters sind diese BZSe nicht notwendig raumfest. Man kann natürlich auch unabhängig von Beobachtern BZSe für C konstruieren. Man sollte deshalb zwischen den Begriffen *Beobachter* und *BZS* unterscheiden.

Man macht sich leicht klar, daß zu einem Beobachter unendlich viele raumfeste BZSe existieren, und umgekehrt zu einem BZS in C unendlich viele Beobachter, bezüglich derer es die Eigenschaft hat, raumfest zu sein.

Während den Beobachtern in dieser Theorie eine wichtige Bedeutung zukommt, dienen BZSe lediglich zur einfacheren Handhabung von *Euklid*ischen Räumen und Bündeln.

9.6 Beobachterwechsel

sind deshalb so wichtig, weil die gesamte Kinematik und Dynamik beobachterbezogen formuliert werden, ohne daß spezielle Beobachter ausgezeichnet sind. Eine Ausnahme von diesem Leitsatz bildet lediglich die folgende Einschränkung:

A 9.6: Wir beschränken uns im folgenden auf eine derartige Klasse von Beobachtern, deren Wechsel *zweimal stetig differenzierbar* sind, d. h. sind ξ und ζ zwei Beobachter, und β eine Bahn, so gelte:

$$p\, \xi\, \beta \in C^2 \;\Leftrightarrow\; p\, \zeta\, \beta \in C^2 .$$

Dies kommt der Einführung einer differenzierbaren Struktur auf C gleich, die aber nicht abgeleitet oder definiert werden kann, sondern als natürlich gegebene aufgefaßt werden muß.

Seien ξ und ζ zwei Beobachter, so heißt die Bijektion

$$\zeta\, \xi^{-1} : T \times E^3 \to T \times E^3$$

Beobachterwechsel oder ***Euklid*ische Transformation**. Sie ist auf allen beteiligten *Euklid*ischen Räumen isometrisch, im Sinne der obigen Annahme diffeomorph und in den ersten Argumenten die Zeitidentität 1_T. Letzteres legt es nahe, die nicht-triviale Abbildung

$$a_t := \zeta_t\, \xi_t^{-1} : E^3 \to E^3$$

zu untersuchen. α_t ist eine (zeitabhängige) orientierungstreue Isometrie des E^3 und induziert gemäß dem Befund von S 3.4 eine (ebenfalls zeitabhängige) orthogonale Abbildung Q_t auf den Translationsraum V des E^3 durch

$$Q_t(v) = \alpha_t \, v \, \alpha_t^{-1} \qquad \forall v \in V,$$

die

$$Q_t(\vdash x, y \dashv) = \vdash \alpha_t(x), \alpha_t(y) \dashv \qquad \forall x, y \in E^3$$

leistet. Q_t heißt **Drehung des Beobachters** ζ gegenüber ξ zur Zeit t.

Die folgenden Betrachtungen gelten für alle Zeitpunkte $t \in T$:

S 9.7: Seien $o_\xi(t)$ und $o_\zeta(t)$ BZPe in E_t, die bezüglich der Beobachter ξ bzw. ζ raumfest sind. Sei β Bahn. Dann gilt für die Ortsvektoren

$$r_\xi(t) := \vdash \xi_t(o_\xi(t)), \xi_t(\beta(t)) \dashv$$
$$r_\zeta(t) := \vdash \zeta_t(o_\zeta(t)), \zeta_t(\beta(t)) \dashv$$

die Transformationsgleichung

$$\boxed{r_\zeta(t) = Q_t(r_\xi(t)) + a_t}$$

mit $Q_t \in Ort^+(V)$, der Drehung des Beobachters ζ gegenüber ξ, und

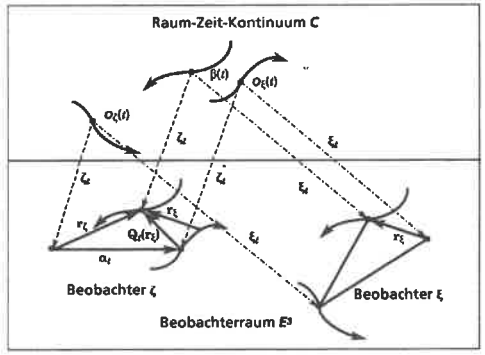
$$a_t := \vdash \zeta_t(o_\xi(t)), \zeta_t(o_\xi(t)) \dashv \in V.$$

B:

$$\begin{aligned}
r_\zeta(t) &:= \vdash \zeta_t(o_\zeta(t)), \zeta_t(\beta(t)) \dashv \\
&= \vdash \zeta_t(o_\xi(t)), \zeta_t(o_\xi(t)) \dashv + \vdash \zeta_t(o_\zeta(t)), \zeta_t(\beta(t)) \dashv \\
&= a_t + \vdash \zeta_t \xi_t^{-1} \xi_t(o_\xi(t)), \zeta_t \xi_t^{-1} \xi_t(\beta(t)) \dashv \\
&= a_t + \vdash \alpha_t \xi_t(o_\xi(t)), \alpha_t \xi_t(\beta(t)) \dashv \\
&= a_t + Q_t[\vdash \xi_t(o_\xi(t)), \xi_t(\beta(t)) \dashv] \\
&= a_t + Q_t(r_\xi(t)) \qquad \boxtimes
\end{aligned}$$

Die inverse Transformation lautet

$$r_\xi(t) = Q_t^*(r_\zeta(t) - a_t).$$



Man beachte, daß die beiden Größen a_t und Q_t im allgemeinen zeitabhängig sind. Infolge der vorher getroffenen Differenzierbarkeitsannahme der Beobachterwechsel (A 9.6) sind auch a_t und Q_t von der Klasse C^3. Die Ortsvektoren $r_\xi(t)$ und $r_\zeta(t)$ sind von der Differenzierbarkeitsklasse C^i, $i = 0, 1, 2$, falls p ξ β bezüglich eines beliebigen Beobachters ξ mindestens von der Klasse C^i ist.

Es läßt sich schnell zeigen, daß a_t vom BZP abhängt, nicht jedoch $a_t^{\cdot}$ und Q_t.

Durch zeitliche Ableitung der Ortsvektoren erhalten wir nun sehr einfach die Transformationsgleichungen für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

$$\begin{aligned}
v_\xi(t) &:= r_\xi^{\cdot}(t) \\
v_\zeta(t) &:= r_\zeta^{\cdot}(t) \\
&= Q_t(v_\xi(t)) + a_t^{\cdot} + Q_t^{\cdot}(r_\xi(t)) \\
&= Q_t(v_\xi(t)) + a_t^{\cdot} + Q_t^{\cdot} Q_t^*(r_\zeta(t) - a_t).
\end{aligned}$$

$Q_t^{\cdot} Q_t^*$ ist für orthogonale Tensoren antimetrisch, denn

$$I^{\cdot} = (Q_t Q_t^*)^{\cdot} = Q_t^{\cdot} Q_t^* + Q_t Q_t^{*\cdot} = Q_t^{\cdot} Q_t^* + (Q_t^{\cdot} Q_t^*)^* = O.$$

Damit erhalten wir die wichtige Transformationsformel für die Geschwindigkeiten

$$\boxed{v_\zeta(t) = Q_t(v_\xi(t)) + a_t^{\cdot} + w_t \times (r_\zeta(t) - a_t)}$$

wobei die Antimetrie von $Q_t^{\cdot} Q_t^{*} \in Skw(V,V)$ ausgenutzt wurde, um die Winkelgeschwindigkeit der Beobachter zueinander

$$w_t := \tfrac{1}{2} axi\,(Q_t^{\cdot} Q_t^{*})$$

einzuführen (s. S. 34). Man beachte, daß $v_\xi(t)$, $v_\zeta(t)$ und Q_t nicht von der Wahl der Bezugspunkte abhängen, und demzufolge die beiden ersten Terme in der Summe auch nicht .

Die inverse Transformation lautet dann

$$\begin{aligned} v_\xi(t) &= Q_t^{*}[v_\zeta(t) - a_t^{\cdot} - Q_t^{\cdot}(r_\zeta(t))] \\ &= Q_t^{*}[v_\zeta(t) - a_t^{\cdot}] - Q_t^{*} Q_t^{\cdot} Q_t^{*}(r_\zeta(t) - a_t) . \end{aligned}$$

Zur weiteren zeitlichen Differentiation benötigen wir die Ableitung $w_t^{\cdot}$. Dazu überlegt man sich, daß

$$w_t \times \cdot := Q_t^{\cdot} Q_t^{*}(\cdot)$$

leisten soll. Demnach ist

$$\begin{aligned} w_t^{\cdot} \times \cdot &= Q_t^{\cdot\cdot} Q_t^{*}(\cdot) + Q_t^{\cdot} Q_t^{*\cdot}(\cdot) \\ &= Q_t^{\cdot\cdot} Q_t^{*}(\cdot) + Q_t^{\cdot} Q_t^{*} Q_t Q_t^{*\cdot}(\cdot) \\ &= Q_t^{\cdot\cdot} Q_t^{*}(\cdot) - w_t \times (w_t \times \cdot) . \end{aligned}$$

Wir werden außerdem die folgende Regel benutzen:

$$(Q_t^{\cdot} Q_t^{*})^2 = Q_t^{\cdot} Q_t^{*} Q_t^{\cdot} Q_t^{*} = - Q_t^{\cdot} Q_t^{*} Q_t Q_t^{*\cdot} = - Q_t^{\cdot} Q_t^{*\cdot} .$$

Damit erhalten wir dann die Transformation der Beschleunigung

$$b_\xi(t) := r_\xi^{\cdot\cdot}(t) = v_\xi^{\cdot}(t)$$

$$\begin{aligned} b_\xi(t) &:= v_\xi^{\cdot}(t) \\ &= Q_t(b_\xi(t)) + a_t^{\cdot\cdot} + 2\,Q_t^{\cdot}(v_\xi(t)) + Q_t^{\cdot\cdot}(r_\xi(t)) \\ &= Q_t(b_\xi(t)) + a_t^{\cdot\cdot} - 2\,(Q_t^{\cdot} Q_t^{*})^2 (r_\zeta(t) - a_t) + 2\,Q_t^{\cdot} Q_t^{*}(v_\zeta(t) - a_t^{\cdot}) + Q_t^{\cdot\cdot} Q_t^{*}(r_\zeta(t) - a_t) \\ &= Q_t(b_\xi(t)) + a_t^{\cdot\cdot} + 2\,Q_t^{\cdot} Q_t^{*} (r_\zeta(t) - a_t) + 2\,Q_t^{\cdot} Q_t^{*}(v_\zeta(t) - a_t^{\cdot}) + Q_t^{\cdot\cdot} Q_t^{*}(r_\zeta(t) - a_t) \\ &= Q_t(b_\xi(t)) + a_t^{\cdot\cdot} + w_t^{\cdot} \times (r_\zeta(t) - a_t) + 2\,w_t \times (v_\zeta(t) - a_t^{\cdot}) - w_t \times [w_t \times (r_\zeta(t) - a_t)] \end{aligned}$$

$$\boxed{b_\zeta(t) = Q_t(b_\xi(t)) + a_t^{\cdot\cdot} + w_t^{\cdot} \times (r_\zeta(t) - a_t) + 2\,w_t \times Q_t(v_\xi(t)) + w_t \times [w_t \times (r_\zeta(t) - a_t)]}$$

mit der

- **Relativbeschleunigung:** $Q_t(b_\xi(t))$
- **Translationsbeschleunigung:** $a_t^{\cdot\cdot}$
- **Winkelbeschleunigung:** $w_t^{\cdot} \times (r_\zeta(t) - a_t)$
- ***Coriolis*beschleunigung:** $2\,w_t \times Q_t(v_\xi(t))$
- **Zentripetalbeschleunigung:** $w_t \times [w_t \times (r_\zeta(t) - a_t)]$

GUSTAVE G. CORIOLIS 1792 - 1843

Man beachte, daß auch die Beschleunigung vom Beobachter, nicht jedoch vom verwendeten BZS abhängt.

Die Relativbeschleunigung wird als **objektiver Anteil** der Beschleunigungs-Transformation bezeichnet, während der (zeitabhängige) Restvektor

$$\begin{aligned} o_t &:= a_t^{\cdot\cdot} + w_t^{\cdot} \times (r_\zeta(t) - a_t) + 2\,w_t \times Q_t(v_\xi(t)) + w_t \times [w_t \times (r_\zeta(t) - a_t)] \\ &= a_t^{\cdot\cdot} + w_t^{\cdot} \times (r_\zeta(t) - a_t) + 2\,w_t \times (v_\zeta(t) - a_t^{\cdot}) - w_t \times [w_t \times (r_\zeta(t) - a_t)] \end{aligned}$$

folglich den **nicht-objektiven Anteil** der Beschleunigungs-Transformation darstellt. Diejenigen Beobachterwechsel, für die grundsätzlich letzterer Anteil nicht auftritt, bilden die *Galilei-Transformationen*.

GALILEO GALILEI 1564 - 1642

D 9.8: Eine *Euklid*ische Transformation $\zeta\ \xi^{-1}$ heißt ***Galilei*-Transformation**, falls für alle C^2-Bahnen zu allen Zeiten $t \in T$ $e_t = o$ ist und sich somit die Beschleunigung objektiv transformiert:

$$b_\zeta(t) = Q_t(b_\xi(t)) \ .$$

S 9.9: Ein Beobachterwechsel ist genau dann *Galilei*-Transformation, falls für alle $t \in T$ gilt: $a_t^{\cdot}$ und Q_t sind zeitlich konstant.

B: Gemäß der Transformations-Formel ist die Beschleunigung beliebiger Bahnen genau dann objektiv, falls $e_t = o$ für alle $r_\zeta, v_\xi \in V$. Sei

$$\begin{array}{llll} r_\zeta - a_t = o\,, & v_\xi = o & \Rightarrow & a_t^{\cdot\cdot} = o \\ r_\zeta - a_t = o\,, & v_\xi \neq o & \Rightarrow & w_t = o \\ r_\zeta - a_t \neq o & & \Rightarrow & w_t^{\cdot} = o\,. \end{array}$$

Daraus folgt sofort die zeitliche Konstanz von $a_t^{\cdot}$ und Q_t.
Die Umkehrung des Satzes ist trivial. ⊠

Die *Euklid*ischen Transformationen bilden bezüglich der Hintereinanderschaltung eine Gruppe, die die *Galilei*-Transformationen als Untergruppe enthält.

Die *Galilei*-Transformationen induzieren auf der Menge der Beobachter eine Äquivalenz-Relation $\sim$: zwei Beobachter ζ und ξ heißen äquivalent, falls $\zeta\ \xi^{-1}$ eine *Galilei*-Transformation ist.

D 9.10: Die Äquivalenzklassen von Beobachtern bezüglich $\sim$ heißen ***Newton*sche Beobachtersysteme**.

ISAAC NEWTON 1643 - 1727

10. Bewegungen von Körpern

Empfohlene Literatur: WANG/ TRUESDELL, TROSTEL (1985 I)

Wir haben bisher einerseits diskrete Plazierungen von Körpern betrachtet und andererseits raum-zeitliche Bewegungen von Punkten (Bahnen). Im Konzept *Bewegungen von Körpern* wird nun beides miteinander vereinigt: einerseits ist jede Momentaufnahme eine Plazierung, andererseits beschreibt jeder materielle Punkt des Körpers eine Bahn im Raum-Zeit-Kontinuum.

D 10.1: Sei B Körper und T die Zeit. Eine **Bewegung des Körpers** ist eine Abbildung

$$\kappa : T \times B \to C\,,$$

so daß

1.) $\kappa_X := \kappa(\cdot, X) : T \to C$

für alle $X \in B$ eine *Bahn* ist, die bezüglich aller Beobachter zweimal stetig differenzierbar ist;

2.) $\kappa_t := \kappa(t, \cdot) : B \to E_t \subset C$

für alle $t \in T$ in der Plazierungsklasse K des Körpers ist.

Daß die Bewegungen auf dem unendlichen Zeitkontinuum definiert werden, soll uns hier nicht beunruhigen, da wir uns in Abschnitt 10.7 auf zeitlich endliche Bewegungen beschränken werden. Es bleiben alle Ausführungen sinngemäß richtig, wenn man für T ein endliches offenes Zeitintervall nimmt.

Man beachte, daß die Bewegung des Körpers - wie vorher schon die Bahn - beobachterunabhängig definiert wurde. Um Kinematik zu betreiben, schalten wir einer Bewegung eine Beobachterabbildung ξ nach und erhalten

$$\kappa_\xi := \xi\,\kappa : T \times B \to T \times E^3$$

mit der Identität im Zeitargument, oder für einen festen Zeitpunkt $t \in T$

$$\begin{aligned} \kappa_{\xi t} := \xi_t\,\kappa_t : B &\to E^3 \\ X &\mapsto x \end{aligned}$$

Da κ_t in der Plazierungsklasse des Körpers K ist, die abgeschlossen gegen orientierungstreue Isometrien ist, und ξ_t eine solche ist, gehört auch $\kappa_{\xi t}$ zur Plazierungsklasse.

κ_ξ ist also die **Bewegung des Körpers für den Beobachter** ξ. Damit können wir wie im Kapitel 8 Verzerrungsgeometrie im *Euklid*ischen Raum betreiben. Dabei hängen alle Deformationsgrößen i. allg. von der Zeit, der Bewegung und dem Beobachter ab. Wir werden die Beobachterabhängigkeit später untersuchen. Zunächst betrachten wir alle Größen bezüglich eines beliebigen, aber festgewählten Beobachters ξ.

Zunächst die *intrinsischen Größen*:
Das Differential der Bewegung κ für den Beobachter ξ ist das zeit- und ortsabhängige Tensorfeld der *Plazierungen der Körperelemente*, das in $X \in B$

$$K_\xi(t,X) := (\kappa_{\xi t})_*|_X : T_X B \to V$$

leistet. Die *Konfiguration der Körperelemente* in $X \in B$ ist

$$G_\xi(t,X) := K_\xi(t,X)^* \; K_\xi(t,X) \; : T_X B \to T_X{}^* B \, .$$

Die *Dichte* ist ein zeit- und ortsabhängiges positives Skalarfeld

$$\rho_\xi(t,X)$$

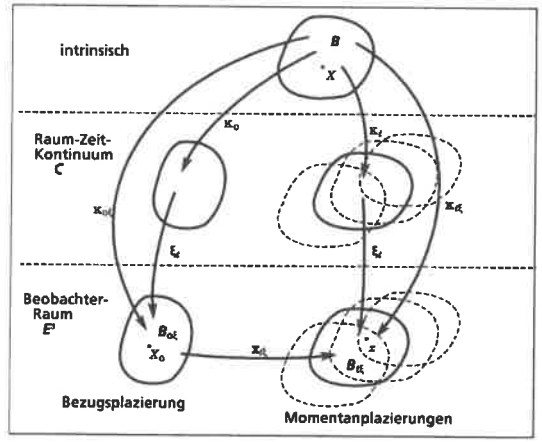
definiert in Analogie zu S. 71. Wir werden später zeigen, daß G_ξ und ρ_ξ nicht vom Beobachter abhängen, also *Euklid*isch invariant sind.

Nun zu den *bezogenen Größen*.
Wir wählen dazu eine feste, aber beliebige *Bezugsplazierung*, die grundsätzlich für den jeweiligen Beobachter raumfest sein soll. Dies kann man immer derart bewerkstelligen, daß man eine spezielle Plazierung $\kappa_{o\xi} \in K$ auszeichnet und als κ_o diejenige Bewegung definiert, für die

$$\begin{aligned} \kappa_{o\xi} = \xi_t \, \kappa_o : \; & B \to B_{o\xi} \\ & X \mapsto X_o \end{aligned}$$

ist mit dem Wertebereich $B_{o\xi} := \kappa_{o\xi}(B) \subset E^3$. Da ξ_t bijektiv ist, kann man auflösen nach

$$\kappa_o = \xi_t^{-1} \, \kappa_{o\xi} \, .$$



Es handelt sich für den Beobachter ξ also um eine ruhende Bewegung, d. h. das Bild von $X \in B$ unter $\kappa_{o\xi}$ ist ein konstanter Punkt des E^3.

Die momentane Verrückung ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\xi t} := \kappa_{\xi t} \, \kappa_{o\xi}^{-1} : \; & E^3 \supset B_{o\xi} \to B_{\xi t} \subset E^3 \\ & X_o \quad \mapsto \quad x \end{aligned}$$

oder, unter Benutzung der Zeit als unabhängiger Variable, zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\xi := \kappa_{\xi t} \, \kappa_{o\xi}^{-1} : \; & T \times B_{o\xi} \to T \times E^3 \\ & (t, X_o) \quad \mapsto \quad (t, x) \end{aligned}$$

mit der Identität im Zeitargument und dem (zeitabhängigen) Körpergebiet in der Momentanplazierung

$$B_{\xi t} := \kappa_\xi(t,B) \subset E^3 \, .$$

Das Differential der Verrückung ist für jeden Zeitpunkt $t \in T$ das tensorwertige Feld des *Deformationsgradienten*:

$$\mathbf{F}_\xi(t,X_o) := \mathbf{x}_\xi(t,\cdot)_*|_{X_o} = \mathit{Grad}\, \mathbf{x}_\xi(t,\cdot)|_{X_o} \in \mathit{Aut}(V) .$$

Die polare Zerlegung

$$\mathbf{F}_\xi(t,X_o) = \mathbf{R}_\xi(t,X_o)\, \mathbf{U}_\xi(t,X_o) = \mathbf{V}_\xi(t,X_o)\, \mathbf{R}_\xi(t,X_o)$$

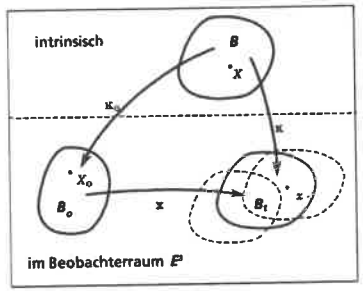
ergibt die zeit- und beobachterabhängigen Tensorfelder

$$\mathbf{R}_\xi(t,X_o) \in \mathit{Ort}^+(V)$$
$$\mathbf{U}_\xi(t,X_o) \in \mathit{Sym}^+(V,V)$$
$$\mathbf{V}_\xi(t,X_o) \in \mathit{Sym}^+(V,V)$$
$$\mathbf{C}_\xi(t,X_o) := \mathbf{U}_\xi^2(t,X_o) \in \mathit{Sym}^+(V,V)$$
$$\mathbf{B}_\xi(t,X_o) := \mathbf{V}_\xi^2(t,X_o) \in \mathit{Sym}^+(V,V) .$$

Die anderen Verzerrungstensoren werden sinngemäß definiert (s. S. 82).

10.1 Intrinsische, *Euler*sche und *Lagrange*sche Beschreibungsweise

Im folgenden Abschnitt betrachten wir *eine* Bewegung κ *eines* Körpers B für *einen* Beobachter ξ bezogen auf *eine* Bezugsplazierung κ_o. Wir unterdrücken deshalb den Beobachter-Suffix weitgehend.



Dann sind folgende Abbildungen für alle $t \in T$ bijektiv und differenzierbar:

$$\begin{aligned} \kappa_o : \quad & B \to B_o \subset E^3 \\ & X \mapsto X_o \\ \kappa_t : \quad & B \to B_t \subset E^3 \\ & X \mapsto z \\ \mathbf{x}_t := \kappa_t\, \kappa_o^{-1} : \quad & B_o \to B_t \subset E^3 \\ & X_o \mapsto z . \end{aligned}$$

Dabei können die Variablen z und X_o entweder durch ihre Koordinaten-Tripel oder nach Einführung eines Bezugspunktes im E^3 durch Ortsvektoren beschrieben werden.

Eine (möglicherweise zeit- und beobachterabhängige) Funktion, die auf

- B definiert ist, heißt:
  lokale Geschehensfunktion in intrinsischer Darstellung $\lambda_i(t,X)$;
- B_o definiert ist, heißt:
  lokale Geschehensfunktion in *Lagrange*scher Darstellung $\lambda_l(t,X_o)$;
- B_t definiert ist, heißt:
  lokale Geschehensfunktion in *Euler*scher Darstellung $\lambda_e(t,z)$.

Man kann aufgrund der Bijektivität von κ_o , κ_t und $\mathbf{x}_t$ die drei Darstellungen ineinander überführen:

$$\begin{aligned} \lambda_i[t,X] &= \lambda_l[t,\kappa_o^{-1}(X_o)] = \lambda_l(t,X_o) \\ &= \lambda_e[t,\kappa_t^{-1}(z)] = \lambda_e(t,z) \\ \lambda_e[t,z] &= \lambda_e[t,\mathbf{x}_t(X_o)] = \lambda_l(t,X_o) \\ &= \lambda_e[t,\kappa_t(X)] = \lambda_i(t,X) \\ \lambda_l[t,X_o] &= \lambda_l[t,\mathbf{x}_t^{-1}(z)] = \lambda_e(t,z) \\ &= \lambda_i[t,\kappa_o(X)] = \lambda_i(t,X) . \end{aligned}$$

Man beachte, daß κ_t und $\mathbf{x}_t$ zeitabhängig sind, während κ_o als grundsätzlich zeitunabhängig angenommen wurde. Dadurch können die Funktionen in der

intrinsischen und *Lagrange*schen Darstellung zeitabhängig bzw. zeitunabhängig sein, während sie möglicherweise in der *Euler*schen Darstellung umgekehrt zeitunabhängig bzw. zeitabhängig sind.

Als Beispiel betrachten wir die Geschwindigkeit einer Bewegung. Wir hatten bereits die Geschwindigkeiten von Bahnen in Abschnitt 9.4 erklärt. Da für jede Bewegung κ und jeden Körperpunkt $X \in B$ die Einschränkung

$$\kappa_X := \kappa(\cdot,X): T \to C$$

Bahn ist, könnnen wir deren Geschwindigkeit (bez. des Beobachters ξ) $v_X: T \to V$ zu einem Vektorfeld in intrinsischer Darstellung erweitern

$$v_i : T \times B \to V$$

mit

$$v_i(t,X) := v_X(t) = \kappa^{\cdot}(t,X) \ .$$

Die *Lagrange*sche Darstellung ist

$$v_i(t,X_0) = v_i[t,\kappa_0^{-1}(X_0)] = \kappa^{\cdot}[t,\kappa_0^{-1}(X_0)] = \kappa^{\cdot}(t,X_0)$$

und die *Euler*sche Darstellung

$$v_e(t,x) = v_i[t,\kappa_t^{-1}(x)] \ ,$$

die unabhängig von der Wahl der Bezugsplazierung ist (wie schon v_i selbst). Wie bereits gezeigt, ist die Geschwindigkeit beobachterabhängig, in welcher Darstellung auch immer sie vorliegt.

Von v_e können wir bei festgehaltener Zeit den lokalen Gradienten bilden und erhalten den **Geschwindigkeitsgradienten**

$$L_e(t,x) := grad\, v_e(t,\cdot)|_x \in Lin(V,V) \ .$$

Auch er ist beobachterabhängig. Eine Bezugsplazierung geht in seine Definition allerdings nicht ein.

Man zerlegt L_e additiv (***Cauchy-Stokesscher Zerlegungssatz***)

$$L_e(t,x) = D_e(t,x) + \Omega_e(t,x)$$

in seinen symmetrischen Anteil

$$D_e(t,x) := \tfrac{1}{2}[L_e(t,x) + L_e^*(t,x)] \in Sym(V,V) \ ,$$

den **Verzerrungsgeschwindigkeitstensor**, und seinen antimetrischen Anteil

$$\Omega_e(t,x) := \tfrac{1}{2}[L_e(t,x) - L_e^*(t,x)] \in Skw(V,V) \ ,$$

den **Wirbeltensor**. Sein axialer Vektor ist der **Wirbelvektor**

$$\omega_e(t,x) := \tfrac{1}{2}\, axi\, [L_e(t,x)] = -\tfrac{1}{2}\, rot\, v_e(t,x) \in V.$$

Als **Beispiel** setzen wir die *einfache Scherung* von Abschnitt 8.6 fort. Faßt man darin K als differenzierbare Zeitfunktion auf, so handelt es sich um eine *Bewegung des Körpers*. Die Geschwindigkeit ergibt sich als

$$v_i(t,\phi^2) = K^{\cdot}\, \phi^2\, e_1 = v_e(t,\psi^2) = K^{\cdot}\, \psi^2\, e_1$$

und deren räumlicher Gradient zu

$$L(t) := grad\, v_e = K^{\cdot}\, e_1 \otimes e_2 \ ,$$

also räumlich konstant. Dessen symmetrischer Teil ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$D(t) = \tfrac{1}{2} K^{\cdot} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$$

mit den Hauptverzerrungs-Geschwindigkeits-Achsen

$$v_1 = 1/\sqrt{2}\ (e_1 + e_2)$$

$$v_2 = 1/\sqrt{2}\ (e_2 - e_1)$$

$$v_3 = e_3 \ ,$$

die die Richtungen derjenigen Linienelemente anzeigen, die momentan am schnellsten gedehnt (v_1) bzw. gestaucht (v_2) werden (s. Zeichnung S.93).

Der antimetrische Teil von L entspricht dem Wirbeltensor

$$\Omega(t) = \tfrac{1}{2} K^{\cdot} (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$$

und dem Wirbelvektor

$$\omega(t) := \tfrac{1}{2}\, axi\, L(t) = -\tfrac{1}{2}\, rot\, v = -\tfrac{1}{2} K^{\cdot}\, e_3 \ ,$$

der die momentane mittlere Winkelgeschwindigkeit der Linienelemente angibt.

10.2 Transportgleichung in lokaler Form

Wir nehmen an, daß eine Geschehensfunktion in *Lagrange*scher Darstellung $\lambda_l(t,X_0)$ in beiden Argumenten einmal partiell differenzierbar ist:

$$\lambda_l^{\cdot}(t,X_0) = \partial\lambda_l(t,X_0)/\partial t := \lambda_l(\cdot,X_0)_{\bullet}|_t$$
$$Grad\,\lambda_l(t,X_0) = \partial\lambda_l(t,X_0)/\partial X_0 := \lambda_l(t,\cdot)_{\bullet}|_{X_0} = \lambda_l(t,X_0)\otimes\nabla_l\,.$$

Dieselbe Geschehensfunktion hat dann in der *Euler*schen Darstellung nach der Kettenregel die Zeitableitung

$$\lambda_e^{\cdot}(t,x) := \partial\lambda_e(t,x)/\partial t + \partial\lambda_e(t,x)/\partial x\;\;\partial\mathbf{x}(t,X_0)/\partial t$$
$$= \partial\lambda_e(t,x)/\partial t + grad\,\lambda_e(t,x)\;\mathbf{v}_l(t,X_0)$$
$$\Rightarrow$$
$$\boxed{\lambda_e^{\cdot}(t,x) = \partial\lambda_e(t,x)/\partial t + grad\,\lambda_e(t,x)\;\mathbf{v}_e(t,x)}$$

Welche algebraische Verknüpfung zwischen dem Gradienten und $\mathbf{v}_e(t,x)$ angewendet werden muß, hängt von der Wertigkeit von λ ab. Man nennt

$\lambda_e^{\cdot}(t,x)$	**substantielle Änderung**
$\partial\lambda_e(t,x)/\partial t$	**lokale Änderung**
$grad\,\lambda_e(t,x)\;\mathbf{v}_e(t,x)$	**konvektive Änderung .**

OSBORNE REYNOLDS 1842 - 1912

Dies ist die ***Reynolds*sche Transporgleichung in der lokalen Form**, wonach die zeitliche Änderung einer lokalen Geschehensfunktion in der *Euler*schen Darstellung, die *substantielle Änderung*, sich zusammensetzt aus der *lokalen Änderung* und der Änderung infolge Zufuhr von Teilchen, der *konvektiven Änderung* (lat. *convehi* : bewegen, befördern). Verschwindet die lokale Änderung, so heißt λ_e **stationär.**

Im Vorangegangenen ist durch die Klein- und Großschreibung des Gradienten unterschieden worden, ob die *Euler*sche oder die *Lagrange*sche Darstellung nach der Ortsvariablen differenziert wurde. Bei den Nablas haben wir durch die Suffizes die beiden Zusammenhänge unterschieden. Die Transformation wird durch die Kettenregel determiniert:

$$Grad\,\lambda_l(t,X_0) = \partial\lambda_l(t,X_0)/\partial X_0 = \lambda_l(t,X_0)\otimes\nabla_l$$
$$= \partial\lambda_e(t,x)/\partial x\;\;\partial\mathbf{x}_t(X_0)/\partial X_0 = [\lambda_e(t,x)\otimes\nabla_e]\,\mathbf{F} = grad\,\lambda_e(t,x)\;\mathbf{F}\,.$$

Welche algebraische Verknüpfung zwischen dem Gradienten und $\mathbf{F}$ angewendet werden muß, hängt wiederum von der Wertigkeit von λ ab. Für eine vektorwertige Funktion handelt es sich beispielsweise um die Hintereinanderschaltung von Tensoren.

Umgekehrt erhält man

$$grad\,\lambda_e(t,x) = \partial\lambda_e(t,x)/\partial x = \lambda_e(t,x)\otimes\nabla_e$$
$$= \partial\lambda_l(t,X_0)/\partial X_0\;\;\partial\mathbf{x}_t^{-1}(x)/\partial x = [\lambda_l(t,X_0)\otimes\nabla_l]\,\mathbf{F}^{-1} = Grad\,\lambda_l(t,X_0)\;\mathbf{F}^{-1}\,,$$

das heißt formal

$$\nabla_l = \mathbf{F}^{*}\,(\nabla_e)$$
$$\nabla_e = \mathbf{F}^{*-1}\,(\nabla_l)\,.$$

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele für Geschehensfunktionen (s. TROSTEL, 1985 I).

Beispiel 1.
Sei die Geschehensfunktion die Bewegung bez. des Beobachters selbst:

$$\lambda_l(t,X) = \mathbf{x}_t(t,X)$$
$$\Rightarrow\quad \lambda_l(t,X_0) = \mathbf{x}_t[t,\mathbf{x}_0^{-1}(X_0)] = \mathbf{x}(t,X_0)$$
$$\Rightarrow\quad \lambda_e(t,x) = \mathbf{x}_t[t,\mathbf{x}_t^{-1}(x)] = x\,.$$

Die *Euler*sche Darstellung der Bewegung ist also zeitunabhängig die Identität im zweiten Argument. Für die substantielle Änderung der Bewegung erhalten wir die Geschwindigkeit

$$\lambda_l^{\cdot}(t,X_0) = \mathbf{v}_l(t,X_0)$$
$$\lambda_e^{\cdot}(t,x) = \partial x/\partial t + grad(x)\;\mathbf{v}_e(t,x) = 0 + \mathbf{1}[\mathbf{v}_e(t,x)] = \mathbf{v}_e(t,x)\,.$$

Beispiel 2.
Sei die Geschehensfunktion das Geschwindigkeitsfeld:

$$\lambda_l(t,X) = v_l(t,X)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_e(t,x) = v_e(t,x)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_l(t,X_o) = v_l(t,X_o)\ .$$

Im folgenden sind die Orts- und Zeitargumente unterdrückt.

$$L := \mathit{grad}\, v_e = \mathit{Grad}\, v_l\ F^{-1}$$
$$= \mathit{Grad}\,(x_l^{\cdot})\ F^{-1} = (\mathit{Grad}\, x_l)^{\cdot}\ F^{-1} = F^{\cdot}\ F^{-1}$$

und mit

$$F = K\ K_o^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad F^{\cdot} = K^{\cdot}\ K_o^{-1}$$

ist

$$L = K^{\cdot}\ K_o^{-1}\ K_o\ K^{-1} = K^{\cdot}\ K^{-1}\ .$$

Es war

$$G := K^{*}\ K$$
$$\Rightarrow \quad G^{\cdot} = K^{*\cdot}\ K + K^{*}\ K^{\cdot}\ .$$

$G^{\cdot}$ heißt **intrinsische Verzerrungsgeschwindigkeit**. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} D &= \tfrac{1}{2}(L + L^{*}) \\ &= \tfrac{1}{2}(K^{\cdot}\ K^{-1} + K^{-1*}\ K^{*\cdot}) \\ &= \tfrac{1}{2}K^{-1*}\ (K^{*}\ K^{\cdot} + K^{*\cdot}\ K)\ K^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}K^{-1*}\ G^{\cdot}\ K^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}(F^{\cdot}\ F^{-1} + F^{-1*}\ F^{*\cdot}) \\ &= \tfrac{1}{2}F^{-1*}\ (F^{*}\ F^{\cdot} + F^{*\cdot}\ F)\ F^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}F^{-1*}\ (F^{*}\ F)^{\cdot}\ F^{-1} \\ &= \tfrac{1}{2}F^{-1*}\ C^{\cdot}\ F^{-1}\ . \end{aligned}$$

Es ist klar, daß alle diese Tensorfelder intrinsisch, auf *Euler*sche oder *Lagrange*sche Weise dargestellt werden können.

Beispiel 3.
Sei die Geschehensfunktion die Massendichte in der Momentanplazierung.

$$\lambda_l(t,X) = \rho_l(t,X)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_e(t,x) = \rho_e(t,x)$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_l(t,X_o) = \rho_l(t,X_o)\ .$$

Analog existieren die drei Darstellungen für die Dichte ρ_o in der Bezugsplazierung, die nur in der *Euler*schen Darstellung zeitabhängig sein kann.

Wir hatten bereits auf S.78 gesehen, wie sich die Dichte zwischen Momentan- und Bezugsplazierung transformiert. Mit der Rechenregel für das Differential der Determinante eines zeitabhängigen Tensors

$$d(\det F(t)) = \det F\ \ sp(F^{-1}\ F^{\cdot})\ dt$$

ist dann die substantielle Änderung

$$(\rho_o / \rho)^{\cdot} = -(\rho_o\ \rho^{\cdot}) / \rho^2 = -(\rho^{\cdot} / \rho)\ \det F$$
$$= (\det F)^{\cdot} = \det F\ sp(F^{-1}\ F^{\cdot}) = \det F\ sp\, L\ .$$

Nun ist aber

$$sp\, L = sp\, D = div\, v_e\ ,$$

womit die **lokale Massenbilanz** in der *Euler*schen Darstellung gilt

$$\boxed{\rho^{\cdot} + \rho\ div\, v_e = 0\ .} \qquad \text{(LMB)}$$

Andererseits gilt nach der Transportgleichung

$$\rho^{\cdot} = \partial \rho_e / \partial t + \langle grad\ \rho_e, v_e \rangle$$

und damit

$$\partial \rho_e / \partial t + \langle grad\ \rho_e, v_e \rangle + \rho_e\ div\, v_e = 0$$
$$\Rightarrow \quad \partial \rho_e / \partial t + div\,(\rho_e v_e) = 0\ .$$

10.3 Transportgleichung in integraler Form

Sei B Körper und dB dessen Oberfläche. Seien B_t bzw. dB_t die entsprechenden Mengen in der Momentanplazierung und B_o bzw. dB_o diejenigen in der

Bezugsplazierung. Sei außerdem λ eine lokale Geschehensfunktion, die in B und damit auch in B_t und B_o bezüglich des Massenelementes integrierbar sei. Dann heißt das Integral

$$\Lambda := \int_{B_t} \lambda_e \, dm_e$$

globale Geschehensfunktion. Dabei wollen wir im weiteren grundsätzlich davon ausgehen, daß für Teilkörper $\underline{B}$ die entsprechende globale Geschehensfunktion

$$\underline{\Lambda} := \int_{\underline{B}_t} \lambda_e \, dm_e$$

ist.

Umgekehrt ist der Übergang von einer globalen Geschehensfunktion zu einer lokalen nach dem Satz von *Radon-Nikodym* der Maßtheorie (s., e. g., TOLSTOW S.271 ff) nur dann möglich, wenn Λ σ-additiv und absolutstetig bezüglich des Massenelements ist. Die (massen-) spezifische lokale Geschehensfunktion λ ist dann lediglich *fast überall* eindeutig, d.h. bis auf Mengen, die masselos sind, wie auf singulären Punkten oder Flächen.

Damit wollen wir einer Eigenschaft einer Geschehensfunktion das Prädikat **überall** verleihen, falls
a) bei lokalen Geschehensfunktionen die Eigenschaft *fast überall* im Körpergebiet gilt, oder
b) bei globalen Geschehensfunktionen die Eigenschaft für den Körper und *alle seine Teilkörper* gilt.

Mit der Konstanz des Massenelements in Momentan- und Bezugsplazierung (unabhängig von der gewählten Darstellung)

$$dm = \rho dV = dm_o = \rho_o dV_o$$

folgt für σ-additive und absolutstetige globale Geschehensfunktionen

$$\Lambda = \int_{B_o} \lambda_1 dm_1 = \int_{B_o} \lambda_1 dm_{o1} = \int_{B_o} \lambda_1 \rho_{o1} dV_{o1} .$$

Damit haben wir das Integral in die zeitunabhängige Bezugsplazierung transformiert, wodurch sich sein Wert nicht ändert. Das hat den Vorteil, daß wir bei Zeitableitungen unter dem Integralzeichen differenzieren können:

$$\begin{aligned}\Lambda^{\cdot} &= d/dt \, (\int_{B_o} \lambda_1 \, dm_{o1}) = \int_{B_o} \lambda_1^{\cdot} \, dm_{o1} \\ &= \int_{B_t} \lambda_e^{\cdot} \, dm_e = \int_{B_t} [\, \partial \lambda_e / \partial t + grad \, \lambda_e \, v_e \,] \, dm_e \\ &= \int_{B_t} [\, \partial (\lambda_e \rho_e) / \partial t - \lambda_e \, \partial \rho_e / \partial t + (\lambda_e \otimes \nabla_e v_e \rho_e) - div(v_e \, \rho_e) \, \lambda_e \,] \, dV_e .\end{aligned}$$

Hierauf wenden wir den *Gauß*schen Satz (S 5.2) an und erhalten nach Einsetzen der lokalen Massenbilanz (s. LMB S.117) mit dem äußeren Flächenelement do_e in der Momentanplazierung die ***Reynolds*sche Transportgleichung in der integralen Form**

$$\boxed{\Lambda^{\cdot} = \int_{B_t} \partial (\lambda_e \rho_e) / \partial t \; dV_e + \int_{\partial B_t} \rho_e \lambda_e \langle v_e, do_e \rangle}$$

wonach sich die Änderung der globalen Geschehensfunktion aus einem instationären Produktionsterm und dem Transport durch die Oberfläche nährt. Darin ist $\rho_e \lambda_e$ die volumenspezifische Form der lokalen Geschehensfunktion.

Wir hatten am Anfang dieses Abschnitts das Integrationsgebiet in der *Euler*schen Darstellung als das momentan vom Körper eingenommene Raumgebiet erklärt. Da an keiner Stelle benutzt wurde, daß dies auch für andere als den betrachteten Zeitpunkt gelten soll, läßt sich das Gebiet auch als räumlich festes oder beliebig bewegtes räumliches Kontrollgebiet erklären.

Wir wollen die Transportgleichung wieder auf einige Bespiele anwenden.

Beispiel 1. Sei

$$\lambda_e = 1 ,$$

so ist

$$m_B = \Lambda = \int_{B_o} (1) \, dm_{o1}$$

die *Masse* vom Körper B, und

$$m^{\cdot}(B) = 0 = \Lambda^{\cdot} = \int_{B_o} (1)^{\cdot} \, dm_{o1} = \int_{B_t} \partial \rho_e / \partial t \; dV_e + \int_{\partial B_t} \rho_e \langle v_e, do_e \rangle$$

die integrale Form der Massenbilanz mit dem flächenspezifischen Massenstrom durch die Oberfläche:

$$\rho_e \langle v_e, do_e / \| do_e \| \rangle .$$

Beispiel 2. Sei

$$\lambda_e = v_{e\xi} .$$

D 10.2: Sei $v_{e\xi}(t, x)$ das Geschwindigkeitsfeld eines Körpers B während einer Bewegung x bez. des Beobachters ξ zur Zeit t. Dann heißt der Vektor

$$k_\xi(t) := \int_{B_t} v_{e\xi}(t, x) \, dm_e \in V$$

Impuls.

Er ist beobachterabhängig wie schon das Geschwindigkeitsfeld. Für die zeitliche Ableitung des Impulses gilt

$$\mathbf{i}_\xi^{\cdot} = \int_{B_o} \mathbf{v}_{i\xi}^{\cdot}\, dm_{o_i} = \int_{B_o} \mathbf{b}_{i\xi}\, dm_{o_i}$$
$$= \int_{B_t} \mathbf{b}_{e\xi}\, dm_e = \int_{B_t} \partial(\mathbf{v}_e \rho_e)/\partial t\, dV_e + \int_{\partial B_t} \rho_e \mathbf{v}_e <\mathbf{v}_e, \mathbf{do}_e> .$$

Beispiel 3.
Sei $\mathbf{r}_{e\xi}(x)$ der Orsvektor von $x \in B_t$ bez. eines BZPs $o \in E^3$, der raumfest bez. des Beobachters sei. Mit

$$\boldsymbol{\lambda}_e = \mathbf{r}_{e\xi} \times \mathbf{v}_{e\xi}$$

erhalten wir:

D 10.3: Sei $\mathbf{v}_{e\xi}(t,x)$ das Geschwindigkeitsfeld eines Körpers B während einer Bewegung κ bez. des Beobachters ξ zur Zeit t und $o \in E^3$. Dann heißt der Vektor

$$\mathbf{d}_{o\xi}(t) := \int_{B_t} \mathbf{r}_{e\xi}(x) \times \mathbf{v}_{e\xi}(t,x)\, dm_e \in V$$

Drall (oder Drehimpuls) bez. o .

Der Drall ist ebenfalls beobachterabhängig. Die zeitliche Änderung des Dralls ist:

$$\mathbf{d}_{o\xi}^{\cdot} = \int_{B_o} (\mathbf{v}_{i\xi} \times \mathbf{v}_{i\xi} + \mathbf{r}_{i\xi} \times \mathbf{v}_{i\xi}^{\cdot})\, dm_{o_i} = \int_{B_o} \mathbf{r}_{i\xi} \times \mathbf{b}_{i\xi}\, dm_{o_i}$$
$$= \int_{B_t} \mathbf{r}_{e\xi} \times \mathbf{b}_{e\xi}\, dm_e = \int_{B_t} \partial(\mathbf{r}_{e\xi} \times \mathbf{v}_e \rho_e)/\partial t\, dV_e + \int_{\partial B_t} \rho_e \mathbf{r}_{e\xi} \times \mathbf{v}_e <\mathbf{v}_e, \mathbf{do}_e> .$$

10.4 Starrkörperbewegungen

sind ein wichtiger und interessanter Spezialfall allgemeiner Bewegungen, der dadurch gekennzeichnet ist, daß zwei beliebige Körperpunkte einen zeitlich konstanten Abstand haben. Oder: Starrkörperbewegungen können zu zeitabhängigen Isometrien auf ganz E^3 fortgesetzt werden. Dies soll präzisiert werden:

Sei κ_ξ eine Bewegung bez. eines Beobachters ξ und $\kappa_{t_1}\kappa_{t_2}^{-1}$ für alle $t_1, t_2 \in T$ zu einer Isometrie auf E^3 fortsetzbar, so ist diese Eigenschaft sicherlich beobachterunabhängig. Wir wählen für ein beliebiges, festgewähltes $t_o \in T$

$$\kappa_o := \kappa(t_o, \cdot)$$

als Bezugsplazierung. Dann ist die Verrückung

$$\mathbf{x}_{t\xi} := \kappa_{t\xi}\, \kappa_{o\xi}^{-1} = \xi_t\, \kappa_t\, \kappa_o^{-1}\, \xi_t^{-1}$$

ebenfalls für alle Zeiten zu einer Isometrie auf E^3 fortsetzbar.

Nach Satz S 3.4 gilt, daß $\mathbf{x}_{t\xi}$ eine orthogonale Abbildung $\mathbf{R}_{t\xi} \in Ort(V)$ determiniert, die für zwei beliebige Punkte $X_o, Y_o \in B_o$ folgendes leistet:

$$\vdash \mathbf{x}_{t\xi}(X_o), \mathbf{x}_{t\xi}(Y_o) \dashv = \mathbf{R}_{t\xi}(\vdash X_o, Y_o \dashv) .$$

Als praktisch erweist sich die Benutzung von Ortsvektoren. Ist $o \in E^3$ ein bezüglich ξ raumfester Bezugspunkt und

$$\mathbf{r}_o(X_o) := \vdash o, X_o \dashv$$

und

$$\mathbf{r}(t, X_o) := \vdash o, \mathbf{x}_{t\xi}(X_o) \dashv ,$$

so gilt

$$\mathbf{r}(t, Y_o) - \mathbf{r}(t, X_o) = \vdash \mathbf{x}_{t\xi}(X_o), \mathbf{x}_{t\xi}(Y_o) \dashv = \mathbf{R}_{t\xi}[\mathbf{r}_o(Y_o) - \mathbf{r}_o(X_o)] .$$

$\mathbf{R}_{t\xi}$ entspricht dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}_\xi(t, X_o)$ (nach S 3.4 und S 5.1), der für Starrkörperbewegungen also mit seinem orthogonalen Anteil (nach der polaren Zerlegung) zusammenfällt, während die Streckungstensoren alle Einstensoren sind.

Zur Ermittlung der Geschwindigkeit von Y_o bilden wir die Zeitableitung

$$\mathbf{r}^{\cdot}(t, Y_o) = \mathbf{R}_{t\xi}^{\cdot}[\mathbf{r}_o(Y_o) - \mathbf{r}_o(X_o)] + \mathbf{r}^{\cdot}(t, X_o)$$
$$= \mathbf{v}(t, Y_o) = \mathbf{R}_{t\xi}^{\cdot}\, \mathbf{R}_{t\xi}^{*}[\mathbf{r}(t, Y_o) - \mathbf{r}(t, X_o)] + \mathbf{v}(t, X_o) .$$

Die Verknüpfung $\mathbf{R}_{t\xi}^{\cdot}\, \mathbf{R}_{t\xi}^{*}$ ist antimetrisch, so daß

$$\boxed{\mathbf{v}(t, Y_o) = \boldsymbol{\omega}_{t\xi} \times [\mathbf{r}(t, Y_o) - \mathbf{r}(t, X_o)] + \mathbf{v}(t, X_o)} \quad \text{(EGF)}$$

mit

$$\omega_{R} := \tfrac{1}{2}\, axi\,[\mathbf{R}_{R}{}^{\cdot}\,\mathbf{R}_{R}{}^{*}]$$

ist. Dies ist die ***Euler*sche Geschwindigkeitsformel** für Starrkörperbewegungen. Danach ist das Geschwindigkeitsfeld einer solchen zu jedem Zeitpunkt durch die Geschwindigkeit eines beliebigen Referenzpunktes X_o zuzüglich einer Winkelgeschwindigkeit um X_o darstellbar. Da $\mathbf{R}_{R}$ von der Wahl der Punkte X_o und Y_o unabhängig ist, ist ω_{R} für jede Starrkörperbewegung und jeden Beobachter auch nur eine reine Zeitfunktion.

LEONHARD EULER 1707 - 1783

Wählen wir nämlich ein $X_o{}' \in B_o$, so erhalten wir durch zweimalige Anwendung der Formel

$$\begin{aligned} v(t,Y_o) &= \omega_{R} \times [r(t,Y_o) - r(t,X_o)] + v(t,X_o) \\ v(t,X_o{}') &= \omega_{R} \times [r(t,X_o{}') - r(t,X_o)] + v(t,X_o) \ . \end{aligned}$$

Wird die zweite Gleichung nach $v(t,X_o)$ aufgelöst und in die erste eingesetzt, so verbleibt

$$v(t,Y_o) = \omega_{R} \times [r(t,Y_o) - r(t,X_o{}')] + v(t,X_o{}') \ .$$

Das gesamte Geschwindigkeitsfeld wird also determiniert durch das zeitabhängige Vektor-Paar $\{v(t,X_o), \omega_{R}\}$, wobei lediglich der erste Vektor vom Referenzpunkt abhängt. Auf der Menge dieser Paare kann man eine Äquivalenzrelation einführen:

$$\{v(t,X_o), \omega_{R}\} \sim \{v'(t,X_o{}'), \omega_{R}{}'\} \ :$$
$$\omega_{R} \times [r(t,Y_o) - r(t,X_o)] + v(t,X_o) = \omega_{R}{}' \times [r(t,Y_o) - r(t,X_o{}')] + v'(t,X_o{}') \quad \forall\, Y_o \in B_o \ ,$$

was offenbar äquivalent ist zu den beiden Vektorgleichungen

$$\omega_{R}{}' = \omega_{R}$$
$$v'(t,X_o{}') = \omega_{R} \times [r(t,X_o{}') - r(t,X_o)] + v(t,X_o)$$

Die Äquivalenzklassen bez. $\sim$ heißen *Motoren*. VON MISES hat die Eigenschaften dieser Objekte studiert (s.a. POVSTENKO, HEINZ), die zu einer eleganten

Formulierung der Starrkörperdynamik führen. Wir wollen jedoch hier diesen Formalismus nicht einführen, da von ihm keine prinzipiell neuen Ergebnisse zu erwarten sind.

Die Motoren sind natürlich beobachterabhängig. Die *Euklid*ischen Transformationen von $\mathbf{v}$ werden in Abschnitt 9.6 gezeigt, die von ω in 10.6.

Der Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L} := \mathit{grad}\, \mathbf{v}_e = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_{R}{}^{\cdot}\,\mathbf{R}_{R}{}^{*}$$

ist bei Starrkörperbewegungen insgesamt antimetrisch, womit sein Verzerrungsgeschwindigkeitsanteil $\mathbf{D}$ grundsätzlich Null ist. Außerdem ist die Spur von $\mathbf{L}$ Null, da die Starrkörperbewegungen generell isochor sind. Der Wirbelvektor fällt mit der Winkelgeschwindigkeit zusammen, ist also hier räumlich konstant.

Die höheren k-fachen Gradienten

$$\mathbf{v}_e(t,\cdot) \otimes \nabla_e{}^{k}$$

sind Nullfelder für $k \geq 2$.

10.5 Starrkörpermodifikationen

einer Bewegung κ_{1t} erhält man, wenn man ihr eine orientierungstreue zeitlich zweimal differenzierbare Isometrie α_t des E^3 nachschaltet. Das Resultat

$$\kappa_{2t} := \alpha_t\ \kappa_{1t}$$

ist wieder eine Bewegung desselben Körpers. Dessen Differential ist nach § 5.1

$$\mathbf{K}_2 := \kappa_{2t*} = \alpha_{t*}\ \kappa_{1t*} = \mathbf{R}\ \mathbf{K}_1$$

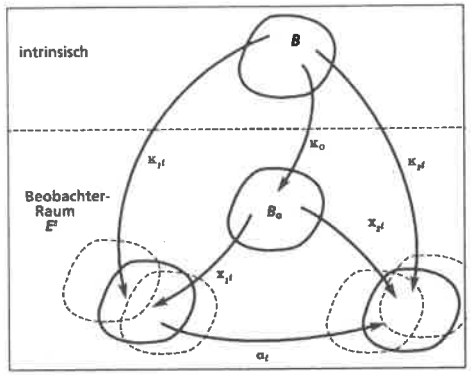
mit

$$\mathbf{R} := \alpha_{t*} \qquad \in \mathit{Ort}^{+}(V) \ .$$

Betrachten wir einen Punkt $X \in B$ und einen Zeitpunkt $t \in T$, so gilt nach § 7.6:

$$\mathbf{G}_{1X} = \mathbf{G}_{2X} \ ,$$

da die Konfiguration des materiellen Elementes invariant gegen Starrkörpermodifikationen ist, ebenso wie die Massendichte, und natürlich auch alle Zeitableitungen der Konfigurationen $\mathbf{G}_{1X}{}^{\cdot}$, $\mathbf{G}_{1X}{}^{\cdot\cdot}$, ...



Wir betrachten nun für einen festen Zeitpunkt und einen Beobachter die Momentanplazierungen und eine Bezugsplazierung κ_0. Dann ergeben sich die beiden Verrückungen zu

$$\chi_{1t} := \kappa_{1t}\,\kappa_0^{-1}$$

$$\chi_{2t} := \kappa_{2t}\,\kappa_0^{-1} = \alpha_t\,\kappa_{1t}\,\kappa_0^{-1} = \alpha_t\,\chi_{1t}$$

und deren Gradienten zu

$$F_1 := Grad\,\chi_{1t}$$

und

$$F_2 := Grad\,\chi_{2t} = Grad\,\alpha_t\;Grad\,\chi_{1t} = R\,F_1 .$$

Die polaren Zerlegungen liefern

$$F_1 = V_1\,R_1 = R_1\,U_1$$

$$F_2 = V_2\,R_2 = R_2\,U_2 = R\;R_1\,U_1 = R\,V_1\,R_1 ,$$

womit

$$R_2 = R\;R_1$$

$$U_2 = U_1$$

$$V_2 = R\;V_1\;R^*$$

geschlossen werden. Bildet man die höheren Gradienten

$$F_{1i} \otimes \nabla_1^k$$

für $k \geq 2$, $i = 1,2$, so folgt wegen der räumlichen Konstanz von R

$$F_{1i} \otimes \nabla_1^k = R\,(F_i \otimes \nabla_1^k) .$$

Für die Geschwindigkeitsgrößen erhält man dann

$$L_2 = F_2^{\cdot}\,F_2^{-1} = R\;L_1\,R^* + R^{\cdot}\,R^*$$

$$D_2 = R\;D_1\,R^*$$

$$\Omega_2 = R\;\Omega_1\,R^* + R^{\cdot}\,R^*$$

$$\omega_2 = R\,(\omega_1) + \omega$$

mit

$$\omega := \tfrac{1}{2}\,axi\,(R^{\cdot}\,R^*) .$$

Diese Transformationen ähneln formal denjenigen unter Beobachterwechsel des folgenden Abschnitts, obwohl es sich aber physikalisch um zwei wohlunterscheidbare Phänomene handelt.

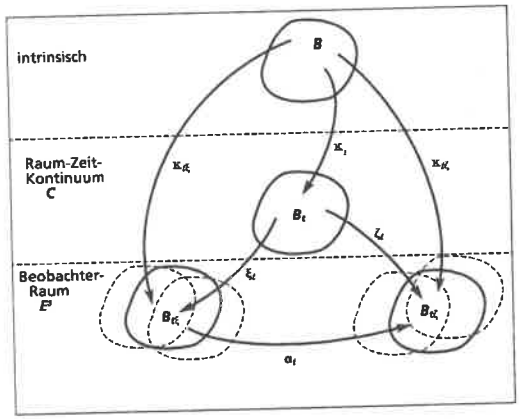
10.6 Bewegungen für verschiedene Beobachter

Da die meisten Geschehensfunktionen dieses Kapitels mithilfe eines Beobachters eingeführt wurden, bleibt die Aufgabe, ihr Transformationsverhalten gegenüber Beobachterwechseln zu untersuchen.

Erinnern wir uns: zwei Beobachter ξ und ζ ergeben zu jedem Zeitpunkt den Beobachterwechsel

$$\alpha_t := \zeta_t\,\xi_t^{-1} : E^3 \to E^3 ,$$

eine orientierungstreue Isometrie des Beobachterraumes. Diese induziert die zeit-, aber nicht ortsabhängigen Größen $a_t \in V$, $Q_t \in Ort^+(V)$ und $w_t := \tfrac{1}{2}\,axi\,(Q_t^{\cdot}Q_t^*)$, so daß für die Transformationen von Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung die Beziehungen des Abschnitts 9.6 gelten.



Man nennt eine Geschehensfunktion ***Euklid*isch-invariant**, falls sie für beliebige *Euklid*ische Transformationen zu denselben Zeiten dieselben Werte hat. Handelt es sich um eine skalarwertige invariante Geschehensfunktion, so wird sie auch **objektiv** genannt.

Handelt es sich dagegen um eine vektor- oder tensorwertige Geschehensfunktion

$$u \in V$$

bzw.

$$T \in Lin(V,V) \quad ,$$

so heißt sie **objektiv**, falls

$$u_\zeta(t) = Q_t(u_\xi(t)) \qquad \forall\, t \in T$$

bzw.

$$T_\zeta(t) = Q_t \; T_\xi(t) \; Q_t^{\,+} \qquad \forall\, t \in T$$

ist. Stellt man T bezüglich einer Standardbasis $\{e_{\xi i}\}$ dar

$$T_\xi = t_\xi^{ik} \; e_{\xi i} \otimes e_{\xi k} \; ,$$

so bedeutet die Objektivität, daß

$$T_\zeta = t_\xi^{ik} \; Q_t(e_{\xi i}) \otimes Q_t(e_{\xi k}) \; .$$

d.h. wenn die Basisvektoren mit Q_t gedreht werden, bleiben die skalaren Komponenten invariant.

Wir wollen mit dieser Eigenschaft die Objektivität von Tensoren höherer Stufe definieren. Ist T_ξ ein Tensor p-ter Stufe mit der Darstellung

$$T_\xi = t_\xi^{ik\ldots n} \; e_{\xi i} \otimes e_{\xi k} \otimes \ldots \otimes e_{\xi n} \; ,$$

so ist die objektive Transformation diejenige, die die Basis dreht und die Komponenten invariant läßt:

$$T_\zeta = t_\xi^{ik\ldots n} \; Q_t(e_{\xi i}) \otimes Q_t(e_{\xi k}) \otimes \ldots \otimes Q_t(e_{\xi n}) \; .$$

Sind T und S zwei objektive Tensoren beliebiger, aber gleicher Stufe, so gilt für das innere Produkt zwischen ihnen die *Euklid*ische Invarianz:

$$<T_\zeta, S_\zeta> \; = \; <T_\xi, S_\xi> \; .$$

Man kann auch umgekehrt schließen: gilt diese Gleichung für alle Beobachter und alle objektiven Tensoren T, die nicht von S abhängen, so muß auch S objektiv sein.

Diese Definitionen lassen sich auch sofort sinngemäß auf *Felder* der entsprechenden Wertigkeiten verallgemeinern.

Untersuchen wir nun die Deformationsgrößen auf ihr Transformationsverhalten bei Beobachterwechsel. Die Bewegung wird von zwei Beobachtern ξ und ζ bis auf eine Isometrie α_t gleich gesehen:

$$\kappa_{\zeta t} := \alpha_t \; \kappa_{\xi t} \; .$$

Deren Differential ist

$$K_\xi := \kappa_{\xi t*}$$

und

$$K_\zeta := \kappa_{\zeta t*} = \alpha_{t*} \; \kappa_{\xi t*} = Q_t \; K_\xi$$

mit (s. S 5.1)

$$Q_t := \alpha_{t*} \qquad \in Ort^+(V) \; .$$

Also ist die Plazierung des materiellen Elementes weder *Euklid*isch invariant noch objektiv. Dagegen sind die Konfigurationen der materiellen Elemente *Euklid*isch invariant:

$$G_\xi := K_\xi^* \; K_\xi$$

$$G_\zeta := K_\zeta^* \; K_\zeta = K_\xi^* \; Q_t^* \; Q_t \; K_\xi = G_\xi \; .$$

Wie wir im Kapitel 9 gesehen haben, sind die Ortsvektoren, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen weder invariant noch objektiv. Lediglich bei *Galilei*-Transformationen transformieren sich die Beschleunigungen wie objektive Vektoren.

Beschäftigen wir uns nun mit den Gradientenfeldern. Die Transformationen des *Euler*schen Nabla-Operators

$$\nabla_{e\zeta} = Q_t(\nabla_{e\xi})$$

verifiziert man, indem man die Transformation der Ortsvektoren

$$r_\zeta := Q_t(r_\xi) + a_t$$

in folgende Identität einsetzt

$$I = r_\zeta \otimes \nabla_{e\zeta} = [Q_t(r_\xi) + a_t] \otimes Q_t(\nabla_{e\xi}) = Q_t(r_\xi \otimes \nabla_{e\xi}) Q_t^* = Q_t I Q_t^* = I .$$

Für den Geschwindigkeitsgradienten erhalten wir (s. S. 104)

$$\begin{aligned} L_\xi &:= grad\, v_{e\xi} = v_{e\xi} \otimes \nabla_{e\xi} \\ L_\zeta &:= grad\, v_{e\zeta} = v_{e\zeta} \otimes \nabla_{e\zeta} \\ &= Q_t(v_\xi) \otimes Q_t(\nabla_{e\xi}) + \left[Q_t^{\cdot} Q_t^* (r_\zeta - a_t) + a_t^{\cdot}\right] \otimes \nabla_{e\zeta} \\ &= Q_t (v_\xi \otimes \nabla_{e\xi}) Q_t^* + Q_t^{\cdot} Q_t^* (r_\zeta \otimes \nabla_{e\zeta}) \\ &= Q_t L_\xi Q_t^* + Q_t^{\cdot} Q_t^* . \end{aligned}$$

Wegen des antimetrischen Terms $Q_t^{\cdot} Q_t^*$ ist L nicht objektiv, wovon der symmetrische Anteil allerdings nicht beeinflußt wird:

$$\begin{aligned} D_\zeta &:= \tfrac{1}{2}(L_\zeta + L_\zeta^*) \\ &= Q_t \tfrac{1}{2}(L_\xi + L_\xi^*) Q_t^* \\ &= Q_t D_\xi Q_t^* . \end{aligned}$$

Der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ist also objektiv. Für den Wirbeltensor gilt hingegen

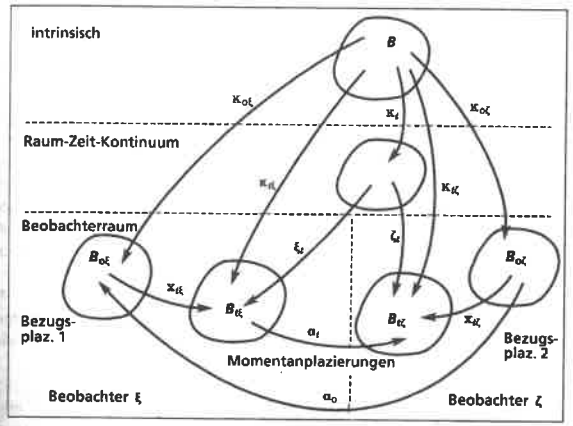
$$\begin{aligned} \Omega_\zeta &:= \tfrac{1}{2}(L_\zeta - L_\zeta^*) \\ &= Q_t \tfrac{1}{2}(L_\xi - L_\xi^*) Q_t^* + Q_t^{\cdot} Q_t^* \\ &= Q_t \Omega_\xi Q_t^* + Q_t^{\cdot} Q_t^* \end{aligned}$$

und damit für den Wirbelvektor

$$\omega_\zeta = Q_t(\omega_\xi) + w_t .$$

Alle höheren Geschwindigkeitsgradienten sind hingegen objektiv.

Nun zu den Größen der *bezogenen Beschreibungsweise*.
Um ihr Transformationsverhalten zu untersuchen, müssen wir wissen, wie sich die Bezugsplazierungen zweier Beobachter transformieren.



Wenn die beiden Beobachter völlig unabhängig voneinander sind, wird man davon ausgehen müssen, daß sie ihre Bezugsplazierungen $\kappa_{o\xi}$ und $\kappa_{o\zeta}$ unabhängig voneinander wählen können. Ist κ eine Bewegung, dann sieht der Beobachter ξ die Verrückung

$$\chi_{t\xi} := \kappa_{t\xi}\, \kappa_{o\xi}^{-1} = \xi_t\, \kappa_t\, \kappa_{o\xi}^{-1} : \quad \mathcal{B}_{o\xi} \to \mathcal{B}_{t\xi} ,$$

während der andere analog

$$\mathbf{x}_{\zeta t} := \kappa_{\zeta t}\, \kappa_{o\zeta}^{-1} = \zeta_t\, \kappa_t\, \kappa_{o\zeta}^{-1} = \zeta_t\, \xi_t^{-1}\, \xi_t\, \kappa_t\, \kappa_{o\xi}^{-1}\, \kappa_{o\xi}\, \kappa_{o\zeta}^{-1}$$
$$= \alpha_t\, \mathbf{x}_{\xi t}\, \alpha_o \;:\; B_{o\zeta} \to B_{\zeta t}$$

sieht mit der Isometrie

$$\alpha_t := \zeta_t\, \xi_t^{-1} \;:\; B_{\xi t} \to B_{\zeta t}$$

und der Bijektion

$$\alpha_o := \kappa_{o\xi}\, \kappa_{o\zeta}^{-1} \;:\; B_{o\zeta} \to B_{o\xi}\,.$$

Die Gradientenfelder sind

$$\mathbf{F}_\xi(t,X_{o\xi}) := \mathit{Grad}\, \mathbf{x}_\xi(t,X_{o\xi})$$
$$\mathbf{F}_\zeta(t,X_{o\zeta}) := \mathit{Grad}\, \mathbf{x}_\zeta(t,X_{o\zeta})$$
$$= \mathit{Grad}\, \alpha_t\; \mathit{Grad}\, \mathbf{x}_{\xi t}\; \mathit{Grad}\, \alpha_o$$
$$= \mathbf{Q}_t\, \mathbf{F}_\xi(t,X_{o\xi})\, \alpha_{o*}\,,$$

wobei die Raumargumente sich gemäß $X_{o\zeta} = \zeta_t\, \xi_t^{-1}(X_{o\xi})$ entsprechen sollen.

Während die Gradientenfelder α_{o*}, $\mathbf{F}_\xi(t,X_{o\xi})$ und $\mathbf{F}_\zeta(t,X_{o\zeta})$ von Ort und Zeit abhängig sind, hängt $\mathbf{Q}_t \in \mathit{Ort}(V)$ als Gradient der Isometrie α_t nur von der Zeit ab. Wählt jeder Beobachter eine für ihn ruhende Bezugsplazierung, so ist α_o als Verknüpfung zweier zeitunabhängiger Abbildungen $\kappa_{o\zeta}^{-1}$ und $\kappa_{o\xi}$ eine zeitlich konstante Bijektion.

Soweit die *allgemeine* Transformationsformel bei *Euklid*ischen Transformationen. Da die Bezugsplazierungen beliebig wählbar sind, können sich die Beobachter auch in ihrer Wahl absprechen und folgende Spezialfälle erzeugen:

1) $\kappa_{o\xi}$ und $\kappa_{o\zeta}$ gehören zu derselben Konfiguration. Dann ist $\alpha_o := \kappa_{o\xi}\, \kappa_{o\zeta}^{-1}$ eine Starrkörpermodifikation und somit zu einer Isometrie im Beobachterraum fortsetzbar. Ihr Gradient ist eine nun auch räumlich konstante orthogonale Transformation

$$\mathbf{Q}_o := \alpha_{o*} \in \mathit{Ort}(V)\,.$$

Dieser Fall führt auf

$$\mathbf{F}_\zeta(t,X_{o\zeta}) = \mathbf{Q}_t\, \mathbf{F}_\xi(t,X_{o\xi})\, \mathbf{Q}_o$$

(s. KRAWIETZ, S. 120).

2) wie 1) und zusätzlich die Annahme, daß $\alpha_o := \kappa_{o\xi}\, \kappa_{o\zeta}^{-1}$ eine Translation darstellt. Dann ist

$$\mathbf{Q}_o := \alpha_{o*} = \mathbf{1}$$

und

$$\mathbf{F}_\zeta(t,X_{o\zeta}) = \mathbf{Q}_t\, \mathbf{F}_\xi(t,X_{o\xi})\,.$$

Dieser Spezialfall wird von fast allen Autoren der Rationalen Mechanik unterstellt - meistens ohne besondere Erwähnung.

In allen vorangehenden Fällen ist es allgemein nicht möglich, die Bezugsplazierung als *eine* Bewegung zu interpretieren, die von den Beobachtern nur verschieden gesehen wird. Dies ist lediglich im letzten Fall gegeben:

3) Beide Beobachter einigen sich auf eine (reale oder fiktive) Starrkörperbewegung des Körpers. In diesem Fall ist α_{o*} eine zeitabhängige räumlich konstante orthogonale Transformation. Die so erzeugten Bezugsplazierungen sind jedoch im allgemeinen nicht mehr ruhend bez. *aller* Beobachter.

Alle diese Schwierigkeiten vermeidet man, wenn man die intrinsische Beschreibungsweise benutzt.

Allgemein erhält man für die anderen Deformationstensoren, wenn man die Raum- und Zeitargumente unterdrückt

$$\mathbf{B}_\xi := \mathbf{F}_\xi\, \mathbf{F}_\xi^*$$
$$\mathbf{B}_\zeta := \mathbf{F}_\zeta\, \mathbf{F}_\zeta^* = \mathbf{Q}_t\, \mathbf{F}_\xi\, \alpha_{o*}\, \alpha_o^*\, \mathbf{F}_\xi^*\, \mathbf{Q}_t^*$$
$$\mathbf{C}_\xi := \mathbf{F}_\xi^*\, \mathbf{F}_\xi$$
$$\mathbf{C}_\zeta := \mathbf{F}_\zeta^*\, \mathbf{F}_\zeta$$
$$= \alpha_o^*\, \mathbf{F}_\xi^*\, \mathbf{Q}_t^*\, \mathbf{Q}_t\, \mathbf{F}_\xi\, \alpha_{o*}$$
$$= \alpha_o^*\, \mathbf{C}_\xi\, \alpha_{o*}\,.$$

Für die Spezialfälle 1) und 2) folgt:

$$\mathbf{B}_\zeta = \mathbf{Q}_t\, \mathbf{B}_\xi\, \mathbf{Q}_t^*$$
$$\mathbf{C}_\zeta = \mathbf{Q}_o\, \mathbf{C}_\xi\, \mathbf{Q}_o^*$$
$$\mathbf{V}_\zeta = \mathbf{Q}_t\, \mathbf{V}_\xi\, \mathbf{Q}_t^*$$
$$\mathbf{U}_\zeta = \mathbf{Q}_o\, \mathbf{U}_\xi\, \mathbf{Q}_o^*\,.$$

also die Objektivität von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{V}$, und für den Spezialfall 2) obendrein die *Euklid*ische Invarianz von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{U}$

$$\mathbf{C}_\zeta = \mathbf{C}_\xi$$
$$\mathbf{U}_\zeta = \mathbf{U}_\xi \quad ,$$

während sich die Drehungen überlagern:

$$\mathbf{R}_\zeta = \mathbf{Q}_t \, \mathbf{R}_\xi$$

10.7 Die Bewegungsklasse des Körpers

Im folgenden beziehen wir uns auf einen beliebigen, aber festgewählten Körper $\mathcal{B}$. Wir hatten bereits im Kapitel 7 die Plazierungsklasse $\mathcal{K}$ eines Körpers kennengelernt, d. h. diejenigen Plazierungen, die der Körper - wann und unter welchen Umständen auch immer - einnehmen könnte. Dabei handelt es sich um eine körper-individuelle Eigenschaft, wie auch beim folgenden Begriff, der *Bewegungsklasse*.

Dazu erklärt man willkürlich einen Zeitpunkt $t_a \in \mathcal{T}$ zum **Anfangszeitpunkt**. Der Körper befindet sich zu diesem Zeitpunkt für einen Beobachter in einer eindeutigen **Anfangsplazierung**.

Wir werden im folgenden die Bewegungen während eines *endlichen* Zeitintervalls $[0, d]$ betrachten, wobei $d \geq 0$ die **Dauer** der Bewegung ist. Das bedeutet, daß wir unsere Uhr o. B. d. A. auf t_a nullen und in Zukunft der Einfachheit halber $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ setzen. Die Vor- und Nachgeschichten der Bewegung seien auf die Untersuchungen einflußlos und werden nicht beachtet.

Besonders interessant für uns ist die Menge der physikalisch möglichen Bewegungen, denen ein Körper unterworfen werden kann. Diese Menge unterliegt zweierlei Arten von Einschränkungen:

1) In geometrischer Hinsicht sind die Bewegungsmöglichkeiten in körperindividueller Weise eingeschränkt. So müssen alle Bewegungen in der Anfangsplazierung beginnen und dürfen zu keinem Zeitpunkt aus der Plazierungsklasse des

Körpers herausführen. Aber auch andere kinematische Einschränkungen sind denkbar (s. BERTRAM 1980). Wir nennen die verbleibenden Bewegungen *kinematisch möglich* und fassen sie in der *Bewegungsklasse* des Körpers zusammen.

2) Aber auch nicht alle kinematisch möglichen Bewegungen sind unter gegebenen Umwelteinflüssen tatsächlich realisierbar, sondern nur die Untermenge der *dynamisch möglichen* Bewegungen, wie sie im nächsten Kapitel untersucht werden sollen.

Wir betrachten zunächst nur die *kinematisch möglichen* Bewegungen.

D 10.4: Sei $\mathcal{B}$ Körper mit Plazierungsklasse $\mathcal{K}$. Die **Bewegungklasse** des Körpers ist eine Menge Π von Bewegungen, die **kinematisch möglich** heißen, so daß gelten:

(Π1): Π ist nicht leer.

(Π2): Alle Bewegungen $\kappa_i \in \Pi$ beginnen zur Zeit $t_a = 0$ in derselben Anfangsplazierung

$$\kappa_1(0) = \kappa_2(0) \; .$$

(Π3): Alle Teilbewegungen sind auch in Π;
d.h. für $\kappa \in \Pi$ der Dauer d folgt:

$$\kappa|_{[0,\, d_1]} \in \Pi \qquad \text{falls} \quad 0 \leq d_1 \leq d \; .$$

(Π4): Zu jeder Bewegung gibt es eine Fortsetzung;
d.h. zu jedem $\kappa_1 \in \Pi$ der Dauer d_1 existiert ein $\kappa_2 \in \Pi$ der Dauer $d_2 > d_1$, so daß

$$\kappa_2|_{[0,d_1]} = \kappa_1 \; .$$

(Π5): Π ist abgeschlossen unter Starrkörpermodifikationen;
d.h. ist $\kappa \in \Pi$ und α_t Starrkörpermodifikation mit $\alpha_{t_a} = \mathbf{I}$, so ist auch $\alpha \, \kappa \in \Pi$.

Einige unmittelbare Folgerungen seien ohne Beweis genannt:
Jede Bewegungsklasse enthält genau eine Bewegung der Dauer $d = 0$, die *Nullbewegung*. Alle Bewegungen aus der Bewegungklasse enthalten jene als Teilbewegung. Jede Bewegungsklasse enthält außer der Nullbewegung noch unendlich viele Bewegungen längerer Dauer. Über die maximale Dauer der

Bewegungen ist nichts ausgesagt. Es könnte möglicherweise eine obere Grenze als Supremum existieren.

Was sieht nun ein Beobachter ξ ? Wir bilden wie vorher die Verknüpfung

$$\kappa_\xi := \xi\,\kappa : [0,d] \times B \to E^3$$

und nennen sie **Bewegung bezüglich** ξ . Beziehen wir alle Bewegungen einer Bewegungsklasse auf einen Beobachter, so erhalten wir die **Bewegungsklasse bezüglich** ξ :

$$\Pi_\xi := \{\, \kappa_\xi := \xi\,\kappa \mid \kappa \in \Pi \,\} ,$$

für die die Forderungen $\Pi 1$ - $\Pi 5$ gleichermaßen gelten.

10.8 Bewegungsfunktionale

Sei M eine Menge und Π Bewegungklasse eines Körpers. Dann nennen wir eine Abbildung

$$A : \Pi \to M$$

Bewegungsfunktional. Beispiele sind lokale Geschehensfunktionen in intrinsischer, *Lagrange*scher oder *Euler*scher Darstellung und globale Geschehensfunktionen, die bewegungsabhängig sind, wie z.B. der *Impuls* des Körpers während der Bewegung. Man beachte, daß auch bei lokalen Geschehensfunktionen als Bewegungsfunktionalen die Bewegung des *ganzen* Körpers als unabhängige Variable eingeht. Ausnahmen davon bilden lediglich die weiter unten definierten deformationsinvarianten Bewegungsfunktionale.

Wir interpretieren den Wert von $A(\kappa)$ als Ergebnis der Bewegung κ zu demjenigen Zeitpunkt t , an dem die Bewegung endet. Die Schreibweise $A(\kappa,t)$ soll diesen zeitlichen Aspekt verdeutlichen. Dabei wird unterstellt, daß die Bewegung (mindestens) bis zum Zeitpunkt t in Π ist und der spätere Bewegungsablauf nicht in $A(\kappa,t)$ eingeht. Besitzen also zwei Bewegungen $\kappa_1 \in \Pi$ und $\kappa_2 \in \Pi$ eine gemeinsame Teilbewegung der Dauer d :

$$\kappa_1|_{[0,d]} = \kappa_2|_{[0,d]} ,$$

so sind grundsätzlich bis dahin die Werte eines Bewegungsfunktionals gleich:

$$A(\kappa_2,t) = A(\kappa_1,t) \qquad \forall\, t \in [0,d] .$$

Handelt es sich um eine lokale Größe, so notieren wir noch zusätzlich die räumliche Abhängigkeit vom

- intrinsischen Ortsargument $A_i(\kappa,t,X)$
- *Lagrange*schen Ortsargument $A_l(\kappa,t,X_0)$
- *Euler*schen Ortsargument $A_e(\kappa,t,x)$.

Ein Bewegungsfunktional wird im allgemeinen auch vom Beobachter abhängen, was wir nötigenfalls wie bisher durch einen entsprechenden griechischen Suffix anzeigen werden. Man kann sie aber dann auch gleich auf der Bewegungsklasse bez. des Beobachters definieren, was jedoch prinzipiell nichts an den folgenden Begriffen ändert.

Gilt eine Eigenschaft von A für $\kappa \in \Pi$ und *alle* Teilbewegungen von κ , so nennen wir sie gültig **entlang** κ .

Ein Bewegungsfunktional A heißt **invariant gegen Starrkörpermodifikationen**, falls für alle zeitlich zweimal differenzierbaren Isometrien α_t des E^3 mit $\alpha_{t=0} = I$ und alle $\kappa \in \Pi$ gilt:

$$A(\kappa,t) = A(\alpha\,\kappa,t) .$$

Ein *lokales* Bewegungsfunktional $A_i(\kappa,t,X)$ heißt dagegen **deformationsinvariant**, falls in einem beliebigen, aber festgewählten Punkt $X \in B$ für zwei Bewegungen $\kappa_1 \in \Pi$ und $\kappa_2 \in \Pi$ aus

$$\kappa_1(t,X) = \kappa_2(t,X) \qquad \forall\, t \in [0,d]$$

folgt

$$A_i(\kappa_1,t,X) = A_i(\kappa_2,t,X) .$$

Dabei können sich möglicherweise κ_1 und κ_2 für alle anderen Körperpunkte beliebig unterscheiden. Letztere Klasse von Bewegungsfunktionalen hängt also nur von der Bewegung oder Bahn des betrachteten Körperpunktes ab, während die Bewegung aller anderen Punkte und somit die Verzerrung des Körpers nicht in A eingeht.

Ist ein Bewegungsfunktional gleichzeitig deformations-invariant und invariant gegen Starrkörpermodifikationen, so beschreibt das den Trivialfall eines konstanten Funktionals, das überhaupt nicht mehr von der Bewegung abhängt.

Umgekehrt brauchen Bewegungsfunktionale allgemein weder die eine noch die andere Invarianz erfüllen.

11. Dynamik bewegter Körper

Empfohlene Literatur: GURTIN (1972), GURTIN/ WILLIAMS, NOLL (1959), TRUESDELL/ NOLL, TRUESDELL/ TOUPIN, WANG/ TRUESDELL

Um aus der Bewegungsklasse eines Körpers, also den *kinematisch* möglichen Bewegungen, die *dynamisch* möglichen herauszusondern, kommen wir mit den bisherigen kinematischen Begriffen nicht aus. Wir benötigen zu diesem Zweck neue grundlegende Konzepte, die axiomatisch eingeführt werden müssen. Bei ihrer Auswahl hat man eine ganze Reihe von verschiedenen Möglichkeiten, die aber alle, und darüber herrscht Einigkeit unter den Mechanikern, in dem Sinne äquivalent sind, daß sie in identischer Weise dynamisch mögliche von unmöglichen Bewegungen unterscheidbar machen. Da allein dieses Kriterium über die "Richtigkeit" einer dynamischen Theorie entscheidet, werden wir uns darüber hinaus von anderen Zielvorstellungen leiten lassen. So sind wir bemüht, möglichst wenige Größen ad hoc einzuführen, und ihnen möglichst klare physikalische Eigenschaften zuzuschreiben. Daneben sollten die grundlegenden Größen unserer praktischen Erfahrung und Vorstellungskraft, so unterschiedlich diese bei jedem einzelnen auch sein mögen, entsprechen.

Lediglich die mathematischen Objekte, mit denen wir jene Größen beschreiben wollen, lassen sich definieren. Wir haben darin bereits Erfahrung: wir konnten zwar definieren, was eine eindimensionale orientierte *Euklid*ische Mannigfaltigkeit ist, nicht jedoch, was die *Zeit* ist. Wir identifizieren lediglich die *Zeit* mit einer solchen. Und es gibt sicherlich viele Begriffe desselben mathematischen Typs, die physikalisch etwas ganz anderes als die *Zeit* bedeuten. Wir sind davon ausgegangen, daß von der physikalischen *Zeit* bereits ein a-priori-Verständnis vorhanden ist.

Analog wählen wir für die Dynamik als grundlegenden Begriff die *mechanische (Gesamt-) Arbeit* und hoffen, von ihr eine Vorstellung zu haben als Menschen, die Gegenstände anheben, die Treppen steigen, Fahrrad fahren, etc. , schlicht: *arbeiten*. Da wir keine Definition dieser Größe geben können, sind wir auch nicht in der Lage, einen Meßvorschrift anzugeben. Ohne auf die Problematik von Messungen näher eingehen zu wollen, sei bemerkt, daß wir in der Mechanik allenfalls geometrische Größen (Abstände) direkt messen können. (Man beachte, daß *Meter* und *messen* vom selben Wort abstammen). Dazu gehören aber nicht die dynamischen und kinetischen Größen wie *Arbeit, Leistung, Kraft* und *Moment*. Erst bei Kenntnis des

gesamten Systems und insbesondere seiner Bilanzen sind wir hinterher in der Lage, indirekte Meßmethoden zu entwickeln. So ist die Bestimmung einer Gewichtskraft mittels einer Balkenwaage erst möglich, wenn wir das Gravitationssystem, die Gleichgewichtsbedingungen usw. verstanden haben. Und für die Kraftmessung mittels einer Federwaage - so einfach dies im speziellen Fall sein mag - müssen wir u. a. die *Elastizität* verstanden haben. Einstweilen wollen wir lediglich die prinzipielle Möglichkeit einer *Arbeits*-Messung annehmen, ohne sie angeben zu können.

Die *Arbeit* wird zunächst als *globale* Geschehensfunktion eingeführt und dann am starren Körper exemplifiziert. Danach lokalisieren wir sie zu einer Feldformulierung.

11.1 Globale Formulierung der Dynamik

Die *Arbeit* sei eine skalare Größe, die jeder Beobachter allen kinematisch möglichen Bewegungen zuordnen kann. Eine solche Bewegung soll dynamisch möglich sein, falls die Arbeit von allen Beobachtern entlang der Bewegung als wertmäßig gleich registriert wird, d. h. wenn sie als objektiv oder *Euklid*isch-invariant wahrgenommen wird. Damit entspricht - grob gesagt - die physikalische Wirklichkeit dem objektiven Anteil unserer sonst sicherlich weitgehend "subjektiven" Theorie von ihr.

Die *Arbeit* soll als Bewegungsfunktional (s. Abschnitt 10.8) determinierbar sein bei Kenntnis der gesamten vorangegangenen Bewegung des gesamten betrachteten Körpers. Die zukünftige Bewegung bleibt ohne rückwirkenden Einfluß.

Wir nehmen außerdem an, daß ein aus Beobachtersicht ruhender Körper keine *Arbeit* leistet.

Die restlichen Eigenschaften der *Arbeit* sind im wesentlichen Glattheits-Forderungen, die sie einer kontinuumsmechanischen Beschreibung zugänglich machen sollen. So ermöglicht uns die zeitliche Differenzierbarkeit der Arbeit, jene aus einer zeitlichen Intensität, der *mechanischen (Gesamt-) Leistung*, aufzuintegrieren. Ebenso werden wir später fordern, daß sie eine räumlich stetige Dichte besitzt, was uns den Übergang zur Feldformulierung bereiten wird.

A 11.1: Prinzip des Determinismus

Sei $\mathcal{B}$ Körper mit Bewegungsklasse Π . Dann gibt es für jeden Beobachter ξ ein globales Bewegungsfunktional (σ-additiv und absolutstetig)

$$A_\xi : \Pi \to \mathbb{R} \ ,$$

genannt (mechanische Gesamt-) **Arbeit**, mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Die Arbeit ist für alle Beobachter entlang einer Bewegung stückweise stetig differenzierbar. Das Bewegungsfunktional

$$L_\xi(\mathbf{x}, t) := A_\xi(\mathbf{x}, t)^{\cdot}$$

heißt (mechanische) **Leistung**.

(A2) Ist der Körper momentan in Ruhe bez. eines Beobachters, so produziert er momentan keine Leistung, d. h. mit $t \in T$ gilt:

$$\mathbf{v}_\xi(t,x) = \mathbf{o} \qquad \forall\, x \in B_{\mathbf{x}} \qquad \Rightarrow \qquad L_\xi(\mathbf{x}, t) = 0 \ .$$

Man beachte, daß die Arbeit wie dann auch die Leistung (am Ende) einer Bewegung i. allg. von der ganzen Bewegung abhängen, was durch den Begriff *Funktional* ausgedrückt wird.

Sind beispielsweise zwei Prozesse in einem anfänglichen Zeitintervall $[0,\tau]$ unterschiedlich und im Rest $[\tau,d]$ identisch, so können die entsprechenden Arbeiten und Leistungen für beide Bewegungen durchaus verschieden sein.

Andererseits kann der Einfluß der zukünftigen Bewegung auf die Vergangenheit ausgeschlossen werden. Ist nämlich eine Bewegung Teilbewegung zweier unterschiedlicher Bewegungen, so können ihre Arbeit und Leistung eindeutig berechnet werden, gleich, wie sie fortgesetzt werden.

Der Zusammenhang zwischen Arbeit und Leistung entlang einer Bewegung $\mathbf{x}$ der Dauer d ist gemäß der Analysis

$$L_\xi(\mathbf{x}, t) := A_\xi(\mathbf{x}, t)^{\cdot} \qquad \forall\, t \in [0, d]$$

$$A_\xi(\mathbf{x}, d) = \int_0^d L_\xi(\mathbf{x}, t)\, dt \ .$$

Das *Arbeits*-Funktional hängt also auch vom Beobachter ab. Es ist deshalb gleich, ob man es auf der Bewegungsklasse selbst oder der Bewegungsklasse *bez. des Beobachters* definiert.

Um *dynamisch mögliche* Bewegungen von unmöglichen zu unterscheiden, benutzen wir das folgende grundlegende Axiom:

A 11.2: Objektivitätshypothese
Eine kinematisch mögliche Bewegung $\varkappa \in \Pi$ eines Körpers ist genau dann **dynamisch möglich**, falls die Arbeit/ Leistung des Körpers überall entlang $\varkappa$ objektiv ist.

Für skalare Funktionen fallen definitionsgemäß Objektivität und *Euklid*ische Invarianz zusammen. Für mögliche Bewegungen muß also der Wert der Arbeit und damit auch der Leistung für alle Beobachter der gleiche sein.

Betrachten wir das Raumgebiet $B_{t\xi}$, das der Körper zu einem Zeitpunkt t während einer Bewegung $\varkappa$ bez. eines Beobachters ξ einnimmt. Da der Körper B voraussetzungsgemäß kompakt ist, ist sein Bild unter der homöomorphen Plazierung $\varkappa_{t\xi}$ ebenfalls kompakt und damit als Teilmenge eines *Euklid*ischen Raumes beschränkt und abgeschlossen (Satz von *Heine-Borel*). Wir bezeichnen mit δV_ξ die Menge aller stetigen Vektorfelder in diesem Bereich, die von derselben Differenzierbarkeitsklasse C^p $(p \geq 1)$ sind wie das momentane Geschwindigkeitsfeld v_ξ, das ebenfalls Element aus δV_ξ ist. Dieser Raum besitzt auf natürliche Weise eine lineare Struktur, die ihn zu einem ∞-dimensionalen Vektorraum macht. Dabei sind die linearen Operationen punktweise auszuführen.

Für ein solches $\delta v_\xi \in \delta V_\xi$ gilt:

δv_ξ ist Vektorfeld auf $B_{t\xi}$;

$\delta v_\xi \otimes \nabla_{e_t}$ ist Tensorfeld auf $B_{t\xi}$;

$\delta v_\xi \otimes \nabla_{e_t}{}^p := \delta v_\xi \otimes \nabla_{e_t} \otimes \nabla_{e_t} \ldots \otimes \nabla_{e_t}$ (p-mal)
ist Tensorfeld $(p+1)$.- Stufe auf $B_{t\xi}$.

Alle diese Felder besitzen für alle $x \in B_{t\xi}$ eine lokale Norm $\|\cdot\|$. Wir definieren auf δV_ξ nun die *p-Norm*

$$\|\delta v_\xi\|^p := \left\{\int_B \left[\|\delta v_\xi(x)\|^2 + \|\delta v_\xi(x) \otimes \nabla_{e_t}\|^2 + \ldots + \|\delta v_\xi(x) \otimes \nabla_{e_t}{}^p\|^2\right] dm\right\}^{1/p}.$$

Integriert wird dabei über das momentan vom Körper B bezüglich ξ eingenommene Gebiet des Beobachterraumes E^3. Man kann auch die Differentialformen auf den Körper B selbst zurückziehen und dort integrieren, was eine Transformation der Integrationsgebiete bei Beobachterwechseln entbehrlich macht. Dies gilt im übrigen für alle in diesem Kapitel vorkommenden Integrale über den Körper oder seinen Rand.

Mit der p-Norm wird δV_ξ topologischer Vektorraum, der allerdings nicht vollständig ist. Seine Vervollständigung ist der *Sobolev*-Raum $W^{p,2}$, ein separierbarer *Hilbert*-Raum mit dem inneren Produkt

$$\langle \delta v_\xi, \delta u_\xi \rangle$$
$$:= \int_B \left[\langle \delta v_\xi(x), \delta u_\xi(x) \rangle + \langle \delta v_\xi(x) \otimes \nabla_{e_t}, \delta u_\xi(x) \otimes \nabla_{e_t} \rangle + \ldots + \langle \delta v_\xi(x) \otimes \nabla_{e_t}{}^p, \delta u_\xi(x) \otimes \nabla_{e_t}{}^p \rangle\right] dm .$$

Man beachte jedoch, daß die Ableitungen von Funktionen aus der Vervollständigung $W^{p,2}$ i. allg. nicht mehr als partielle Ableitungen, sondern nur noch als distributive Ableitungen definiert werden können (s. ADAMS). Wir benötigen $W^{p,2}$ selbst nicht, werden aber später Ergebnisse, die auf ihm gelten, auf seinen Unterraum δV_ξ anwenden.

Man nennt die Vektorfelder δv_ξ **virtuelle Verrückungen** oder **virtuelle Geschwindigkeiten**, wobei das Adjektiv *virtuell* besagen soll, daß es sich um das wirkliche Geschwindigkeitsfeld handeln kann, aber keinesweg muß. Man definiert dann δL_ξ, δD_ξ, $\delta \Omega_\xi$ und $\delta \omega_\xi$ in Analogie zu den entsprechenden Geschwindigkeitsgrößen.

Wir führen nun auf diesem Raum ein Hilfskonzept ein, mit dem das Leistungs-Funktional in stetiger und linearer Weise verallgemeinert wird. Bei Beobachterwechseln soll es sich wie die Leistung selbst transformieren. Durch diese Vorschrift ist das Hilfskonzept sofort von einem auf alle anderen Beobachter ausweitbar.

D 11.3: Sei B Körper mit Bewegungsklasse Π und der Leistung L_ξ bez. eines Beobachters ξ. Eine **virtuelle Leistung** ist ein beobachter-abhängiges globales Bewegungsfunktional (σ-additiv und absolutstetig) mit

$$\delta L_\xi(\varkappa, t, \cdot): \delta V_\xi \to \mathbb{R}$$

$\forall\, \varkappa \in \Pi,\ t \in [0, d]$, mit folgenden Eigenschaften:

(V1) $\delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \cdot)$ ist stetig bez. der p-Norm und linear im letzten Argument;

(V2) für das Geschwindigkeitsfeld fällt $\delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \cdot)$ mit der Leistung zusammen:

$$\delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}_\xi) = L_\xi(\mathbf{x}, t) \; ;$$

(V3) $\delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \cdot)$ transformiert sich bei Beobachterwechseln wie die Leistung, falls sich die virtuellen Geschwindigkeiten wie Geschwindigkeiten transformieren. D. h. seien ξ und ζ zwei Beobachter und $\mathbf{Q}_\xi$, $\mathbf{w}_\xi$, $\mathbf{a}_\xi$ die durch den Beobachterwechsel $\zeta\,\xi^{-1}$ induzierten Größen (s. Abschnitt 9.6), sowie

$$\delta \mathbf{v}_\xi \in \delta V_\xi$$

und

$$\delta \mathbf{v}_\zeta = \mathbf{Q}_\xi(\delta \mathbf{v}_\xi) + \mathbf{w}_\xi \times (\mathbf{r}_\zeta - \mathbf{a}_\xi) + \mathbf{a}_\xi^{\cdot} \; ,$$

dann gelte

$$\delta L_\zeta(\mathbf{x}, t, \delta \mathbf{v}_\zeta) - \delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \delta \mathbf{v}_\xi) = L_\zeta(\mathbf{x}, t) - L_\xi(\mathbf{x}, t) \; .$$

Die virtuelle Leistung wird als gedankliche Erweiterung der Leistung eingeführt. Sie ist nicht eindeutig und dort, wo sie mit der Leistung nicht zusammenfällt, auch nicht durch Leistungsmessungen allein empirisch determinierbar.

A 11.4: Es existiere eine virtuelle Leistung.

Dies ist eine nicht-triviale und folgenreiche Annahme. Mit ihr kann man dann allerdings sofort zeigen, daß es beliebig viele weitere virtuelle Leistungen gibt. Man kann sie beispielsweise durch leistungsneutrale Terme der Art

$$\int_B \langle \mathbf{A}_\xi(x) \, , [\delta \mathbf{v}_\xi(x) \otimes \nabla_e + (\delta \mathbf{v}_\xi(x) \otimes \nabla_e)^*] \rangle \, dm$$

erweitern, worin $\mathbf{A}_\xi(x)$ ein objektives und zu $\mathbf{D}_\xi(x)$ orthogonales Tensorfeld ist (Darstellungen s. TROSTEL 1985 I, S.390 ff), und erhält dadurch andere virtuelle Leistungen. Diese Willkür in der Auswahl einer virtuellen Leistung wird aber später wieder relativiert, da die Folgerungen für alle Wahlen im wesentlichen gleich sein werden. Die virtuelle Leistung ist im Rahmen dieser Theorie nur ein Hilfskonzept und kann später vollständig ersetzt werden durch abgeleitete Konzepte, die eindeutig sind.

S 11.5: Prinzip der virtuellen Leistung
Ist die virtuelle Leistung bez. eines Beobachters entlang einer Bewegung für alle virtuellen Geschwindigkeiten Null, so ist die Bewegung dynamisch möglich.

B: Sei

$$\delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \delta \mathbf{v}_\xi) = 0 \qquad \delta \mathbf{v}_\xi \in \delta V_\xi ,$$

so auch für das tatsächliche Geschwindigkeitsfeld.
Mit (V2) folgt dann

$$L_\xi(\mathbf{x}, t) = 0 \; .$$

Die Transformationen für $\delta \mathbf{v}_\xi$ in (V3) sind für alle Beobachterwechsel Bijektionen zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten δV_ξ und δV_ζ. Mit (V3) folgt dann für alle anderen Beobachter ζ

$$\delta L_\zeta(\mathbf{x}, t, \cdot) = L_\zeta(\mathbf{x}, t) \; .$$

Wenn eine lineare Abbildung für alle Argumente konstant ist, so kann es sich nur um die konstante Null handeln:

$$L_\zeta(\mathbf{x}, t) = 0 \; .$$

Wenn die Leistung aber für alle Beobachter entlang der Bewegung Null ist, so ist sie objektiv und die Bewegung damit dynamisch möglich. ⊠

Die Bedeutung dieses Satzes ist allerdings begrenzt, da er ein hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium für die dynamische Möglichkeit einer Bewegung liefert. Wir werden weiter unten eine verschärfte Version des Prinzips kennenlernen (S 11.25), die hinreichende *und notwendige* Bedingung zugleich ist.

Zwei durch die virtuelle Leistung induzierte Größen sind die *verlorenen Kräfte* und *Momente*. Erinnern wir uns an die Starrkörperbewegungen (s. Abschnitt 10.4): nach Wahl eines Bezugspunktes kann man gemäß der *Euler*schen Formel (EGF S.121) das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi)$ als Funktion des Ortsvektors $\mathbf{r}_\xi$ eindeutig durch zwei Vektoren $\omega_\xi(t)$ und $\mathbf{v}_{o\xi}(t)$ darstellen als

$$\mathbf{v}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi) = \omega_\xi(t) \times \mathbf{r}_\xi + \mathbf{v}_{o\xi}(t) \; .$$

Die Menge der so entstehenden Vektorfelder bilden einen 6-dimensionalen Unterraum von δV_ξ. Der folgende Satz folgt aus der eindeutigen Darstellbarkeit linearer Funktionale auf Vektorräumen endlicher Dimension durch duale Vektoren.

S 11.6: Sei B Körper, Π Bewegungsklasse, $\kappa \in \Pi$ Bewegung, ξ Beobachter, $t \in [0, d]$ Zeitpunkt und $o \in B_{t\xi}$ BZP.
Dann gibt es zwei Vektoren $f_{o\xi}$ und $c_{o\xi}$, so daß für alle Vektoren $\omega, v_o \in V$ gilt

$$\delta L_\xi(\kappa, t, \omega \times r_\xi + v_o) = \langle f_{o\xi}, v_o\rangle + \langle c_{o\xi}, \omega\rangle .$$

Darin ist r_ξ der Ortsvektor aller Punkte in $B_{t\xi}$ bez. o.

Man beachte, daß $f_{o\xi}$ und $c_{o\xi}$ zunächst von der Wahl der virtuellen Leistung, vom BZP, vom Beobachter und von der Bewegung bis t funktional abhängen, nicht jedoch von v_o und ω.

D 11.7: (Alle Bezeichnungen wie im vorigen Satz.) Die folgenden vier Vektoren heißen die durch δL induzierten **dynamischen Größen**, nämlich

- die **verlorene Kraft**: $f_{o\xi}$
- das **verlorene Moment**: $c_{o\xi}$
- die **Kraft**: $k_{o\xi} := f_{o\xi} + i_\xi^{\cdot}$
- das **Moment**: $m_{o\xi} := c_{o\xi} + d_{o\xi}^{\cdot}$,

die auf den Körper B während der Bewegung $\kappa \in \Pi$ zur Zeit $t \in [0, d]$ wirken bez. des Beobachters ξ und des BZPs $o \in B_t$. Darin sind i_ξ der Impuls und $d_{o\xi}$ der Drall bez. o (s. Abschnitt 10.3).

Die dynamischen Größen sind doppelt indiziert: ξ steht für den Beobachter und o für den BZP. In den folgenden Sätzen werden wir beide Abhängigkeiten untersuchen. Dazu betrachten wir *einen* Körper, *eine* kinematisch mögliche Bewegung und *einen* Zeitpunkt.

S 11.8: ***Varignons* Momentenprinzip**
Transformationen der dynamischen Größen bei Wechsel des BZPs
(Alle Bezeichnungen wie in der vorigen Definition)
Seien o und $o' \in B_{t\xi}$ zwei BZPe. Dann gelten

a) $f_{o'\xi} = f_{o\xi}$

b) $k_{o'\xi} = k_{o\xi}$

c) $c_{o'\xi} = c_{o\xi} + \vdash o', o \dashv \times f_{o\xi}$

d) $m_{o'\xi} = m_{o\xi} + \vdash o', o \dashv \times k_{o\xi}$.

PIERRE VARIGNON 1654 - 1722

B: Im folgenden haben wir den Index ξ weggelassen, da wir uns immer auf denselben Beobachter beziehen. Mit der *Euler*schen Geschwindigkeitsformel erhalten wir für die virtuelle Leistung

$$\begin{aligned}
\delta L(\kappa, t, \omega \times \vdash o, x \dashv + v_o) &= \delta L(\kappa, t, \omega \times \vdash o', x \dashv + v_{o'}) \\
&= \langle f_o, v_o\rangle + \langle c_o, \omega\rangle \\
&= \langle f_{o'}, v_{o'}\rangle + \langle c_{o'}, \omega\rangle \\
&= \langle f_{o'}, v_o + \omega \times \vdash o, o' \dashv\rangle + \langle c_{o'}, \omega\rangle \\
&= \langle f_{o'}, v_o\rangle + \langle (c_{o'} + \vdash o, o' \dashv \times f_{o'}), \omega\rangle .
\end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von v_o und ω folgen a) und c). b) folgt aus a) und der Tatsache, daß i_ξ nicht vom BZP abhängt. Aus der Momenten-Definition folgt

$$\begin{aligned}
m_{o'} &= c_{o'} + d_{o'}^{\cdot} \\
&= c_o + \vdash o', o \dashv \times f_o + \int_B (\vdash o', x \dashv \times v^{\cdot}(t,x))\, dm \\
&= c_o + \vdash o', o \dashv \times \left(f_o + \int_B v^{\cdot}(t,x)\, dm\right) + \int_B (\vdash o, x \dashv \times v^{\cdot}(t,x))\, dm \\
&= c_o + \vdash o', o \dashv \times k_o + d_o^{\cdot} \\
&= m_o + \vdash o', o \dashv \times k_o ,
\end{aligned}$$

wobei in der *Euler*schen, *Lagrange*schen oder intrinsischen Darstellung integriert werden kann. ⊠

Da die Kräfte also nicht vom BZP abhängen, lassen wir folglich den BZP-Index weg.

S 11.9: Transformationen der dynamischen Größen bei Beobachterwechsel
Seien ξ und ζ zwei Beobachter und o_ξ und o_ζ zwei derart gewählte BZPe, daß sie in C momentan koinzidieren, d.h.

$$\xi_a^{-1}(o_\xi) = \zeta_a^{-1}(o_\zeta) .$$

Dann gilt für die durch eine virtuelle Leistung induzierten dynamischen Größen:

$$f_\zeta = Q_\xi(f_\xi)$$

$$c_{o\zeta} = Q_\xi(c_{o\xi})$$

$$k_\zeta = Q_\xi(k_\xi) + \int_B e_\xi \, dm$$

$$m_{o\zeta} = Q_\xi(m_{o\xi}) + \int_B r_\zeta \times e_\xi \, dm$$

mit dem Vektorfeld (s. S. 105)

$$e_\xi := a_\xi'' + w_\xi' \times r_\zeta + 2\, w_\xi \times (v_\zeta - a_\xi') - w_\xi \times (w_\xi \times r_\zeta) ,$$

wobei über das momentane Körpergebiet zu integrieren ist.

B: Wegen der speziellen Wahl der BZPe erhalten wir momentan $a_\xi = o$, (was jedoch *nicht* $a_\xi' = o$ impliziert). Wenden wir (*V3*) auf das Feld

$$\omega \times r_\xi + v_o \in BV_\xi$$

an, so ist

$$\begin{aligned} &\delta L_\zeta(x, t, Q_\xi(\omega \times r_\xi + v_o) + w_\xi \times r_\zeta + a_\xi') - \delta L_\xi(x, t, \omega \times r_\xi + v_o) \\ &= L_\zeta(x, t) - L_\xi(x, t) \\ &= \langle f_\zeta , Q_\xi(v_o)\rangle + \langle c_{o\zeta} , Q_\xi(\omega)\rangle + \langle f_\zeta , a_\xi'\rangle + \langle c_{o\zeta} , w_\xi\rangle \\ &\quad - \langle f_\xi , v_o\rangle - \langle c_{o\xi} , \omega\rangle , \end{aligned} \tag{LD}$$

weil

$$Q_\xi(\omega \times r_\xi) = Q_\xi(\omega \times Q_\xi^*(r_\zeta)) = Q_\xi(\omega) \times r_\zeta ,$$

da für alle Vektoren a, b, c die Determinanten-Regel (s. S. 34) gilt :

$$\begin{aligned} \langle Q_\xi(a) , Q_\xi(b) \times Q_\xi(c)\rangle &= \det Q_\xi \ \langle a , b \times c\rangle = \langle a , b \times c\rangle \\ &= \langle a , Q_\xi^*(Q_\xi(b) \times Q_\xi(c))\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad b \times c = Q_\xi^*(Q_\xi(b) \times Q_\xi(c))$$

$$\Rightarrow \qquad Q_\xi(b \times c) = Q_\xi(b) \times Q_\xi(c) .$$

Da v_o und ω beliebig und unabhängig von Q_ξ, w_ξ und a_ξ' sind, folgen die ersten beiden Transformationsformeln. Damit erhalten wir unter Beachtung der Definitionen für Kräfte und Momente sowie der Transformationen für Impuls, Drall, Beschleunigung und Ortsvektor die beiden anderen Transformationen. ⊠

Die verlorenen Kräfte und verlorenen Momente sind also im Rahmen unserer Theorie objektiv, während es die Kräfte und Momente selbst nicht sind. Lediglich unter *Galilei*-Transformationen, wo $e_\xi = o$ ist, sind es auch letztere.

Im obigen Satz hatten wir die BZPe speziell gewählt. Im Zusammenhang mit den Transformationen bez. BZP-Wechsel (s. S 11.8) erhalten wir jedoch auch bez. Beobachterwechsel völlige Allgemeinheit.

Der folgende Satz ist die wichtigste Konsequenz aus den Axiomen dieses Kapitels, da er den Zusammenhang zu anderen Vorgehensweisen aufzeigt.

S 11.10: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent für die dynamischen Größen induziert durch eine (beliebige) virtuelle Leistung für jede kinematisch mögliche Bewegung:

1) Die Bewegung ist **dynamisch möglich**.

2) **Prinzip von *d'Alembert***:
Die verlorenen Kräfte und Momente sind im Gleichgewicht, d. h.

$$\boxed{\begin{aligned} f_\xi &= o \\ c_{o\xi} &= o \end{aligned}}$$

für einen /alle Beobachter bez. eines/aller BZP überall entlang der Bewegung.

3) **globaler Impulssatz** und **Drallsatz**
gelten für einen/alle Beobachter bez. eines/aller BZP überall entlang der Bewegung:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{k}_\xi &= \mathbf{i}_\xi^{\cdot} \\ \mathbf{m}_{o\xi} &= \mathbf{d}_{o\xi}^{\cdot} \end{aligned}}$$

4) Prinzip von *d'Alembert* in der *Lagrange*schen Fassung
Die *virtuelle Leistung der verlorenen Kräfte* bilanziert sich gemäß

$$\boxed{<\mathbf{f}_\xi\ , \delta\mathbf{v}> + <\mathbf{c}_{o\xi}\ , \delta\boldsymbol{\omega}> = 0 \qquad \forall\ \delta\mathbf{v}\ , \delta\boldsymbol{\omega}\ \in V}$$

für einen/alle Beobachter überall entlang der Bewegung.

JEAN LE ROND D'ALEMBERT 1717 - 1783
JEAN LOUIS LAGRANGE 1736 - 1813

B: Angenommen, (1) gilt. Mit Gl. (LD) des Beweises von **S 11.9** gilt dann

$$<\mathbf{Q}_t(\mathbf{f}_t)\ , \mathbf{a}_t^{\cdot}> + <\mathbf{Q}_t(\mathbf{c}_{o\xi})\ , \mathbf{w}_t> = 0$$

für alle Beobachterwechsel, d. h. beliebige $\mathbf{Q}_t$, $\mathbf{w}_t$ und $\mathbf{a}_t^{\cdot}$. Damit folgt das *Prinzip von d'Alembert* (2) für ξ. Wegen der Objektivität von $\mathbf{f}_\xi$ und $\mathbf{c}_{o\xi}$ gilt das Prinzip dann auch für alle anderen Beobachter.

Wenn wir umgekehrt bei (2) beginnen, erhalten wir aus (*V3*) und der speziellen Wahl

$$\delta\mathbf{v}_\zeta = \mathbf{o} \in \delta V_\zeta$$

und der speziellen Wahl der BZPe wie in **S 11.9**

$$\begin{aligned} \delta L_\zeta(\mathbf{x}, t, \mathbf{w}_t \times \mathbf{r}_\zeta + \mathbf{a}_t^{\cdot}) - 0 &= L_\zeta(\mathbf{x}, t) - L_\xi(\mathbf{x}, t) \\ &= <\mathbf{f}_\xi\ , \mathbf{a}_t^{\cdot}> + <\mathbf{c}_{o\xi}\ , \mathbf{w}_t> \\ &= 0\ , \end{aligned}$$

also folgt die Objektivität der Leistung zu allen Zeiten entlang der Bewegung, womit auch die Arbeit objektiv ist, also (1).

Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt mit der Definition der Kräfte und Momente. Die Abhängigkeit der Bedingungen in (2) und (3) vom BZP läßt sich mit den entsprechenden Transformationen relativieren. Die Äquivalenz von (2) und (4) ist wegen der Beliebigkeit der Vektoren $\delta\mathbf{v}$ und $\delta\boldsymbol{\omega}$ evident. ⊠

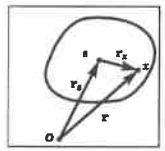
11. 2 Dynamik starrer Körper

Eine interessante Anwendung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts erhält man, wenn man sich auf *starre Körper* spezialisiert (s. , e. g., LAGALLY/ FRANZ, GUMMERT/ RECKLING). Hierbei handelt es sich um die Idealisierung besonders fester Körper unter nicht allzu großen Beanspruchungen (s. Kap. 18).

D 11.11: **Als starre Körper** bezeichnen wir diejenigen Körper, deren Bewegungsklasse nur Starrkörperbewegungen enthält.

Wir benutzen im folgenden nur *einen* Beobachter und lassen zur Einfachheit den Beobachter-Index weg. Das Geschwindigkeitsfeld eines starren Körpers läßt sich grundsätzlich bezüglich eines festen Punktes $y \in B_t$ eindeutig durch zwei zeitabhängige Vektoren $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{v}_o$ geben, so daß die *Euler*sche Geschwindigkeitsformel gilt (s. EGF S. 121)

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}_y + \boldsymbol{\omega} \times \mapsto y\ , x \rightarrow\ .$$



Durch Einführung des **Massenmittelpunktes** s, dargestellt durch seinen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_s(t) := \int_s \mathbf{r}\, dm\ /\, m_s$$

erhalten wir mit dem Ortsvektor bez. s

$$\mathbf{r}_x := \mapsto s\ , x \rightarrow\ = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s\ ,$$

für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x\ ,$$

für den Impuls

$$\mathbf{i}(\mathbf{x},t) = \int_s \mathbf{v}(x)\,dm = \int_s (\mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x)\,dm = \mathbf{v}_s m_s$$

und für den Drall

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_O(\mathbf{x},t) &= \int_s \mathbf{r} \times \mathbf{v}(x)\,dm \\
&= \int_s (\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_x) \times (\mathbf{v}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x)\,dm \\
&= \mathbf{r}_s \times \mathbf{v}_s m_s + \int_s \mathbf{r}_x \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x)\,dm \\
&= \mathbf{r}_s \times \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \int_s [\boldsymbol{\omega} <\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_x> - \mathbf{r}_x <\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}_x>]\,dm \\
&= \mathbf{r}_s \times \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \left\{\int_s [\mathbf{r}_x^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x]\,dm\right\}(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \mathbf{r}_s \times \mathbf{i}(\mathbf{x},t) + \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega})
\end{aligned}$$

mit dem symmetrischen und positiv-definiten **Massenträgheitstensor** (bez. s)

$$\boldsymbol{\Theta}_s := \int_s (\mathbf{r}_x^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x)\,dm$$

mit den Komponenten bezüglich kartesischer Koordinaten $\{x_i\}$

$$\Theta_{ii} = \int_s (x_j^2 + x_k^2)\,dm\,, \qquad i \neq j \neq k \neq i\,,$$

den **axialen Trägheitsmomenten**, und

$$\Theta_{ij} = \Theta_{ji} = -\int_s x_i x_j\,dm\,, \qquad i \neq j\,,$$

den (negativen) **Deviationsmomenten**. Wegen der Symmetrie ist immer eine Spektraldarstellung (s. S. 27) möglich. Die Eigenvektoren beschreiben die **Hauptträgheitsachsen**, die Eigenwerte heißen **Hauptträgheitsmomente**. Sie sind beim starren Körper körperfest. Besitzt der Körper Symmetrieachsen, so sind diese grundsätzlich Hauptträgheitsachsen.

Für die Zeitableitung des Massenträgheitstensors erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}_s^{\cdot} &= d/dt\,[\int_s (\mathbf{r}_x^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x)\,dm] \\
&= \int_s (\mathbf{r}_x^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x)^{\cdot}\,dm \\
&= \int_s [2 <\mathbf{r}_x,\mathbf{r}_x^{\cdot}> \mathbf{I} - \mathbf{r}_x^{\cdot} \otimes \mathbf{r}_x - \mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x^{\cdot}]\,dm \\
&= \int_s [2 <\mathbf{r}_x,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x> \mathbf{I} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x) \otimes \mathbf{r}_x - \mathbf{r}_x \otimes (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_x)]\,dm \\
&= \int_s [0 - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_x^2 \mathbf{I}) + (\mathbf{r}_x \otimes \mathbf{r}_x) \times \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_x^2 \mathbf{I}) \times \boldsymbol{\omega}]\,dm \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_s - \boldsymbol{\Theta}_s \times \boldsymbol{\omega}.
\end{aligned}$$

Der Impulssatz lautet nun

$$\mathbf{k}(\mathbf{x},t) = \mathbf{i}(\mathbf{x},t)^{\cdot} = (\mathbf{v}_s m_s)^{\cdot} = \mathbf{b}_s m_s$$

und der Drallsatz:

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{x},t) = \mathbf{d}_O^{\cdot}(\mathbf{x},t) = \mathbf{m}_s + \mathbf{r}_s \times \mathbf{k} = \mathbf{r}_s \times \mathbf{i}^{\cdot} + [\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega})]^{\cdot}\,,$$

so daß unter Verwendung des Impulssatzes der Drallsatz bezogen auf den körperfesten, i. allg. aber nicht raumfesten Massenmittelpunkt auch in der Form

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_s &= d/dt\,[\mathbf{d}_s(\mathbf{x},t)] = d/dt\,[\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega})] \\
&= \boldsymbol{\Theta}_s^{\cdot}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}) \\
&= [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_s](\boldsymbol{\omega}) - [\boldsymbol{\Theta}_s \times \boldsymbol{\omega}](\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}^{\cdot})
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{m}_s = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}^{\cdot})}$$

gültig ist, der *Euler*schen Kreiselgleichung.

Schreiben wir das *Prinzip von d'Alembert in der Lagrangeschen Fassung* (S 11.10) für den starren Körper an, so ergibt sich für alle dynamisch möglichen Bewegungen $\mathbf{x}$ und für alle Vektoren $\delta\mathbf{v}$ und $\delta\boldsymbol{\omega}$, und damit auch für die Massenmittelpunkt-Geschwindigkeit $\mathbf{v}_s$ und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned}
0 &= <\mathbf{k} - \mathbf{i}^{\cdot}, \mathbf{v}_s> + <\mathbf{m}_s - \mathbf{d}_s^{\cdot}, \boldsymbol{\omega}> \\
&= <\mathbf{k}, \mathbf{v}_s> - <\mathbf{b}_s m_s, \mathbf{v}_s> + <\mathbf{m}_s, \boldsymbol{\omega}> - <[\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega})]^{\cdot}, \boldsymbol{\omega}> \\
&= <\mathbf{k}, \mathbf{v}_s> - d/dt\,(\mathbf{v}_s^2 m_s/2) + <\mathbf{m}_s, \boldsymbol{\omega}> - d/dt\,[\tfrac{1}{2} <\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega})>]\,,
\end{aligned}$$

weil

$$<\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Theta}_s^{\cdot}(\boldsymbol{\omega})> = <\boldsymbol{\omega}, (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_s - \boldsymbol{\Theta}_s \times \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega})> = 0$$

oder

$$\boxed{<\mathbf{k}, \mathbf{v}_s> + <\mathbf{m}_s, \boldsymbol{\omega}> - E_{kin}^{\cdot} = 0}$$

die **Leistungsbilanz des starren Körpers** mit der **kinetischen Energie**

$$E_{kin} := \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_s^2 m_s + \tfrac{1}{2}<\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega})>\,.$$

Wegen der speziellen Wahl der beiden Vektoren $\mathbf{v}_s$ und $\boldsymbol{\omega}$ handelt es sich nur um eine notwendige Bedingung für dynamisch mögliche Bewegungen.

11.3 Feldformulierung der Dynamik

Am Anfang dieses Kapitels wurden die wesentlichen dynamischen Geschehensfunktionen wie *Arbeit, Leistung, Kräfte, Momente* als globale Konzepte eingeführt. Wir wollen nun zu einer Feldformulierung übergehen, indem wir die globalen Größen als Integrale über Dichten betrachten, wie es im Abschnitt 10.3 für allgemeine Geschehensfunktionen bereits aufgezeigt wurde. Dazu erzeugen wir zunächst die Feldformulierung der *virtuellen Leistung*, deren Einschränkung auf das Geschwindigkeitsfeld dann nach *(V2)* die Feldformulierung der *Leistung* selbst ergibt.

Wir bezeichnen wie vorher mit δV_ξ die Menge der Vektorfelder auf der Momentanplazierung des Körpers bez. Beobachter ξ mit der Norm $\|\cdot\|^p$ (s. S. 141).

Zur Feldformulierung der virtuellen Leistung gelangt man durch folgenden Satz:

S 11.12: Seien ξ ein Beobachter, B ein Körper und δV_ξ die Menge der virtuellen Geschwindigkeiten aus C^p. Dann gibt es $p+1$ Tensorfelder i-ter Stufe $\mathbf{Y}_{i\xi}$ auf B, so daß für die virtuelle Leistung gilt:

$$\delta L_\xi(\kappa, t, \delta v_\xi)$$
$$= \int_B \Big[\langle \mathbf{Y}_{1\xi}(x), \delta v_\xi(x) \rangle + \langle \mathbf{Y}_{2\xi}(x), \delta v_\xi(x) \otimes \nabla_{e^\xi} \rangle + \dots$$
$$+ \langle \mathbf{Y}_{(p+1)\xi}(x), \delta v_\xi(x) \otimes \nabla_{e^\xi}{}^p \rangle \Big] \, dm$$

Ist B_1 Teilkörper von B, so gilt:
die $\mathbf{Y}_{i\xi}$-Felder für B_1 sind die Einschränkungen der entsprechenden Felder von B.

Die eingeführten Tensorfelder hängen, wie die virtuelle Leistung selbst auch, vom Beobachter ξ und funktional von der Bewegung κ ab. (Um die Schreibweise zu vereinfachen, führen wir das Argument κ allerdings nicht mehr auf.) Sie sind fast überall eindeutig. Mit ihrer Stetigkeit oder gar Differenzierbarkeit ist nicht zu rechnen.

B: Nach Wahl einer Orthogonalbasis $\{e_i\}$ und der zugehörigen kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ stellen wir die Vektorfelder $\delta v_\xi \in \delta V_\xi$ dar als

$$\delta v_\xi(x) = \sum_i v_i(x_1, x_2, x_3)\, e_i$$

durch die Komponentenfunktionen v_i, die in $B_{t\xi}$ aus C^p sind. Wegen der Linearität von $\delta L_\xi(\kappa, t, \cdot)$ gilt

$$\delta L_\xi(\kappa, t, \delta v_\xi) = \sum_i \delta L_\xi(\kappa, t, v_i(x_1, x_2, x_3)\, e_i) =: \sum_i \delta L_i(\kappa, t, v_i(x_1, x_2, x_3)) \; .$$

Da die Skalarfelder δv_ξ aus dem *Sobolev*-Raum $W^{p,1}$ sind, können wir den entsprechenden *Rieszschen* Darstellungssatz für stetige lineare Funktionale auf $\delta L_i(\kappa, t, \cdot)$ anwenden (s. ADAMS, Satz 3.8, S. 48), nach dem es Funktionen $a^i_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ auf $B_{t\xi}$ gibt, so daß

$$\delta L_i(\kappa, t, v_i(x_1, x_2, x_3)) = \sum_\alpha \int_B a^i_\alpha(x_1, x_2, x_3)\, D^\alpha v_i(x_1, x_2, x_3)\, dm$$

ist. Dabei sind α Multiindizes (k, l, m) mit $(k+l+m) \le p$, und der Differentialoperator

$$D^\alpha := \partial^{k+l+m} / \partial x_1{}^k \partial x_2{}^l \partial x_3{}^m \; .$$

Durch geeignetes Erweitern dieser Ausdrücke gelangt man zur Darstellung des Satzes, wobei sich die Tensorfelder $\mathbf{Y}_{i\xi}$ aus den a^i_α berechnen lassen. Wir wollen dies für den Fall $p=2$ ausschreiben. Wir erhalten als Integrand in diesem Fall

$$a^i_{000}\, v_i + a^i_{100}\, \partial v_i/\partial x_1 + a^i_{010}\, \partial v_i/\partial x_2 + a^i_{001}\, \partial v_i/\partial x_3$$
$$+ a^i_{200}\, \partial v_i^2/\partial x_1{}^2 + a^i_{020}\, \partial v_i^2/\partial x_2{}^2 + a^i_{002}\, \partial v_i^2/\partial x_3{}^2$$
$$+ a^i_{110}\, \partial v_i^2/\partial x_1 \partial x_2 + a^i_{011}\, \partial v_i^2/\partial x_2 \partial x_3 + a^i_{101}\, \partial v_i^2/\partial x_3 \partial x_1 \, .$$

Setzt man (Summe über i)

$$\mathbf{Y}_{1\xi} := a^i_{000}\, e_i$$
$$\mathbf{Y}_{2\xi} := a^i_{100}\, e_i \otimes e_1 + a^i_{010}\, e_i \otimes e_2 + a^i_{001}\, e_i \otimes e_3$$
$$\mathbf{Y}_{3\xi} := a^i_{200}\, e_i \otimes e_1 \otimes e_1 + a^i_{020}\, e_i \otimes e_2 \otimes e_2 + a^i_{002}\, e_i \otimes e_3 \otimes e_3$$
$$+ a^i_{110}\, e_i \otimes e_1 \otimes e_2 + a^i_{011}\, e_i \otimes e_2 \otimes e_3 + a^i_{101}\, e_i \otimes e_3 \otimes e_1 \; ,$$

so führt dies auf die Darstellung mittels innerer Produkte auf den entsprechenden Tensorräumen. Dieses Verfahren läßt sich problemlos auf die Fälle $p>2$ verallgemeinern, was hier aus Platzgründen unterbleiben soll.
Die Einschränkungen auf Teilkörper folgen aus der σ-Additivität der virtuellen Leistung. ⊠

Der Ausdruck in eckigen Klammern im vorigen Satz stellt die **spezifische virtuelle Leistung** dar:

$$\delta l_{e\zeta}(\kappa, t, \delta v_\zeta(x)) := \langle Y_{j\zeta}(x), \delta v_\zeta(x)\rangle + \langle Y_{g\zeta}(x), \delta v_\zeta(x)\otimes\nabla_{g\zeta}\rangle + \dots + \langle Y_{(p+1)\zeta}(x), \delta v_\zeta(x)\otimes\nabla_{g\zeta}{}^p\rangle .$$

Setzt man für die virtuelle Geschwindigkeit die Geschwindigkeit selbst ein, so erhält man die Leistung. Somit können wir den Integranden unserer Darstellung fast überall als **spezifische Leistung** identifizieren:

$$l_{e\zeta}(\kappa, t, x) = \langle Y_{j\zeta}(x), v_\zeta(x)\rangle + \langle Y_{g\zeta}(x), v_\zeta(x)\otimes\nabla_{g\zeta}\rangle + \dots + \langle Y_{(p+1)\zeta}(x), v_\zeta(x)\otimes\nabla_{g\zeta}{}^p\rangle ,$$

so daß

$$L_\zeta(\kappa, t) = \int_B l_{e\zeta}(\kappa, t, x)\, dm .$$

Wir konstatieren sofort folgenden Satz:

S 11.13: Eine Bewegung $\kappa \in \Pi$ ist genau dann dynamisch möglich, falls die spezifische Leistung in der intrinsischen Darstellung entlang κ fast überall objektiv (oder invariant) ist, d. h.

$$l_\xi(\kappa, t, X) = l_\zeta(\kappa, t, X) \qquad \forall\, X \in B$$

für beliebige Beobachter ξ und ζ.

Wir haben die intrinsische Darstellung gewählt, um das Ortsargument nicht transformieren zu müssen. Der Satz gilt natürlich auch entprechend in jeder anderen Darstellungweise.

Im allgemeinen sind die Felder $Y_{j\xi}, Y_{g\xi}, Y_{g\xi}, \dots, Y_{(p+1)\xi}$ Bewegungsfunktionale wie schon die Leistung und die virtuelle Leistung. Das bedeutet für die Feldgrößen, daß ihr Wert in einem Punkte $x \in B_{R\xi}$ oder in intrinsischer Darstellung in $X \in B$ von der *gesamten* vergangenen Bewegung des *gesamten* Körpers abhängen kann. Wir können allerdings ausschließen, daß X auf dem Rand des Körpers liegt, da der Rand eine Menge vom Maß 0 ist. Da wir aber beliebig kleine Teilkörper $\underline{B}$ von B definieren können, für die dieselbe Aussage gilt, läßt sich der Einfluß der Bewegung auf die betrachteten Größen auf eine beliebig kleine Umgebung von X reduzieren. *Umgebung* soll hier im topologischen Sinne eine beliebige Menge bedeuten, die X als inneren Punkt enthält.

S 11.14: Prinzip der lokalen Wirkung
Bei der Bestimmung der Feldgrößen $Y_{j\xi}, Y_{g\xi}, Y_{g\xi}, \dots, Y_{(p+1)\xi}$ an einer Stelle $X \in B$ bleibt die Bewegung von Punkten außerhalb einer beliebigen Umgebung von X ohne Einfluß.

Das schließt jedoch nicht aus, daß Deformations- oder Geschwindigkeitsgradienten beliebiger Ordnung an der Stelle X in die Funktionale eingehen, sofern die Bewegung von der entsprechenden Differenzierbarkeitsklasse ist. Solche Materialien wurden von TROSTEL (1985 II, 1988), SILBER, ALEXANDRU u.a. untersucht.

Für $i = 1$ ist $Y_{j\xi}$ Vektorfeld, für $i = 2$ Tensorfeld, das sich mit dem Tensorfeld des virtuellen Geschwindigkeitsgradienten $\delta L_\xi := \delta v_\xi \otimes \nabla_{g\xi}$ zu einem skalaren Feld paart. Zerlegen wir δL_ξ und $Y_{g\xi}$ punktweise in ihre symmetrischen und antimetrischen Anteile, so gilt mit

$$\delta D_\xi := \tfrac{1}{2}(\delta L_\xi + \delta L_\xi{}^*) \qquad \in Sym(V,V)$$

$$\delta \Omega_\xi := \tfrac{1}{2}(\delta L_\xi - \delta L_\xi{}^*) \qquad \in Skw(V,V)$$

$$\delta \omega_\xi := \tfrac{1}{2}\, axi(\delta\Omega_\xi) = -\tfrac{1}{2}\, rot\, \delta v_\xi \qquad \in V,$$

so daß

$$\delta L_\xi = \delta D_\xi + \delta \Omega_\xi \qquad \in Lin(V,V),$$

und analog

$$Y^s{}_\xi := \tfrac{1}{2}(Y_{g\xi} + Y_{g\xi}{}^*) \qquad \in Sym(V,V),$$

$$Y^a{}_\xi := \tfrac{1}{2}(Y_{g\xi} - Y_{g\xi}{}^*) \qquad \in Skw(V,V),$$

so daß

$$Y_{g\xi} = Y^s{}_\xi + Y^a{}_\xi \qquad \in Lin(V,V),$$

sowie

$$m^a{}_\xi := axi(Y_{g\xi}) \qquad \in V,$$

genannt **spezifisches freies Moment** (was auf S. 158 motiviert wird). Damit erhält man schließlich

$$\langle Y_{g\xi}, \delta v_\xi \otimes \nabla_{g\xi}\rangle = \langle Y^s{}_\xi, \delta D_\xi\rangle + \langle m^a{}_\xi, \delta\omega_\xi\rangle .$$

Wir wollen aus Gründen, die ebenfalls später klar werden, das Feld $Y_{j\xi}$ in $f^a{}_\xi$ umbenennen, der **spezifischen verlorenen Kraft**. Damit erhalten wir für die virtuelle Leistung

$$\delta L_\xi = \int_B \left[\langle f^a{}_\xi, \delta v_\xi\rangle + \langle m^a{}_\xi, \delta\omega_\xi\rangle + \langle Y^s{}_\xi, \delta D_\xi\rangle + \dots + \langle Y_{(p+1)\xi}, \delta v_\xi \otimes \nabla_{g\xi}{}^p\rangle\right] dm .$$

S 11.15: Die durch eine virtuelle Leistung δL_ξ induzierten Felder f^o_ξ, $Y_{1\xi}$, Y'_ξ, Y''_ξ, m^o_ξ, $Y_{2\xi}$, ... , $Y_{(p+1)\xi}$ sind fast überall objektiv.

B: Wenn wir die virtuellen Geschwindigkeitsfelder wie Geschwindigkeiten gem. (*V3*) transformieren, ergeben sich für den Wechsel zweier Beobachter ζ und ξ mit $\delta v_\xi \in \delta V_\xi$ (s. S. 128 f)

$$\delta v_\zeta = Q_\zeta(\delta v_\xi) + w_\zeta \times (r_\zeta - a_\zeta) + a_\zeta^{\cdot}$$
$$\delta\omega_\zeta = Q_\zeta(\delta\omega_\xi) + w_\zeta$$
$$\delta D_\zeta = Q_\zeta\, \delta D_\xi\, Q_\zeta^{*},$$

und die höheren Gradienten sind alle objektiv. Bilden wir nun gem. (*V3*) die Differenz der Leistungen, so muß für alle $\delta v_\xi \in \delta V_\xi$ gelten

$$\begin{aligned} L_\zeta(\kappa, t) - L_\xi(\kappa, t) &= \delta L_\zeta(\kappa, t, \delta v_\zeta) - \delta L_\xi(\kappa, t, \delta v_\xi) \\ &= \int_B \big[\langle f^o_\zeta , w_\zeta \times (r_\zeta - a_\zeta) + a_\zeta^{\cdot} \rangle + \langle m^o_\zeta , w_\zeta \rangle + \langle f^o_\zeta , Q_\zeta(\delta v_\zeta) \rangle \\ &\quad + \langle Y'_\zeta , Q_\zeta\, \delta D_\xi\, Q_\zeta^{*} \rangle + \langle m^o_\zeta , Q_\zeta(\delta\omega_\xi) \rangle + \ldots + \langle Y_{(p+1)\zeta} , \delta v_\zeta \otimes \nabla_{e^\zeta}{}^p \rangle \\ &\quad - \langle f^o_\xi , \delta v_\xi \rangle + \langle Y'_\xi , \delta D_\xi \rangle + \langle m^o_\xi , \delta\omega_\xi \rangle + \ldots + \langle Y_{(p+1)\xi} , \delta v_\xi \otimes \nabla_{e^\xi}{}^p \rangle \big]\, dm . \end{aligned}$$

Wählt man für δv_ξ das Nullfeld, so verbleiben nur die ersten beiden Terme der rechten Seite, die allein die Gleichung befriedigen müssen. Wählt man als nächstes ein beliebiges konstantes Feld für δv_ξ, so ist

$$0 = \int_B [\langle f^o_\zeta , Q_\zeta(\delta v_\xi(t)) \rangle - \langle f^o_\xi , \delta v_\xi \rangle]\, dm ,$$

was überall gelten muß. Damit folgt fast überall die Objektivität von f^o_ξ. Durch Wahl geeigneter Felder für δv_ξ, für die die höheren Gradienten Null sind, kann man ebenso sukzessive die Objektivität aller anderen Felder $Y_{i\xi}$, $i \le p+1$ folgern. ⊠

Demnach haben die Felder Y'_ξ, $Y_{2\xi}$, ... , $Y_{(p+1)\xi}$ keinen Einfluß auf die Entscheidung, ob die Leistung objektiv und die Bewegung damit dynamisch möglich ist. Wir werden sie deshalb im folgenden weglassen und betrachten nur noch die verkürzte Version

$$\delta L_\xi = \int_B \big[\langle f^o_\xi , \delta v_\xi \rangle + \langle m^o_\xi , \delta\omega_\xi \rangle \big]\, dm$$

und für den Spezialfall $\delta v_\xi = v_\xi$ und $\delta\omega_\xi = \omega_\xi$ die Leistung

$$L_\xi = \int_B \big[\langle f^o_\xi , v_\xi \rangle + \langle m^o_\xi , \omega_\xi \rangle \big]\, dm ,$$

ohne für die reduzierten Funktionale neue Bezeichnungsweisen einzuführen.

Die verlorene Kraft und das verlorene Moment sind gemäß ihrer Definition diejenigen Bestandteile der virtuellen Leistung, die bei einer Starrkörper-modifikation der Geschwindigkeiten

$$\delta v_\xi(t, r_\xi) = \omega \times r_\xi + v_o$$

an v_o bzw. ω Arbeit leisten gemäß

$$\begin{aligned} \delta L_\xi(\kappa, t, \omega \times r_\xi + v_o) &= \langle f_\xi , v_o \rangle + \langle e_{o\xi} , \omega \rangle \\ &= \int_B \langle f^o_\xi , \omega \times r_\xi + v_o \rangle\, dm + \int_B \langle m^o_\xi , \omega \rangle\, dm \\ &= \langle \int_B f^o_\xi\, dm , v_o \rangle + \langle \int_B (m^o_\xi + r_\xi \times f^o_\xi)\, dm , \omega \rangle . \end{aligned}$$

Damit folgen wegen der Beliebigkeit der Vektoren v_o und ω die Integraldarstellungen für:

- die verlorene Kraft:
  $$f_\xi = \int_B f^o_\xi\, dm ;$$
- das verlorene Moment bez. $o_\xi \in E^3$:
  $$e_{o\xi} = \int_B (m^o_\xi + r_\xi \times f^o_\xi)\, dm ;$$
- die Kraft:
  $$k_\xi := f_\xi + l_\xi^{\cdot} = \int_B (f^o_\xi + b_\xi)\, dm =: \int_B k^o_\xi\, dm ;$$
- das Moment bez. $o_\xi \in E^3$:
  $$\begin{aligned} m_{o\xi} &:= e_{o\xi} + d_{o\xi}^{\cdot} \\ &= \int_B (m^o_\xi + r_\xi \times (f^o_\xi + b_\xi))\, dm = \int_B (m^o_\xi + r_\xi \times k^o_\xi)\, dm ; \end{aligned}$$

mit der spezifischen verlorenen Kraft

$$f^o_\xi := Y_{1\xi} ,$$

der **spezifischen Kraft**

$$\mathbf{k}^{o}{}_{\xi} := \mathbf{f}^{o}{}_{\xi} + \mathbf{b}_{\xi}$$

und dem **spezifischen freien Moment**

$$\mathbf{m}^{o}{}_{\xi} := \alpha xi(\mathbf{Y}_{\mu\xi}) ,$$

das nicht vom BZP abhängt (deswegen "frei").

S 11.16: Transformationen der lokalen dynamischen Größen bei Beobachterwechseln

Seien ξ und ζ zwei Beobachter und o_ξ und o_ζ zwei derart gewählte BZPe, daß

$$\xi_t^{-1}(o_\xi) = \zeta_t^{-1}(o_\zeta)$$

momentan ist. Dann gilt für die durch eine virtuelle Leistung induzierten spezifischen dynamischen Größen:

1) die *spez. verlorene Kraft* ist objektiv:

$$\mathbf{f}^{o}{}_{\zeta} = \mathbf{Q}_t(\mathbf{f}^{o}{}_{\xi}) \;;$$

2) das *spez. freie Moment* ist objektiv:

$$\mathbf{m}^{o}{}_{\zeta} = \mathbf{Q}_t(\mathbf{m}^{o}{}_{\xi}) \;;$$

3) die *spez. Kraft* ist *nicht* objektiv (nur unter *Galilei*-Transformationen):

$$\mathbf{k}^{o}{}_{\zeta} = \mathbf{Q}_t(\mathbf{k}^{o}{}_{\xi}) + \mathbf{e}_t$$

mit

$$\mathbf{e}_t := \mathbf{a}_t'' + \mathbf{w}_t' \times \mathbf{r}_\zeta + 2\,\mathbf{w}_t \times (\mathbf{v}_\zeta - \mathbf{a}_t') + \mathbf{w}_t \times (\mathbf{w}_t \times \mathbf{r}_\zeta) .$$

B: (1) und (2) folgt sofort aus den Objektivitäts-Befunden des vorigen Satzes, der Rest durch Einsetzen der spezifischen dynamischen Größen im **S 11.9** und Vergleich der Integranden. ⊠

S 11.17: Die durch verschiedene virtuelle Leistungen induzierten dynamischen Größen sind eindeutig, d.h. sind δL_{ξ_i} und δL_{ξ_e} virtuelle Leistungen, so sind die induzierten dynamischen Größen $\mathbf{f}^{o}{}_{\xi}$, $\mathbf{k}^{o}{}_{\xi}$, $\mathbf{f}_{\xi}$, $\mathbf{k}_{\xi}$, $\mathbf{e}_{o\xi}$, $\mathbf{m}^{o}{}_{\xi}$, $\mathbf{m}_{o\xi}$ überall entlang jeder Bewegung $\kappa \in \Pi$ gleich.

B: Wir setzen δL_{ξ_i} und δL_{ξ_e} wie auf S. 157 in (*V3*) ein und erhalten mit der Objektivität der Felder $\mathbf{f}^{o}{}_{\xi}, \mathbf{Y}_{\mu\xi}, \mathbf{Y}^{i}{}_{\xi}, \mathbf{Y}^{e}{}_{\xi}, \mathbf{m}^{o}{}_{\xi}, \mathbf{Y}_{\mu\xi}, \ldots, \mathbf{Y}_{\omega+1\xi}$

$$\begin{aligned} & \int_B \left[<\mathbf{f}^{o}{}_{\xi_i}, \mathbf{Q}_t^*(\mathbf{w}_t \times (\mathbf{r}_\zeta - \mathbf{a}_t) + \mathbf{a}_t') > + <\mathbf{m}^{o}{}_{\xi_i}, \mathbf{Q}_t^*(\mathbf{w}_t) > \right] dm \\ = & \int_B \left[<\mathbf{f}^{o}{}_{\xi_e}, \mathbf{Q}_t^*(\mathbf{w}_t \times (\mathbf{r}_\zeta - \mathbf{a}_t) + \mathbf{a}_t') > + <\mathbf{m}^{o}{}_{\xi_e}, \mathbf{Q}_t^*(\mathbf{w}_t) > \right] dm \end{aligned}$$

für beliebige *Euklid*ische Transformationen, und damit für beliebige $\mathbf{w}_t, \mathbf{a}_t' \in V$. Daraus folgen

$$\mathbf{f}^{o}{}_{\xi_i} = \mathbf{f}^{o}{}_{\xi_e} \quad \text{und} \quad \mathbf{m}^{o}{}_{\xi_i} = \mathbf{m}^{o}{}_{\xi_e} .$$

Damit sind auch alle anderen induzierten dynamischen Größen gleich. ⊠

S 11.18: Die folgenden Bedingungen sind äquivalent für jede dynamisch mögliche Bewegung:

1) Die Bewegung ist **dynamisch möglich.**

2) lokale Version des **Prinzips von *d'Alembert***
Die spezifischen verlorenen Kräfte und freien Momente sind überall entlang der Bewegung im Gleichgewicht für einen/alle Beobachter

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{f}^{o}{}_{\xi} &= \mathbf{o} \\ \mathbf{m}^{o}{}_{\xi} &= \mathbf{o} \end{aligned}}$$

3) Der **lokale Impulssatz** und der **lokale Drallsatz**

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{k}^{o}{}_{\xi} &= \mathbf{b}_{\xi} \\ \mathbf{m}^{o}{}_{\xi} + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^{o}{}_{\xi} &= \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{b}_{\xi} \end{aligned}}$$

gelten für einen/ alle Beobachter bez. eines/ aller BZP überall entlang der Bewegung.

4) Die **lokale Leistungsbilanz**
gilt für *alle* Beobachter bez. eines/aller BZP überall entlang der Bewegung:

$$\boxed{l_\xi = \langle \mathbf{k}^o_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle + \langle \mathbf{m}^o_\xi , \boldsymbol{\omega}_\xi \rangle - \tfrac{1}{2}\langle \mathbf{v}_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle^{\cdot} = 0}$$

B: Aus der globalen Version des Prinzips von *d'Alembert* bzw. von Impuls- und Drallsatz (s. S 11.10) folgen wegen der Beliebigkeit der Integrationsgebiete sofort die lokalen Versionen. Die Umkehrung ist trivial.

"(2) ⇒ (4)": Es gelten

$$\mathbf{f}^o_\xi = \mathbf{o} = \mathbf{k}^o_\xi - \mathbf{b}_\xi \quad \text{und} \quad \mathbf{m}^o_\xi = \mathbf{o}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \mathbf{k}^o_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle + \langle \mathbf{m}^o_\xi , \boldsymbol{\omega}_\xi \rangle = \langle \mathbf{b}_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle = \tfrac{1}{2}\langle \mathbf{v}_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle^{\cdot} .$$

"(4) ⇒ (2)":
Gilt letztere Gleichung für alle Beobachter, so können wir transformieren mit dem vorigen Satz

$$0 = \langle \mathbf{f}^o_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle + \langle \mathbf{m}^o_\xi , \boldsymbol{\omega}_\xi \rangle$$

$$= \langle \mathbf{Q}_t(\mathbf{f}^o_\xi) , \mathbf{Q}_t(\mathbf{v}_\xi) + \mathbf{w}_t \times (\mathbf{r}_\xi - \mathbf{a}_t) + \mathbf{a}_t^{\cdot} \rangle + \langle \mathbf{Q}_t(\mathbf{m}^o_\xi) , \mathbf{Q}_t(\boldsymbol{\omega}_\xi) + \mathbf{w}_t \rangle$$

$$= \langle \mathbf{f}^o_\xi , \mathbf{v}_\xi \rangle + \langle \mathbf{m}^o_\xi , \boldsymbol{\omega}_\xi \rangle + \langle \mathbf{f}^o_\xi , \mathbf{Q}_t^*(\mathbf{w}_t \times (\mathbf{r}_\xi - \mathbf{a}_t) + \mathbf{a}_t^{\cdot}) \rangle + \langle \mathbf{m}^o_\xi , \mathbf{Q}_t^*(\mathbf{w}_t) \rangle .$$

Die ersten beiden Ausdrücke nach dem zweiten Gleichheitszeichen sind voraussetzungsgemäß Null. Wegen der Beliebigkeit von $\mathbf{Q}_t$, $\mathbf{w}_t$, $\mathbf{a}_t$ und $\mathbf{a}_t^{\cdot}$ müssen $\mathbf{f}^o_\xi = \mathbf{o}$ und $\mathbf{m}^o_\xi = \mathbf{o}$ gelten. ☒

11.4 Spannungsanalyse

Im Lichte des letzten Satzes ist unsere Aufgabenstellung, zwischen dynamisch möglichen und unmöglichen Bewegungen zu unterscheiden, gelöst, wenn wir einen der folgenden Funktional-Sets überall entlang den Bewegungen kennen:

1) die *Leistung* $L_\xi(\mathbf{x}, t)$ oder die spezifische Leistung $l_\xi(\mathbf{x}, t, x)$ für alle Beobachter;

2) eine *virtuelle Leistung* $\delta L_\xi(\mathbf{x}, t, \delta\mathbf{v}_\xi)$ für einen Beobachter;

3) die *verlorene Kraft* $\mathbf{f}_\xi$ und das *verlorene Moment* $\mathbf{c}_{o\xi}$ für einen BZP und einen Beobachter;

4) die *Kraft* $\mathbf{k}_\xi$ und das *Moment* $\mathbf{m}_{o\xi}$ für einen BZP und einen Beobachter;

5) das Feld der *spez. verlorenen Kraft* $\mathbf{f}^o_\xi$ und des *spez. freien Momentes* $\mathbf{m}^o_\xi$ für einen Beobachter;

6) das Feld der *spez. Kraft* $\mathbf{k}^o_\xi$ und des *spez. freien Momentes* $\mathbf{m}^o_\xi$ für einen Beobachter.

In der Literatur ist die letzte Alternative am meisten verbreitet, und wir werden uns im Rest dieser Arbeit im wesentlichen darauf konzentrieren, diese beiden Felder genauer zu klassifizieren und darzustellen. Da es sich um lokale Größen handelt, können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit darauf beschränken, $\mathbf{k}^o_\xi$ und $\mathbf{m}^o_\xi$ für *einen* (beliebigen) Körperpunkt X zu bestimmen, also lediglich *lokale Betrachtungen* anzustellen. Dabei wollen wir ausschließen, daß sich X auf dem Rand ∂B des betrachteten Körpers befindet. Da der Rand als Nullmenge masselos ist, gelten unsere Aussagen trotzdem noch fast überall.

Bisher hängen die beiden betrachteten Vektorfelder möglicherweise noch auf funktionale Weise von der ganzen Bewegung $\mathbf{x} \in \Pi$ ab. Dies ist eine sehr allgemeine Bestimmung, die noch erheblich konkretisiert werden muß, um zu einer anwendbaren Theorie zu gelangen.

Es ist üblich, wenn auch nicht völlig unumstritten (s. die Diskussion am Ende dieses Kapitels), die beiden Felder bezüglich ihrer räumlichen Abhängigkeiten additiv in zwei Teile zu zerlegen, nämlich in je

- einen **Nahwirkungs-Anteil**, der sich bei beliebigen Starrkörpermodifikationen lediglich mitdreht, so daß die intrinsischen Versionen invariant sind, und
- einen **Fernwirkungs-Anteil**, der deformations-invariant ist.

Wir konkretisieren dies in der folgenden Annahme, die nicht als ein allgemeingültiges Naturgesetz zu verstehen ist, sondern vielmehr als eine

Einschränkung auf eine spezielle Körperklasse, die freilich immer noch sehr umfassend ist und fast alle bekannten Materialtheorien einschließt.

A 11.19: Die spez. Kraft $\mathbf{k}^o{}_\xi$ und das spez. freie Moment $\mathbf{m}^o{}_\xi$ bez. eines beliebigen Beobachters ξ setzen sich additiv zusammen aus je zwei Feldern

$$\mathbf{k}^o{}_\xi = \mathbf{k}^n{}_\xi + \mathbf{k}^f{}_\xi$$

$$\mathbf{m}^o{}_\xi = \mathbf{m}^n{}_\xi + \mathbf{m}^f{}_\xi ,$$

so daß

1) die intrinsischen Versionen der n-Felder

$$\mathbf{K}_X^{-1}(\mathbf{k}^n{}_\xi) \qquad \in T_X B$$

und

$$\mathbf{K}_X^{-1}(\mathbf{m}^n{}_\xi) \qquad \in T_X B$$

invariant gegen Starrkörpermodifikationen sind;

2) die f-Felder *deformations-invariant* sind.

Die wichtigste Fernwirkungskraft(-dichte) ist die *Gravitation*, die bei technischen Problemen auf der Erdoberfläche für erdfeste Beobachter meist konstant angesetzt wird (*Gravitationskonstante*).

Es ist üblich, wenn auch keineswegs zwingend, die Nahwirkungsanteile in modifizierter Form als Divergenzen von Tensorfeldern darzustellen, was nach dem Fundamental-Lemma der Potentialtheorie (s. S 5.3, s. a. BRUNK 1972) immer möglich ist:

$$\rho_K \, \mathbf{k}^n{}_\xi =: div(\mathbf{T}_\xi)$$

$$\rho_K \, \mathbf{m}^n{}_\xi - axi(\mathbf{T}_\xi) =: div(\mathbf{M}_\xi)$$

mit
dem (*Euler-Cauchy*schen) **Kraft-Spannungs-Tensor** $\mathbf{T}_\xi \in Lin(V,V)$
und dem **Momenten-Spannungs-Tensor** $\mathbf{M}_\xi \in Lin(V,V)$.

Diese beiden Felder sind nach dem Fundamental-Lemma nicht eindeutig gegeben, können aber durch Angabe von Randwerten der Spannungen schließlich determiniert werden. Die Nicht-Eindeutigkeit sollen uns im übrigen nicht stören, da sie für die Unterscheidbarkeit in dynamisch mögliche und unmögliche Bewegungen irrelevant ist.

Für die Nah- und Fernfelder wie auch für beide Spannungs-Tensorfelder gilt das *Prinzip der lokalen Wirkung* (S 11.14) sinngemäß, für die Fernfelder sogar in einer verschärften Form, da nur die Bewegung des Fußpunktes selbst eingeht.

Man beachte, daß die beiden Spannungs-Tensor-Felder nicht von einem BZP abhängen, jedoch vom Beobachter, was im folgenden konkretisiert werden soll.

S 11.20: **Transformationen der dynamischen Größen bei Beobachterwechsel**
Seien ξ und ζ zwei Beobachter und o_ξ und o_ζ zwei derart gewählte BZPe, daß momentan

$$\xi_{o_\xi}^{-1}(o_\xi) = \zeta_{o_\zeta}^{-1}(o_\zeta)$$

ist. Dann gilt:
Die *Spannungstensoren* sind objektiv:

a) $\mathbf{T}_\zeta = \mathbf{Q}_{\xi\zeta} \, \mathbf{T}_\xi \, \mathbf{Q}_{\xi\zeta}^*$

b) $\mathbf{M}_\zeta = \mathbf{Q}_{\xi\zeta} \, \mathbf{M}_\xi \, \mathbf{Q}_{\xi\zeta}^*$,

wie auch die *Nah-Kräfte* und *Nah-Momente* und *Fern-Momente*:

c) $\mathbf{k}^n{}_\zeta = \mathbf{Q}_{\xi\zeta}(\mathbf{k}^n{}_\xi)$

d) $\mathbf{m}^n{}_\zeta = \mathbf{Q}_{\xi\zeta}(\mathbf{m}^n{}_\xi)$

e) $\mathbf{m}^f{}_\zeta = \mathbf{Q}_{\xi\zeta}(\mathbf{m}^f{}_\xi)$,

während die *Fern-Kräfte nicht* objektiv sind (lediglich unter *Galilei*-Transformationen):

f) $\mathbf{k}^f{}_\zeta = \mathbf{Q}_{\xi\zeta}(\mathbf{k}^f{}_\xi) + \mathbf{e}_{\xi\zeta}$.

Die Objektivität der Spannungstensoren wird in der Literatur als **Prinzip der materiellen Objektivität** bezeichnet. Sie darf nicht verwechselt werden mit der Forderung nach Invarianz unter Starrkörpermodifikationen, die physikalisch ein ganz anderes Phänomen darstellt.

B: Wir setzen die n- und f-Felder in die Transformationen von **S 11.9** ein und erhalten mit den Dichten von S. 157 f

$$\int_B \mathbf{k}^n{}_\zeta \, dm + \int_B \mathbf{k}^f{}_\zeta \, dm = \int_B \mathbf{Q}_{\xi\zeta}(\mathbf{k}^n{}_\xi) \, dm + \int_B \mathbf{Q}_{\xi\zeta}(\mathbf{k}^f{}_\xi) \, dm + \int_B \mathbf{e}_{\xi\zeta} \, dm$$

$$\begin{aligned}
&\int_B m^n{}_\zeta \, dm + \int_B r_\zeta \times k^n{}_\zeta \, dm + \int_B m^f{}_\zeta \, dm + \int_B r_\zeta \times k^f{}_\zeta \, dm \\
&= \int_B Q_t(m^n{}_\xi) \, dm + \int_B Q_t(r_\xi \times k^n{}_\xi) \, dm \\
&\quad + \int_B Q_t(m^f{}_\xi) \, dm + \int_B Q_t(r_\xi \times k^f{}_\xi) \, dm + \int_B r_\zeta \times e_t \, dm \\
&= \int_B Q_t(m^n{}_\xi) \, dm + \int_B Q_t(r_\xi) \times Q_t(k^n{}_\xi) \, dm \\
&+ \int_B Q_t(m^f{}_\xi) \, dm + \int_B Q_t(r_\xi) \times Q_t(k^f{}_\xi) \, dm + \int_B r_\zeta \times e_t \, dm .
\end{aligned}$$

Wegen der unterschiedlichen Abhängigkeiten müssen die n- und die f-Felder für sich überall gleich sein. Dabei ist e_t deformations-invariant, aber $K_X^{-1}(e_t)$ nicht invariant gegen Starrkörpermodifikationen, und gehört deshalb zu den f-Feldern. Damit folgen aus der ersten Gleichung die Beziehungen (c) bis (f). Aus der speziellen Wahl der BZPe folgt $v_\zeta = Q_t(v_\xi)$ und damit (d) und (e) aus der zweiten Gleichung. Mit den Transformationen von Nabla (s. S. 128)

$$\nabla_{e\xi} = Q_t^*(\nabla_{et})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\rho_\kappa k^n{}_\zeta = div_\zeta(T_\zeta) &= T_\zeta(\nabla_{e\zeta}) = Q_t(\rho_\kappa k^n{}_\xi) = Q_t(div_\xi(T_\xi)) = Q_t(T_\xi(\nabla_{e\xi})) \\
&= Q_t \, T_\xi \, Q_t^* \, (\nabla_{et}) \qquad \Rightarrow \qquad \text{(a)}.
\end{aligned}$$

Mit T ist auch dessen antimetrischer Anteil objektiv und somit

$$axi(T_\zeta) = Q_t(axi(T_\xi)) .$$

Also ist auch $div_\zeta(M_\zeta)$ objektiv und damit M_ζ selbst auch ⇒ (b). ⊠

Auf NOLL (1972) geht der Vorschlag zurück, intrinsische Spannungs-Tensoren zu definieren, und zwar den **intrinsischen Kraft-Spannungs-Tensor**

$$S_\xi := K_\xi^{-1} \, T_\xi \, K_\xi^{-*} \quad \in Lin(T_X{}^*B, T_XB)$$

und den **intrinsischen Momenten-Spannungs-Tensor**

$$N_\xi := K_\xi^{-1} \, M_\xi \, K_\xi^{-*} \quad \in Lin(T_X{}^*B, T_XB) \quad .$$

Sie haben die beiden wichtigen Invarianz-Eigenschaften:

S 11.21: Die intrinsischen Spannungstensoren S und N sind

a) *Euklid*isch-invariant

$$S_\xi(\xi\kappa, t, X) = S_\zeta(\zeta\kappa, t, X)$$
$$N_\xi(\xi\kappa, t, X) = N_\zeta(\zeta\kappa, t, X)$$

und

b) invariant gegen Starrkörpermodifikationen

$$S_\xi(\kappa_\xi, t, X) = S_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X)$$
$$N_\xi(\kappa_\xi, t, X) = N_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X) .$$

B: a) folgt aus der Objektivität von T und M und der Transformation (s. S. 127) $K_\zeta = Q_t \, K_\xi$:

$$S_\zeta := K_\zeta^{-1} \, T_\zeta \, K_\zeta^{-*} = K_\xi^{-1} \, Q_t^* \, Q_t \, T_\xi \, Q_t^* \, Q_t \, K_\xi^{-*} = S_\xi$$

und für N völlig analog.

b) folgern wir aus der Invarianz gegen Starrkörpermodifikationen von

$$K^{-1}(k^n{}_\zeta).$$

Das bedeutet für alle $\kappa_\xi \in \Pi_\xi$ und alle Starrkörpermodifikationen α mit $R := \alpha_* \in Ort^+(V)$ (s. S. 123)

$$\begin{aligned}
K_1^{-1}(k^n{}_\zeta(\kappa_\xi, t, X)) &= K_2^{-1}(k^n{}_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X)) \\
= K_1^{-1}(1/\rho_\kappa \; div_1 \, T_\xi(\kappa_\xi, t, X)) &= K_1^{-1} \, R^*(1/\rho_{\alpha\kappa} \; div_2 \, T_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X)) \\
= K_1^{-1}(1/\rho_\kappa \; T_\xi(\kappa_\xi, t, X)(\nabla_{e_1})) &= K_1^{-1} \, R^*(1/\rho_{\alpha\kappa} \; T_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X)(\nabla_{e_2})) \\
&= K_1^{-1} \, R^*(1/\rho_\kappa \; T_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X) \; R(\nabla_{e_1}))
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad T_\xi(\kappa_\xi, t, X) = R^* \, T_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X) \; R$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad S_\xi(\kappa_\xi, t, X) &= K_1^{-1} \, T_\xi(\kappa_\xi, t, X) \; K_1^{-*} \\
&= K_1^{-1} \; R^* \; R \, T_\xi(\kappa_\xi, t, X) \, R^* \; R \; K_1^{-*} \\
&= K_2^{-1} \, T_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X) \; K_2^{-*} \\
&= S_\xi(\alpha\,\kappa_\xi, t, X) \quad .
\end{aligned}$$

Für N erfolgt der Beweis völlig analog. ⊠

Eine Folgerung aus dem vorherigen Satz ist das folgende Prinzip, daß analog von EINSTEIN in der Relativitätstheorie als *Relativitätsprinzip* formulierte wurde.

S 11.22: **Prinzip der Forminvarianz**

Die Bewegungsfunktionale $\mathbb{S}$ und $\mathbb{N}$ sind für alle Beobachter gleich:

$$\mathbb{S}_\zeta(\cdot,\cdot\,,X) = \mathbb{S}_\xi(\cdot,\cdot\,,X) \qquad \forall\, X \in \mathcal{B}\,,$$

$$\mathbb{N}_\zeta(\cdot,\cdot\,,X) = \mathbb{N}_\xi(\cdot,\cdot\,,X) \qquad \forall\, X \in \mathcal{B}\,.$$

B: Aus der *Euklid*ischen Invarianz folgt

$$\mathbb{S}_\xi(\kappa_\xi, t, X) = \mathbb{S}_\zeta(\kappa_\zeta, t, X) = \mathbb{S}_\zeta(\zeta\,\kappa, t, X) = \mathbb{S}_\zeta(\zeta\,\xi^{-1}\,\xi\,\kappa, t, X) = \mathbb{S}_\zeta(\zeta\,\xi^{-1}\,\kappa_\xi, t, X)\,,$$

und da $\zeta\,\xi^{-1}$ eine Starrkörpermodifikation ist, folgt

$$= \mathbb{S}_\zeta(\,\kappa_\xi, t, X)\,.$$

Für $\mathbb{N}$ erfolgt der Beweis völlig analog. ☒

Somit erhält man die lokale Form des Impulssatzes zu

$$\rho_\kappa\, \mathbf{b}_\xi = \rho_\kappa\, \mathbf{k}^f{}_\xi + div(\mathbf{T}_\xi)$$

und des Drallsatzes zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{b}_\xi &= \mathbf{m}^n{}_\xi + \mathbf{m}^f{}_\xi + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^n{}_\xi + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^f{}_\xi \\
&= \mathbf{m}^f{}_\xi + 1/\rho_\kappa\, axi(\mathbf{T}_\xi) + 1/\rho_\kappa\, div(\mathbf{M}_\xi) + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^f{}_\xi + 1/\rho_\kappa\, \mathbf{r}_\xi \times div(\mathbf{T}_\xi) \\
&= \mathbf{m}^f{}_\xi + 1/\rho_\kappa\, div(\mathbf{M}_\xi) + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^f{}_\xi + 1/\rho_\kappa\, div(\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{T}_\xi)\,,
\end{aligned}$$

weil man den antimetrischen Anteil des Kraft-Spannungs-Tensors folgendermaßen umformen kann, indem man auf eine Orthogonalbasis $\{\mathbf{e}_i\} \subset V$ Bezug nimmt:

$$\begin{aligned}
div(\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{T}_\xi) - \mathbf{r}_\xi \times div(\mathbf{T}_\xi) &= \left[(x^i\,\mathbf{e}_i \times \sigma^{jl}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l)(\partial/\partial x^k\,\mathbf{e}_k)\right] - x^i\mathbf{e}_i \times \left[(\sigma^{jl}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l)(\partial/\partial x^k\,\mathbf{e}_k)\right] \\
&= \left[\partial(x^i\,\sigma^{jl})/\partial x^k - x^i\,\partial(\sigma^{jl})/\partial x^k\right] \langle \mathbf{e}_l\,, \mathbf{e}_k \rangle\, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\
&= \partial x^i/\partial x^k\, \langle \mathbf{e}_l\,, \mathbf{e}_k \rangle\, \sigma^{jl}\, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\
&= \delta^i{}_k\, \delta_l{}^k\, \sigma^{jl}\, \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j \\
&= \sigma^{jk}\, \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j \\
&= axi(\mathbf{T}_\xi)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man die gleichzeitige Gültigkeit des lokalen Impulssatzes voraus, so verbleiben lediglich:

$$\mathbf{o} = \rho_\kappa\, \mathbf{m}^f{}_\xi + axi(\mathbf{T}_\xi) + div(\mathbf{M}_\xi)$$

Diese Version hängt *nicht* vom BZP ab. Wir können somit konstatieren:

S 11.23: Eine Bewegung $\kappa \in \Pi$ ist genau dann dynamisch möglich, wenn überall entlang κ
der **lokale Impulssatz** (1. *Cauchy*sche Gleichung)

$$\boxed{\rho_\kappa\, \mathbf{b}_\xi = \rho_\kappa\, \mathbf{k}^f{}_\xi + div(\mathbf{T}_\xi)}$$

und der **lokale Drallsatz**

$$\boxed{\mathbf{o} = \rho_\kappa\, \mathbf{m}^f{}_\xi + axi(\mathbf{T}_\xi) + div(\mathbf{M}_\xi)}$$

für einen/ alle Beobachter erfüllt sind.

Zu den globalen Formen gelangt man durch Integration über den Körper und Anwendung des *Gauß*schen Satzes auf die Divergenzfelder:

$$\int_\beta \mathbf{k}^f{}_\xi\, dm + \int_{\partial\beta} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{do}) = \int_\beta \mathbf{b}_\xi\, dm = \mathbf{i}_\xi{}'$$

und

$$\mathbf{o} = \int_\beta \mathbf{m}^f{}_\xi\, dm + \int_{\partial\beta} \mathbf{M}_\xi(\mathbf{do}) + \int_\beta axi(\mathbf{T}_\xi)\, dV\,.$$

Wir formen wieder um

$$\int_\beta axi(\mathbf{T}_\xi)\, dV = \int_{\partial\beta} (\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{T}_\xi)(\mathbf{do}) - \int_\beta \mathbf{r}_\xi \times div(\mathbf{T}_\xi)\, dm$$

und erhalten bei gleichzeitiger Gültigkeit des Impulssatzes

$$= \int_{\partial\beta} (\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{T}_\xi)(\mathbf{do}) + \int_\beta \mathbf{r}_\xi \times (\mathbf{k}^f{}_\xi - \mathbf{b}_\xi)\, dm$$

und schließlich:

$$\int_\beta (\mathbf{m}^f{}_\xi + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^f{}_\xi)\, dm + \int_{\partial\beta} (\mathbf{M}_\xi + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{T}_\xi)(\mathbf{do}) = \mathbf{d}_O{}'$$

Wir halten das Ergebnis wiederum in einem Satz fest:

S 11.24: Eine Bewegung $\kappa \in \Pi$ ist genau dann dynamisch möglich, wenn überall entlang κ
der **globale Impulssatz**

$$\int_B \mathbf{k}^f{}_\xi \, dm + \int_{\partial B} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{do}) = \dot{\mathbf{i}}_\xi$$

und der **globale Drallsatz**

$$\int_B (\mathbf{m}^f{}_\xi + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{k}^f{}_\xi) \, dm + \int_{\partial B} (\mathbf{M}_\xi + \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{T}_\xi)(\mathbf{do}) = \dot{\mathbf{d}}_{O\xi}$$

bez. eines/ aller BZP für einen/ alle Beobachter erfüllt sind.

Schreiben wir nun auf, was von der virtuellen Leistung bez. eines Beobachters übriggeblieben ist. Dabei haben wir den Beobachter-Suffix unterdrückt.

$$\begin{aligned}
\delta L(\kappa, t, \delta v) &= \int_B \left[<\mathbf{f}^o, \delta \mathbf{v}> + <\mathbf{m}^o, \delta\omega> \right] dm \\
&= \int_B \left[<\mathbf{k}^o - \mathbf{b}, \delta \mathbf{v}> + <\mathbf{m}^o, \delta\omega> \right] dm \\
&= \int_B \Big[<\mathbf{k}^f + 1/\rho_\kappa \, div(\mathbf{T}) - \mathbf{b}, \delta \mathbf{v}> \\
&\qquad + <\mathbf{m}^f + 1/\rho_\kappa \, div(\mathbf{M}) + 1/\rho_\kappa <axi(\mathbf{T}), \delta\omega> \Big] \, dm \\
&= \int_B <\mathbf{k}^f, \delta \mathbf{v}> dm + \int_B div[\mathbf{T}^*(\delta \mathbf{v})] \, dV \\
&\qquad - \int_B <\mathbf{T}, grad \, \delta \mathbf{v}> dV - \int_B <\mathbf{b}, \delta \mathbf{v}> dm \\
&\qquad + \int_B <\mathbf{m}^f, \delta\omega> dm + \int_B div[\mathbf{M}^*(\delta\omega)] \, dV \\
&\qquad - \int_B <\mathbf{M}, grad \, \delta\omega> dV + \int_B <axi(\mathbf{T}), \delta\omega> dV \\
&= \int_B <\mathbf{k}^f, \delta \mathbf{v}> dm + \int_B <\mathbf{m}^f, \delta\omega> dm \\
&\qquad + \int_{\partial B} <\delta \mathbf{v}, \mathbf{T}(\mathbf{do})> + \int_{\partial B} <\delta\omega, \mathbf{M}(\mathbf{do})> \\
&\qquad - \int_B <\mathbf{T}, \delta \mathbf{D}> dV - \int_B <\mathbf{M}, grad \, \delta\omega> dV - \int_B <\mathbf{b}, \delta \mathbf{v}> dm \, .
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist genau dann für alle $\delta v \in \delta V$ Null, wenn die Bewegung dynamisch möglich ist. Man beachte, daß es sich bei obigem Ausdruck möglicherweise nicht um die vollständige virtuelle Leistung handelt, da wir die (objektiven) höheren Felder Υ_i weggelassen haben. Damit erhalten wir das verschärfte

S 11.25: **Prinzip der virtuellen Leistung**
Eine Bewegung $\kappa \in \Pi$ ist genau dann dynamisch möglich, wenn überall entlang κ für alle $\delta v_\xi \in \delta V_\xi$

$$\begin{aligned}
&\int_B <\mathbf{k}^f{}_\xi, \delta \mathbf{v}_\xi> dm + \int_B <\mathbf{m}^f{}_\xi, \delta\omega_\xi> dm + \int_{\partial B} <\delta \mathbf{v}_\xi, \mathbf{T}_\xi(\mathbf{do})> + \int_{\partial B} <\delta\omega_\xi, \mathbf{M}_\xi(\mathbf{do})> \\
&\quad = \int_B <\mathbf{T}_\xi, \delta \mathbf{D}_\xi> dV + \int_B <\mathbf{M}_\xi, grad \, \delta\omega_\xi> dV + \int_B <\mathbf{b}_\xi, \delta \mathbf{v}_\xi> dm
\end{aligned}$$

mit

$$\delta \mathbf{D}_\xi := \tfrac{1}{2}(\delta \mathbf{v}_\xi \otimes \nabla_{\mathbf{e}_\xi} + \delta \mathbf{v}_\xi \otimes \nabla_{\mathbf{e}_\xi}{}^*)$$
$$\delta\omega_\xi := -\tfrac{1}{2} \, rot \, \delta \mathbf{v}_\xi$$

für einen/ alle Beobachter gilt.

Setzt man $\delta v_\xi = v_\xi$, also das tatsächliche Geschwindigkeitsfeld, so fallen die virtuelle Leistung und die Leistung selbst zusammen. Die einzige Vereinfachung, die sich in obiger Formel ergibt, ist die Identifikation der kinetische Energie

$$\int_B <\mathbf{b}_\xi, \mathbf{v}_\xi> dm = \int_B <\mathbf{v}_\xi^{\cdot}, \mathbf{v}_\xi> dm = d/dt \; \tfrac{1}{2}\int_B <\mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\xi> dm = E_{kin\xi}^{\cdot}$$

Es ergibt sich im Zusammenhang mit **S 11.18** (4) die

S 11.26: **Leistungsbilanz**
Eine Bewegung $\kappa \in \Pi$ ist genau dann dynamisch möglich, wenn für *alle* Beobachter überall entlang der Bewegung κ gilt:

$$L_\xi(\kappa, t) = L^a{}_\xi(\kappa, t) - L^i{}_\xi(\kappa, t) - E_{kin\xi}^{\cdot} = 0$$

mit der **äußeren Leistung**

$$\begin{aligned}
L^a{}_\xi(\kappa, t) := &\int_B <\mathbf{k}^f{}_\xi, \mathbf{v}_\xi> dm + \int_B <\mathbf{m}^f{}_\xi, \omega_\xi> dm \\
&+ \int_{\partial B} <\mathbf{v}_\xi, \mathbf{T}_\xi(\mathbf{do})> + \int_{\partial B} <\omega_\xi, \mathbf{M}_\xi(\mathbf{do})> ,
\end{aligned}$$

der **inneren Leistung oder Spannungsleistung**

$$L^i{}_\xi(\kappa, t) := \int_B <\mathbf{T}_\xi, \mathbf{D}_\xi> dV + \int_B <\mathbf{M}, grad \, \omega_\xi> dV ,$$

und der **kinetischen Energie**

$$E_{kin\xi} := \tfrac{1}{2}\int_B <\mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\xi> dm \, .$$

Führt man die normierte äußere Flächennormale ein gemäß

$$\mathbf{n} := \mathbf{do} / \|\mathbf{do}\| ,$$

so sind die Oberflächenanteile jeweils

$$\int_{\partial B} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{do}) = \int_{\partial B} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{n})\, do = \int_{\partial B} \mathbf{s}_\xi\, do$$

mit dem **Kraftspannungsvektor**

$$\mathbf{s}_\xi := \mathbf{T}_\xi(\mathbf{n}) ,$$

sowie

$$\int_{\partial B} \mathbf{M}_\xi(\mathbf{do}) = \int_{\partial B} \mathbf{M}_\xi(\mathbf{n})\, do = \int_{\partial B} \mathbf{t}_\xi\, do$$

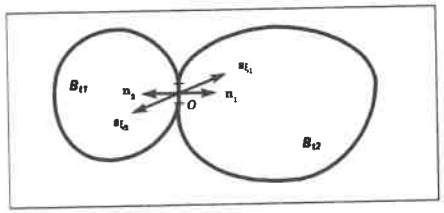
mit den **Momentenspannungen**

$$\mathbf{t}_\xi := \mathbf{M}_\xi(\mathbf{n}) ,$$

die jeweils lineare Funktionen der äußeren Flächennormalen sind. Für sie gilt das

S 11.27: **Reaktionsprinzip**
Berühren sich zwei Körper B_1 und B_2 tangential in einem Oberflächenbereich O (gem. Skizze), so gilt in O für die Normalen $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ und somit fast überall

$$\mathbf{s}_{\xi_1} = -\mathbf{s}_{\xi_2}$$
$$\mathbf{t}_{\xi_1} = -\mathbf{t}_{\xi_2} .$$



Der *dynamische Fluß*, der den einen Körper verläßt, wird also von seinem Nachbarn aufgenommen.

11.5 Non-polare Körper

Von großer praktischer Bedeutung sind die *non-polaren Körper*, die dadurch gekennzeichnet sind, daß weder im Innern noch an der Oberfläche Momentenbelastungen angreifen (können):

D 11.28: Ein Körper B heißt **non-polar**, wenn überall und immer gelten:

$$\mathbf{m}^f_\xi = \mathbf{o}$$

und

$$\mathbf{M}_\xi = \mathbf{O} .$$

Wir werden uns im folgenden ausschließlich mit diesem Spezialfall beschäftigen. Während der lokale Impulssatz äußerlich unverändert bleibt, reduziert sich der lokale Drallsatz auf

$$axi(\mathbf{T}) = \mathbf{o} .$$

Dies ist äquivalent zu der folgenden Aussage:

S 11.29: Für non-polaren Körper ist der lokale Drallsatz genau dann erfüllt, wenn der Spannungstensor symmetrisch ist:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* \qquad \text{(2. Cauchysche Gleichung).}$$

Die Symmetrie des Spannungstensors läßt eine Spektraldarstellung (s. S. 27) zu (über i summieren):

$$\mathbf{T} = \sigma_i^H\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i ,$$

wobei die Eigenwerte σ_i^H **Hauptspannungen** heißen. Ist $\mathbf{n}$ die Flächennormale, so ist

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{T}(\mathbf{n}) \rangle$$

die Spannungs-Normalkomponente, genannt **Normalspannung**. Sei $\mathbf{t}$ Tangenteneinheitsvektor an die Körperoberfläche dB mit

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = 0 ,$$

so heißt

$$\tau = \langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{T}(\mathbf{n}) \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{T}(\mathbf{t}) \rangle$$

Schubspannung in Richtung $\mathbf{t}$, und es gilt wegen der 2. *Cauchy*schen Gleichung der

S 11.30: Satz von der Gleichhheit zugeordneter Schubspannungen im non-polaren Fall

Die Schubspannung an einer $\mathbf{t}$-orientierten Fläche in Richtung $\mathbf{n}$ ist gleich
der Schubspannung an einer $\mathbf{n}$-orientierten Fläche in Richtung $\mathbf{t}$.

Diese Aussage ist äquivalent zur 2. *Cauchy*schen Gleichung. Sind alle Schubspannungen an einer Fläche gleich Null, so ist $\mathbf{n}$ Eigenvektor von $\mathbf{T}$.

Wir können grundsätzlich den Spannungszustand additiv zerlegen

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}'$$

mit dem **hydrostatischen Druck**

$$p := -\tfrac{1}{3}\operatorname{sp}\mathbf{T}$$

und dem (spurfreien) **Spannungsdeviator**

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + p\mathbf{I} = \mathbf{T} - \tfrac{1}{3}(\operatorname{sp}\mathbf{T})\mathbf{I}$$

Sind zwei Eigenwerte vom Spannungstensor gleich, so heißt der Spannungszustand *achsensymmetrisch*; sind alle drei gleich, so *kugelsymmetrisch* oder *hydrostatisch* oder *Druckspannungszustand*:

$$\mathbf{T} = -p\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i = -p\mathbf{I}\ .$$

Der Spannungstensor $\mathbf{T}$ bezieht die momentanen Spannungen auf die momentanen Flächenelemente. Man kann sie nun auch rechnerisch auf beliebige andere Flächenelemente beziehen, z. B. auf diejenigen in der Bezugsplazierung. Dazu berechnen wir uns zunächst die Transformationsformel für das Flächenelement $\mathbf{do} = \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2$, dargestellt durch das Kreuzprodukt zweier Tangentenvektoren $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ an die Fläche, bzw. in der Bezugsplazierung

$$\mathbf{do}_0 = \mathbf{t}_{0_1} \times \mathbf{t}_{0_2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}_i = \mathbf{F}(\mathbf{t}_{0i})\ ;$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{do}, \mathbf{v}\rangle &= \langle \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2, \mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{F}(\mathbf{t}_{0_1}) \times \mathbf{F}(\mathbf{t}_{0_2}),\ \mathbf{F}\,\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v})\rangle \\
&= \det(\mathbf{F})\,[\mathbf{t}_{0_1}, \mathbf{t}_{0_2}, \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v})] \\
&= \det(\mathbf{F})\,\langle \mathbf{t}_{0_1} \times \mathbf{t}_{0_2}, \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v})\rangle \\
&= \det(\mathbf{F})\,\langle \mathbf{F}^{-*}(\mathbf{t}_{0_1} \times \mathbf{t}_{0_2}), \mathbf{v}\rangle \\
&= \det(\mathbf{F})\,\langle \mathbf{F}^{-*}(\mathbf{do}_0), \mathbf{v}\rangle \\
&= \langle \mathbf{D}^F(\mathbf{do}_0), \mathbf{v}\rangle \qquad \forall\, \mathbf{v} \in V
\end{aligned}$$

mit dem **Flächenkonfigurations-Tensor** (s.S.82)

$$\mathbf{D}^F := \det(\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-*}\ .$$

Damit berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{do}) &= \mathbf{T}\,\mathbf{D}^F(\mathbf{do}_0) \\
&= \mathbf{T}\,\det(\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-*}(\mathbf{do}_0) \\
&= \mathbf{T}^{1PK}(\mathbf{do}_0)
\end{aligned}$$

mit dem **1. *Piola-Kirchhoff*-Tensor**

$$\mathbf{T}^{1PK} := \det(\mathbf{F})\,\mathbf{T}\,\mathbf{F}^{-*}\ ,$$

und es gilt äquivalent zur 2. *Cauchy*schen Gleichung

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}\,(\mathbf{T}^{1PK})^* = \mathbf{T}^{1PK}\,\mathbf{F}^*\ .$$

Unter den vielen Spannungstensoren wird häufig noch der **2. *Piola-Kirchhoff*-Tensor** verwendet

$$\mathbf{T}^{2PK} := \det(\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}\,\mathbf{F}^{-*} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}^{1PK}\ ,$$

der noch zusätzlich die Spannungen in die Bezugsplazierung zurückrechnet. Er ist nach der 2. *Cauchy*schen Gleichung symmetrisch.

GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF 1824 - 1887
GABBRIO PIOLA 1791 - 1850

Interessant werden für uns diese Spannungstensoren, wenn wir Spannungsleistungen berechnen wollen.

Die Leistungsbilanz **S11.26** im non-polaren Fall ist weiterhin

$$L^a = L^i + E_{kin}^{\cdot}\ ,$$

worin jedoch die äußere Leistung nur noch aus

$$L^a = \int_g \langle \mathbf{k}^f, \mathbf{v}\rangle\, dm + \int_{\partial g} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}(\mathbf{do})\rangle$$

besteht, und die Spannungsleistung

$$L^i = \int_g \langle \mathbf{T}, \mathbf{D}\rangle\, dV\ ,$$

Sie ist als Integral über das Produkt zweier objektiver Tensoren wiederum objektiv, wie auch die spezifische Leistungsdichte, einer reellwertigen lokalen Geschehensfunktion

$$l^i := 1/\rho \, \langle \mathbf{T}, \mathbf{D} \rangle = 1/\rho \; sp(\mathbf{T}\,\mathbf{D}) \; .$$

Mit

$$\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{F}^{-*}\, \mathbf{C}^{\cdot}\, \mathbf{F}^{-1}$$

folgt

$$\begin{aligned} l^i &= \tfrac{1}{2}\, sp\,(\mathbf{F}^{-1}\, \mathbf{T}\, \mathbf{F}^{-*}\, \mathbf{C}^{\cdot})/\rho \\ &= \tfrac{1}{2}\, sp\,(\mathbf{T}^{\mathrm{dpk}}\, \mathbf{C}^{\cdot})/\rho_0 \\ &= 1/\rho_0\; sp\,(\mathbf{T}^{\mathrm{dpk}}\, \mathbf{D}^{G\cdot}) \\ &= 1/\rho_0\; sp\,(\mathbf{T}^{\mathrm{lpk}}\, \mathbf{F}^{*\cdot}) \; , \end{aligned}$$

mit

$$det\,(\mathbf{F}) = \rho_0/\rho$$

und dem *Green*schen Verzerrungstensor

$$\mathbf{D}^G := \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{C} - \mathbf{I}_V) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^{G\cdot} = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{C}^{\cdot} \; .$$

Man nennt allgemein einen Spannungstensor $\mathbf{T}^g$ und einen Verzerrungstensor $\mathbf{D}^g$ **konjugiert**, falls

$$\tfrac{1}{2}\, sp\,(\mathbf{T}^g\, \mathbf{D}^{g\cdot})$$

der spezifischen inneren Leistung entspricht (s. WANG/ TRUESDELL S. 226).

Zu dem bereits bekannten **intrinsischen Spannungstensor** $\mathbf{S}$ gelangen wir, wenn wir die zur lokalen Konfiguration $\mathbf{G}$ konjugierte Spannung berechnen:

$$\begin{aligned} l^i &= 1/\rho\; sp\,(\mathbf{T}\,\mathbf{D}) \\ &= 1/\rho\; sp\,(\mathbf{T}\, \tfrac{1}{2}\, \mathbf{K}^{-*}\, \mathbf{G}^{\cdot}\, \mathbf{K}^{-1}) \\ &= 1/(2\rho)\; sp\,(\mathbf{K}^{-1}\, \mathbf{T}\, \mathbf{K}^{-*}\, \mathbf{G}^{\cdot}) \\ &= 1/(2\rho)\; sp\,(\mathbf{S}\, \mathbf{G}^{\cdot}) \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{S} := \mathbf{K}^{-1}\, \mathbf{T}\, \mathbf{K}^{-*} \qquad \in Lin(T_X{}^*B, T_XB) \; .$$

Die 2. *Cauchy*sche Gleichung ist äquivalent zur Symmetrie $\mathbf{S} \in Sym(T_X{}^*B, T_XB)$.
Die Objektivität von $\mathbf{T}$ ist äquivalent zur *Euklid*ischen Invarianz von $\mathbf{S}$ (s. S 11.21).

11.6 Diskussion des Vorgehens

Im 11. Kapitel wurden neben Stetigkeitsforderungen folgende grundlegenden Annahmen getroffen:

1) Das *Prinzip des Determinismus* über die Existenz eines *Arbeits-/ Leistungs*funktionals mit der Eigenschaft, für Geschwindigkeits-Nullfelder ebenfalls zu verschwinden.

2) Die *Objektivitäts-Hypothese* der *Arbeit / Leistung* bei dynamisch möglichen Bewegungen.

3) Die Existenzannahme einer *virtuellen Leistung* als stetige lineare Fortsetzung der Leistung.

zu 1)
Jeder naturwissenschaftlichen Theorie liegt die Annahme zugrunde, daß Natur (im weitesten Sinne) berechenbar ist. Darüber hinaus wird aber konkret das grundlegende Konzept der Theorie benannt, womit alle anderen Konzepte abgeleitet oder definiert werden. Wir haben uns dabei aus einer Reihe von Gründen für die *Arbeit* entschieden, während es sonst vielfach üblich ist, die dynamischen Größen *Kraft* und *Moment* an den Anfang zu setzen.

Der zweite Teil des Determinismus-Prinzips beinhaltet die allgemeine akzeptierte Vorstellung, daß *"Leistungsabsorbtionen generell nur konvektiv, d. h. in Zusammenhang mit Lageänderungen, stattfinden."* (TROSTEL 1985 II, S. 121). Wir benötigten diese Annahme später bei der Konstruktion der virtuellen Leistung: eine Funktion, die für das Null-Argument einen von Null verschiedenen Wert hat, kann grundsätzlich nicht linear verallgemeinert werden.

zu 2)
Es ist notwendig, in einer weiteren Annahme ein Kriterium aufzustellen für die dynamische Möglichkeit mechanischer Prozesse. Üblicherweise sind dies Bilanzgleichungen oder variationelle Extremalaussagen. Wir haben stattdessen das Objektivitätskriterium unter *Euklid*ischen Transformationen gewählt. Dies läßt sich

freilich sofort auch in eine Bilanz umformen, die die Differenzgrößen bei Beobachterwechseln beinhaltet.

zu 3)
Es wurde bereits angemerkt, daß die Existenz einer virtuellen Leistung keineswegs selbstverständlich ist, wobei die Transformationseigenschaft *(V3)* Probleme macht. Ein Funktional, das lediglich *(V1)* und *(V2)* erfüllt, läßt sich für einen Beobachter grundsätzlich finden. Mit *(V3)* ist es dann auch für alle anderen Beobachter determiniert. Es muß aber *(V2)* für *alle* Beobachter gelten, und dies ist der nicht-triviale Kern der Annahme.

Im Rückblick können wir allerdings feststellen, daß in jeder Theorie, die eine Leistungsbilanz (wie z. B. in **S11.26**) aufstellt, auch die Existenz einer virtuellen Leistung gesichert ist, und das sind praktisch alle Kontinuumstheorien.

Wir haben die *virtuelle Leistung* nicht als grundlegendes Konzept gewählt, da sie empirisch grundsätzlich nicht ermittelbar ist, selbst wenn man Leistungen messen kann. Dies drückt sich darin aus, daß die *virtuelle Leistung* - falls existent - nicht eindeutig sein kann.

Die aus der *virtuellen Leistung* abgeleiteten dynamischen Größen wie *Kräfte* und *Momente* wiederum sind eindeutig. Damit erstreckt sich die Ambiguität der *virtuellen Leistung* lediglich auf diejenigen Anteile, die zur Entwicklung einer Dynamik irrelevant sind.

Wir sind also mit diesen drei Annahmen in der Lage, die Dynamik eindeutig abzuleiten, d. h. das *Kraft-* und *Momenten*konzept, dessen vollständiges Transformationsverhalten, sowie die beiden Bilanzgleichungen *Impulssatz* und *Drallsatz*.

Es sei betont, daß an keiner Stelle ein *Newton*sches Beobachtersystem als "Inertial-Raum" ausgezeichnet wurde. Die Theorie gilt für alle Beobachter gleichberechtigt.

Die Idee, vom *Arbeits-/ Leistung*sbegriff ausgehend Mechanik zu betreiben, ist vielleicht so alt wie die Mechanik selbst. So sind von *Jordanus Nemorarius* Arbeiten aus dem 13. Jahrhundert bekannt, die zeigen, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit fast 400 Jahre vor dem *Stevin/ Newton*schen Kraftbegriff klar erkannt war (s. HUND

S. 56). Die Arbeitsprinzipien spielten immer schon eine wichtige Rolle neben den dynamischen Gleichungen und haben auch in unserer Zeit wieder viel Bedeutung erlangt durch den Bedarf an Variationsprinzipien für Näherungsverfahren.

Eine wichtige Vorarbeit für unser Konzept war die Entdeckung von NOLL (1963) und GREEN/ RIVLIN, daß man die Bewegungsgleichungen aus der Objektivität der *Leistung* folgern kann. GURTIN/ WILLIAMS und GURTIN (1972) haben den Versuch unternommen, die *Leistung* als grundlegendes Konzept einzuführen und die Dynamik abzuleiten.

Die grundlegende Idee aller dieser Ansätze ist, die dynamischen Größen als die Dualen der kinematischen Größen bezüglich der Leistung zu erklären. Dieses Konzept ist insbesondere dann fruchtbar, wenn zwar die Deformationsgrößen bekannt sind, nicht jedoch die Kraftgrößen. Von TROSTEL (1980) u.a. wurde diese Methode wiederholt dazu angewandt, neue Schnittlastgrößen und Spannungstensoren zu erfinden (zum Teil wurde hier statt der (Gesamt-)*Leistung* die *Dissipationsleistung* benutzt).

Bezug zur klassischen Vorgehensweise

Üblicherweise werden die dynamischen Größen (*Kräfte*, *Momente*) als grundlegende Konzepte eingeführt und *Leistung/Arbeit* als abgeleitete definiert. Im einzelnen werden traditionell folgende Annahmen getroffen:

1) Es gebe ein ausgezeichnetes *Newton*sches Beobachtersystem, das die sogenannten *Inertialrahmen-Beobachter* enthält.

2) Es existieren *Kräfte* und *Momente* als vektorwertige Bewegungsfunktionale, die Dichten besitzen.

3) Die *Momente* werden bezugspunktabhängig eingeführt, für den Bezugspunkt-Wechsel wird das *Varignon*sche Prinzip oder eine dazu äquivalente Aussage postuliert.

4) *Kräfte* und *Momente* sollen bez. *Euklid*ischer Transformationen objektiv sein.

5) Für alle Inertialrahmen-Beobachter gelten der Impuls- und Drallsatz.

Nun sollte man grundlegende Konzepte möglichst so wählen, daß eine empirische Vorstellung von ihnen bereits vorliegt. Leider besitzt der Mensch aber keinen Sinn, um Kräfte und Trägheiten auseinanderzuhalten. Auch der Begriff *Inertialrahmen* muß problematisiert werden. Historisch gesehen lag es nahe (und liegt es bei vielen technischen Anwendungen immer noch), die Erde, die einst als das Zentrum des Universums angesehen wurde, als den Inertialrahmen zu betrachten. Als sich dann in der Renaissance jedoch ein heliozentrisches Weltbild durchsetzte, erklärte man die Sonnen ('Fixsterne') zu den Festpunkten eines Inertialrahmens. Inzwischen wissen wir, daß auch sie sich in Bewegung zueinander befinden, und daß nicht einmal die Galaxien "fix" sind. Kein Astronom kann also in seinem Teleskop einen Intertialrahmen sehen.

Damit befindet man sich in einem fatalen Zirkelschluß:
Man verifiziert die Eigenschaft eines Beobachters, "inertial" zu sein, durch Einsetzen der dynamischen Größen in die Bewegungsgleichungen Impuls- und Drallsatz. Letztere hatte man aber bereits dazu benutzt, um Kräfte und Momente zu bestimmen. Die Dreifaltigkeit, bestehend aus *Inertial-Rahmen, dynamischen Größen* und *Bewegungsgleichungen*, ist in sich tautologisch: sie ist weder verifizierbar noch falsifizierbar.

TRUESDELL/ TOUPIN (S. 533) schreiben dazu :

> *" The difficulty of identifying an inertial frame by experiment is well known. This difficulty, however, is not reflected in the formalism of the subject. Rather, it arises from the fact that in practice force is generally measured by acceleration (...). If this is the case, in order to determine the force one must first, and independently, verify that his frame is inertial, which results in a circularity. "*

Dieses Vorgehen wird durchaus praktiziert. Stellt man durch Messungen Unstimmigkeiten der Bewegungsgleichungen fest, so postuliert man die Existenz neuer oder anderer Kräfte. Man hätte aber mit derselben Berechtigung bezweifeln können, einen Inertialrahmen benutzt zu haben.

Eine solche Theorie gebiert das formale Handicap, daß die dynamischen Größen *Euklid*isch objektiv sind, während die sie enthaltenden Bewegungsgleichungen nur *Galilei*-objektiv sind, oder : *"Die Invarianzgruppen der universellen und der konstitutiven Feldgleichungen stimmen also ... nicht überein"* (BRUNK 1976, S. 3).

Es liegt deshalb nahe, das ganze Inertialrahmen-Konzept fallen zu lassen und die Kräfte so zu transformieren, daß sie für alle Beobachter gleichzeitig die Bewegungsgleichungen entweder erfüllen oder nicht erfüllen.

Damit geht bei der Transformation der Trägheitsterm e_i ein, und die Kräfte sind nicht mehr objektiv. Dieser auf CLAIRAUT zurückgehende Vorschlag wurde oft wiederholt, so z. B. auch von NOLL (1959, S. 279):

> *"A clarification was finally given by Einstein in his general theory of relativity, in which gravitational forces and inertial forces cannot be separated from each other in an objective manner. If we wish to stay in the realm of classical mechanics we may resolve the paradox by sacrificing the objectivity of the external body forces while retaining the objectivity of the essential types of forces, the contact forces and the mutual body forces."*

Während das Inertialrahmen-Konzept in der klassischen Mechanik insgesamt entbehrlich ist, soll nicht bestritten werden, daß es in der relativistischen Mechanik als *lokale* Eigenschaft durchaus nützlich sein kann (s., e. g., TROSTEL 1982).

ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT 1713 - 1765

Zur Einteilung der Kräfte

Führt man die dynamischen Größen als Duale von Verrückungsgrößen ein, so erhält man lediglich die *Resultierenden* für den Körper. Um zu einer eindeutigen Einteilung in massen- und oberflächenverteilte Kräfte und Momente zu gelangen, bedarf es zusätzlicher Kriterien. Die Literatur auf dem Gebiet der Kontinuumsmechanik arbeitet an dieser Stelle mehr mit Glaubenssätzen als mit strengen Definitionen. In aller Regel wird von einer a-priori-Einteilung in *Kontaktgrößen* und *massenverteilten Intensitäten* ausgegangen. Für letztere ist die Gravitation wichtigstes Beispiel. Bei TRUESDELL/ TOUPIN (S. 533 ff, 536) werden noch "gegenseitige Belastungen" als dritte Kategorie eingeführt.

Versuche, diese Einteilung zu substantiieren oder auch nur zu problematisieren, sind äußerst selten. Zu den Ausnahmen gehört HAMEL (1922, S. 55), der sich viel Mühe gibt, die Einteilung physikalisch zu motivieren, dann aber einräumt:

"Wir werden später sehen, daß man flächenhaft verteilte Kräfte immer auf Volumenkräfte zurückführen kann, wenn man will; das Umgekehrte geht nicht immer. Es ist deshalb kein Fehler, wenn wir Kräfte als Volumenkräfte auffassen, die sonst neuerdings meist als Spannungen gedacht werden".

BRUNK (1972, S. 30) hat darauf hingewiesen, daß mit Hilfe des Fundamental-Lemmas der Potentialtheorie durchaus auch *"das Umgekehrte immer geht"*. Man muß also konstatieren, daß - mathematisch gesehen - die resultierenden Fern- und Nahkräfte als solche nicht unterscheidbar sind. Gesucht werden muß also nach einem physikalischen Unterscheidungskriterium.

Befragen wird die Mikrophysik. Dort ist es ebenfalls üblich, die Wechselwirkungen zwischen Partikeln bezüglich ihres Einflußbereiches in zwei Gruppen einzuteilen:

1) den **Nahbereichswechselwirkungen**, z. B. der schwachen und starken Wechselwirkungen, elektrische Wechselwirkungen, kovalente und metallische Bindungen, magnetische Dipole; und

2) den **Fernbereichswechselwirkungen**, z. B. der Gravitation, elektrische und magnetische Wechselwirkungen bei nach außen hin nicht neutralen Körpern.

Diese Einteilung ist jedoch keineswegs exakt, sondern eine Größenordnungsabschätzung. Jede Wechselwirkung ist sowohl im Nahbereich als auch im Fernbereich aktiv, aber eben nur "mehr oder weniger". So wird bei TRUESDELL/TOUPIN (S. 537) eingeräumt:

"In their effect upon motion the three types of loads are indiscernible ...".

Und weiter: *"The distinction of forces, as may be expected from the a priori nature of force itself, classifies our knowledge of the circumstances of a body. Generally, a problem which is simple and hence natural when put in terms of contact loads becomes intricate and artificial if put in terms of mutual or extrinsic loads".*

So deutlich werden die Schwierigkeiten nur selten zugegeben. Meistens wird an die physikalische Vorstellung appelliert, daß die Nahkräfte an der Oberfläche angriffen und die Fernkräfte im Innern des Körpers. Dieser Glaube fußt aber eher auf Denkgewohnheiten als auf physikalischen Fakten. Beispielsweise läßt sich die Gravitationskraft - eine klassische Fernkraft - durchaus vorstellen als ein Fluß durch

die Oberfläche des Körpers und modelliert als Divergenz eines Tensorfeldes, zumal ein Gesetz vom reziproken Abstandsquadrat ebenfalls bei Licht- und Schallausbreitungen Anwendung findet, zwei typischen Ausbreitungs-Phänomenen.

Man mag nun aus allem mit HAMEL (1922, S. 55) den Schluß ziehen: *"Für den Fortgeschrittenen ist es vom mechanischen Gesichtspunkt aus ganz gleichgültig, wie er eine Kraft auffaßt"*. Damit würde man aber praktisch der gesamten Materialtheorie den Boden entziehen. Wir haben deshalb eine Einteilung in Nah- und Fern-Felder vorgeschlagen, die zumindest physikalisch präzisiert ist. Es soll nicht behauptet werden, daß es keine Kräfte gäbe, die in unserem Sinne weder den Nah- noch den Fern-Feldern zugerechnet werden können. Immerhin dürfte deren Bedeutung in der Kontinuumsmechanik äußerst gering sein.

Die Einteilung der dynamischen Größen in starrkörpermodifikations-invariante n-Felder und deformations-invariante f-Felder ist folgenreich: wir gelangen zum Begriff der *Spannungstensoren*, die sich als objektiv herausstellen und dem *Prinzip der Forminvarianz* genügen.

Für die Feststellung ihrer Objektivität war entscheidend, die nicht-objektiven Anteile der spezifischen dynamischen Größen als deformations-invariant den f-Feldern zuschlagen zu können.

Die drei Begriffe *Objektivität* (O), *Invarianz gegen Starrkörpermodifikationen* (J) und *Forminvarianz* (F) hängen eng zusammen. Um so wichtiger ist es, sie begrifflich streng zu unterscheiden. Bei TRUESDELL/ NOLL und vielen anderen Autoren wird beispielsweise (F) unterstellt, wodurch (O) und (J) formal zusammenfallen und demzufolge als *ein* "Prinzip der materiellen Objektivität" behandelt werden. Lediglich in den historischen Anmerkungen wird zwischen seiner aktiven (J) und passiven Version (O) differenziert.

Das aus der Relativitätstheorie stammende Prinzip (F) wird nur von wenigen Autoren benannt, geschweige denn problematisiert. Ausnahmen sind BRUNK (1976), MUSCHIK/ BRUNK, TROSTEL (1981, 1982), BERTRAM (1983), KRAWIETZ und WANG/ TRUESDELL (S. 102), wo es heißt:

"... the functional(s) ... do not depend on ϕ (dem Beobachter). *This basic fact is easy to understand; it merely reflects the condition that the procedure for specifying an observable kinematical quantity with respect to a frame is independent of that frame".*

Als Beispiel wird die Geschwindigkeit genannt, die als Ableitung des Ortsvektors (F) erfüllt, aber weder objektiv noch invariant ist. Bei BRUNK (1976) und KRAWIETZ (S. 159 ff) wird dies im Zusammenhang mit MÜLLERs (1972) Einwand ausführlich diskutiert. Darin wird beispielsweise der keineswegs auszuschließende Fall betrachtet, daß die Spannungen neben den Deformationsgrößen zusätzlich von der Winkelgeschwindigkeit gegenüber einem Beobachter abhängen. Betrachtet man diese als unabhängige Variable der Spannungen, so erfüllt das Funktional nicht (J), sondern nur (O) und (F). Betrachtet man sie jedoch als Parameter, von dem das Funktional in seiner Form abhängt, so werden (F) und (J) verletzt, nicht jedoch (O).

Im Rahmen der vorliegenden Theorie werden derartige Kräfte nicht als Spannungen betrachtet, weil sie nicht (J) erfüllen. Man sieht aber an diesem Beispiel, daß der Geltungsbereich genannter Prinzipien von der präzisen Angabe der Definitionsbereiche der Funktionale abhängt.

Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß es auch kritische Stimmen gibt, die alle diese Prinzipien (Objektivität, lokale Wirkung, Determinismus) wie auch eine axiomatische Vorgehensweise in der Kontinuumsmechanik insgesamt ablehnen (s. WOODS).

Teil III: Materialtheorie

Empfohlene Literatur: NOLL (1972), BERTRAM (1982), KRAWIETZ

12. Materielle Systeme

Während wir im ersten Teil physikalische Untersuchungen angestellt haben, die für alle Materialien gleichermaßen gelten (in der Literatur häufig als "universell" bezeichnet), soll der nun folgende Abschnitt die material-individuellen mechanischen Eigenschaften beschreiben und kategorisieren. Eine rigorose Trennung zwischen universellen und material-individuellen Phänomenen, wie wir sie vornehmen, ist freilich nicht unproblematisch, wie wir bei der Einteilung der Kräfte in Nah- und Fernwirkungen bereits angedeutet haben.

Zunächst ist festzustellen, daß wir im Rahmen dieser Theorie nicht *alle* Materialien unter *allen* physikalischen Bedingungen beschreiben können.

Wir schließen beispielsweise aus:

- relativistische Effekte, wie sie bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit oder bei starken Gravitationsfeldern auftreten,
- mechanische Effekte aufgrund von thermischen, chemischen, optischen und anderen nicht-mechanischen Ursachen,
- mechanische Effekte der einzelnen Komponenten von sich durchdringenden Stoffen (Mischungen, etc.) oder sich reibend berührender Körper,
- Materialien, an denen verteilte Momente angreifen (polare Medien oder *Cosserat*-Kontinua),
- Materialien, bei denen höhere Deformations-Gradienten die Spannungen beeinflussen können (nicht-einfache Materialien).

Trotz dieser Einschränkungen sei jedoch betont, daß hier die allgemeinste geschlossene Materialtheorie vorgestellt wird, die es zur Zeit gibt, und die Materialfülle, die wir damit beschreiben können, immer noch sehr groß ist. Außerdem lassen sich die Variablensätze dieser Theorie leicht ausdehnen, um auch andere Materialklassen in die Beschreibung einzuschließen. In BERTRAM (1980, 1982) ist dies für thermo-elektro-mechanische Materialien geschehen.

Fast alle der folgenden Konzepte sind NOLL (1972) entnommen, der wohl wichtigsten Arbeit der modernen Materialtheorie. Sie wurden in BERTRAM (1982) unter Einschluß innerer Zwangsbedingungen modifiziert. Zahlreiche Vertiefungen und Anwendungen findet man bei KRAWIETZ.

12.1 Prozesse

Die grundlegende praktische Vorstellung unserer Materialtheorie ist, beliebig viele homogene gleichartige Proben zu haben, mit ihnen Deformationsversuche durchführen zu können, und dabei die Spannungen messen zu können. Auf die experimentellen Schwierigkeiten, die dabei auftreten, soll hier nicht eingegangen werden.

Damit sind die unabhängigen Größen dieser Materialtheorie *Konfigurationsprozesse*, und die abhängigen die *Spannungen* am Ende der Prozesse. Den Zusammenhang bildet ein *Materialfunktional*.

D 12.1: Sei $d \in \mathbb{R}^{+}$ und V linearer Raum. Dann heißt eine Abbildung

$$P : [0, d] \to V$$

Prozeß der Dauer d .

Wir werden später den linearen Raum mit dem Konfigurationsraum eines Körperelementes identifizieren und erhalten somit *Konfigurationsprozesse*.

Falls nicht anders bemerkt, bedeutet für einen Index i im weiteren d_i immer die Dauer eines Prozesses P_i .

Ein Prozeß P_0 von der Dauer $d = 0$ heißt **Nullprozeß**.

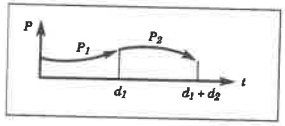
Ein Prozeß mit $P(t)$ = konstant für alle $t \in [0, d]$ heißt **konstanter Prozeß** oder **Einfrierung** der Dauer d .

Seien P_1 und P_2 zwei Prozesse mit $P_1(d_1) = P_2(0)$, so sei die **Hintereinanderschaltung** der Prozesse durch

$$P_2 \circ P_1(t) := P_1(t) \qquad \text{für } t \le d_1$$
$$P_2 \circ P_1(t) := P_2(t - d_1) \qquad \text{für } d_1 < t \le (d_1 + d_2)$$

definiert. Diese Verknüpfung ist nicht kommutativ, aber assoziativ:

$$(P_3 \circ P_2) \circ P_1 = P_3 \circ (P_2 \circ P_1) .$$



Für $P = P_2 \circ P_1$ nennen wir:

P_1 : **Teilprozeß** von P ;
P_2 : **Fortsetzung** von P_1 ; für $d_2 \neq 0$: **echte** Fortsetzung;
P_1 und P_2 : **Prozeß-Segmente** von P .

Offenbar kann man jedem Prozeß den Nullprozeß mit dem Anfangswert des Prozesses beliebig oft vorschalten; das Resultat ist immer derselbe Prozeß. Analoges gilt für den Endwert.

D 12.2: Eine **Prozeßklasse** $\mathcal{P}$ ist eine Menge von Prozessen, die die folgenden Axiome erfüllt:

(*P1*): $\mathcal{P}$ ist nicht leer;
(*P2*): alle Prozesse beginnen mit demselben Anfangswert:

$$P_1, P_2 \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad P_1(0) = P_2(0)$$

(*P3*): alle Teilprozesse von Prozessen aus $\mathcal{P}$ gehören zu $\mathcal{P}$;

(*P4*): zu jedem Prozeß P_1 aus $\mathcal{P}$ gibt es eine echte Fortsetzung P_2 , so daß $P_2 \circ P_1 \in \mathcal{P}$.

Folgende Typen von Prozeßklassen sind u. a. denkbar:

- $\mathcal{P}$ besteht aus allen Prozessen (ob stetig oder nicht) mit demselben Anfangswert;
- die Dauer aller Prozesse ist kleiner als eine feste positive reelle Zahl: das System hat nur eine endliche Lebensdauer (als nicht-angenommenes Supremum der Dauern aller Prozesse);
- alle Prozesse sind r-mal stetig differenzierbar $(r \geq 1)$.

Einige einfache Folgerungen werden ohne Beweis genannt:

S 12.3: Jede Prozeßklasse enthält genau einen Nullprozeß P_0 , der Teilprozeß eines jeden Prozesses ist. Das heißt, daß für alle $P \in \mathcal{P}$ gilt : $P = P \circ P_0$. (P_0 ist die rechtsseitige Identität in $\mathcal{P}$ bez. $\circ$).

S 12.4: Jede Prozeßklasse enthält mindestens einen Prozeß der Dauer $d \neq 0$, und damit auch seine überabzählbar vielen Teilprozesse.

Indem wir den Begriff *Bewegungsklasse eines Körpers* lokalisieren und bezüglich Starrkörperbewegungen fasern, erhalten wir die *Prozeßklasse eines Körperelements*. Sie enthält zeitabhängige Abfolgen von Konfigurationen des Körperelementes oder *intrinsische lokale Konfigurationsprozesse*.

Die folgenden Feststellungen sind Konsequenzen der Bewegungsklassen-Axiome (II1) - (II5) des Abschnitt 10.7.

S 12.5: Sei $\mathcal{B}$ Körper, $X \in \mathcal{B}$ Körperpunkt, Π Bewegungsklasse des Körpers, und $\kappa \in \Pi$ Bewegung der Dauer d beginnend zur Zeit $t_a = 0$. Dann ist die Abbildung

$$P : [0, d] \rightarrow Sym^+(T_X\mathcal{B}, T_X{}^*\mathcal{B})$$

definiert durch

$$P(t) := \kappa(t,X)^* \, \kappa(t,X)_* = K_X(t)^* \, K_X(t) = G_X(t)$$

Prozeß der Dauer d .
Die Menge $\mathcal{P}$ aller Prozesse, wenn κ ganz Π durchläuft, ist Prozeßklasse (erfüllt also die Axiome *P1 - 4*).

Da wir uns gleich auf die intrinsischen Konfigurationen eingeschränkt haben, gilt:

S 12.6: Die Prozeßklasse $\mathcal{P}$ ist *Euklid*isch invariant.

Wir werden in diesem und dem folgenden Kapitel den Punkt $X \in \mathcal{B}$ als beliebig, aber fest gewählt betrachten.

12.2 Prinzip des Determinismus

Wir stellen nun die grundlegende Annahme der ganzen Materialtheorie auf, die teilweise die Ergebnisse von Kapitel 11 beinhaltet (*Euklid*ische Invarianz, Forminvarianz, Invarianz gegen Starrkörpermodifikationen), und darüber hinaus eine spezielle Materialklasse definiert: *einfache non-polare Materialien ohne innere Zwangsbedingungen*. Es handelt sich bei dem Prinzip um die Existenz eines *Materialfunktionals*, auch *Materialgleichung*, *Stoffgleichung*, *konstitutive Gleichung* oder *Stoffgesetz* genannt.

A 12.7: **Prinzip des Determinismus**
Der (intrinsische lokale Konfigurations-) Prozeß bestimmt eindeutig die (intrinsischen) Spannungen am Ende des Prozesses,
d. h. es gibt ein **Materialfunktional**

$$F : \mathcal{P} \rightarrow Sym(T_X{}^*\mathcal{B}, T_X\mathcal{B})$$
$$P_i \mapsto S(d_i) .$$

D 12.8: Sei $X \in B$ materieller Punkt, P Prozeßklasse von X und F Materialfunktion definiert auf P.
Dann heißt das Tripel $MS = (X, P, F)$ **materielles System.**

Beispiele für materielle Systeme (s. a. TRUESDELL/ NOLL)

1) Elastizität

D 12.9: Sei $X \in B$ und $G_o \in Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$.
Sei P die Menge der stückweise stetig differenzierbaren Prozesse mit Anfangswert G_o.
Sei π die Projektion der Prozesse auf ihren Endwert:

$$\pi(P) := P(d) = G(d) ,$$

f eine Abbildung

$$f: \; Sym^+(T_XB, T_X{}^*B) \to Sym(T_X{}^*B, T_XB)$$

und

$$F := f\,\pi .$$

Dann heißt $MS := (X, P, F)$ **elastisches materielles System.**

Beispiel: **isotrope elastische Körper**

$$f = \alpha_o\, G(d)^{-1} + \alpha_1\, G_o^{-1} + \alpha_2\, G_o^{-1}\, G(d)\, G_o^{-1}$$

mit $G_o \in Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$ und den reellen Funktionen α_i der drei Hauptinvarianten von $G(d)\, G_o^{-1}$. Die Bedeutung von *isotrop* wird im Kapitel 15 über *materielle Symmetrie* erklärt und auf S. 225 aufgegriffen.

2) materielle Systeme vom Differentialtyp

D 12.10: Sei $X \in B$ und $r \in \mathbb{N}$.
Sei P die Menge aller r-mal stetig differenzierbaren Prozesse, für die der Anfangswert und die ersten r (rechtsseitigen) Zeitableitungen jeweils gleich sind:

$$P(0) = G_o\,, \quad P'(0) = G_1\,, \ldots, \; P^{(r)}(0) = G_r \qquad \forall\, P \in P,$$

zuzüglich des Nullprozesses. Sei

$$\pi: \; P \to \times^{(r+1)} Sym(T_XB, T_X{}^*B)$$
$$P \mapsto (P(d), P'(d), \ldots, P^{(r)}(d))$$

die Projektion, die jedem Prozeß den Endwert und die ersten r linksseitigen Zeitableitungen zuordnet. Wir setzen für den Nullprozeß

$$\pi(P_o) = (G_o, G_1, \ldots, G_r) .$$

Sei

$$f: \; \times^{(r+1)} Sym(T_XB, T_X{}^*B) \to Sym(T_X{}^*B, T_XB)$$

und

$$F := f\,\pi .$$

Dann heißt (X, P, F) **materielles System vom Differentialtyp vom Grade r.**

Beispiel: **kompressibles *Reiner-Rivlin*-Fluid** (s. S. 227)

$$f = \lambda_o\, G(d)^{-1} + \lambda_1\, G(d)^{-1}\, G'(d)\, G(d)^{-1} + \lambda_2\, G(d)^{-1}\, [G'(d)\, G(d)]^2$$

mit den drei reellwertigen Funktionen λ_i von der Dichteänderung $\rho_o/\rho_K = det(G_o\, G(d)^{-1})$ und den drei Hauptinvarianten von $G'(d)\, G(d)^{-1}$.

Spezialfall: **kompressibles *Navier-Stokes*-Fluid** $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+)$

$$f = \lambda\, det[G_o\, G(d)^{-1}]\; G(d)^{-1} + \mu\, G(d)^{-1}\, G'(d)\, G(d)^{-1} .$$

3) materielle Systeme vom Integraltyp

D 12.11: Sei $X \in B$ und

$$f: \; [0, \infty) \to Lin\,[Sym^+(T_XB, T_X{}^*B), Sym(T_X{}^*B, T_XB)]$$

und P die Menge der Prozesse mit gegebenem Anfangswert G_o, für die das Faltungsintegral

$$F(P) = \int_0^d f(s)\; P(d-s)\; ds$$

existiert. Dann heißt (X, P, F) **materielles System vom Integraltyp.**

12.3 Herstellung von materiellen Systemen

Dem Konzept des materiellen Systems lag der Gedanke zugrunde, daß wir aus einem bestimmten Ausgangszustand heraus einen beliebigen Prozeß der Prozeßklasse durchfahren können. Bleibt die Frage zu untersuchen, womit wir es nach einem solchen Prozeß zu tun haben. Handelt es sich immer noch um dasselbe materielle System? Oder haben wir es jetzt mit einem völlig neuen System zu tun? Und in welcher Beziehung steht dieses zu dem alten? Der folgende leicht nachprüfbare Satz liefert uns ein Werkzeug, diese Frage zu untersuchen:

S 12.12: Herstellungssatz

Sei $\mathrm{MS} = (X, \boldsymbol{P}, F)$ materielles System und $P_h \in \boldsymbol{P}$ beliebig festgewählt. Dann ist $\mathrm{MS}' = (X, \boldsymbol{P}', F')$ mit

$$\boldsymbol{P}' := \{P' \mid P' \circ P_h \in \boldsymbol{P}\}$$

$$F'(P') := F(P' \circ P_h) \qquad \forall\, P' \in \boldsymbol{P}'$$

auch ein materielles System.

Wir wollen folgende Ausdrucksweise einführen:
MS' ist das über den **Herstellungsprozeß** P_h aus MS **hergestellte** materielle System. Die Abbildung, die jedem (Herstellungs-)Prozeß aus $\boldsymbol{P}$ das hergestellte materielle System zuordnet, wird **Herstellung** genannt:

$$h: \quad \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{M} := h(\boldsymbol{P})$$

$$P_h \mapsto \mathrm{MS}' .$$

Sie ist für jedes materielle System nach obiger Konstruktionsvorschrift eindeutig definiert und, da jeder Prozeß nach *(P4)* echt fortgesetzt werden kann, auch immer sinnvoll. Es kann natürlich vorkommen, daß für bestimmte Herstellungsprozesse das hergestellte materielle System formal identisch ist mit dem Ausgangssystem. Dies gilt immer für den Nullprozeß.

Falls Prozesse verknüpfbar sind, können wir auch die Herstellungen verknüpfen und erhalten eine *Kettenregel*:

S 12.13: Sei $\mathrm{MS} = (X, \boldsymbol{P}, F)$ materielles System mit Herstellung h, $P = P_2 \circ P_1 \in \boldsymbol{P}$, und $\mathrm{MS}' := h(P_1)$ mit Herstellung h'.
Dann gilt:

$$h(P_2 \circ P_1) = h'(P_2) .$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition des hergestellten Materials.

Mit dem Begriff *Herstellung* läßt sich auf der Menge der definierbaren materiellen Systeme eine Quasi-Ordnungsstruktur einführen:

$$\mathrm{MS}_1 < \mathrm{MS}_2 \ (\text{oder } \mathrm{MS}_2 > \mathrm{MS}_1) \ : \quad \mathrm{MS}_1 \text{ ist aus } \mathrm{MS}_2 \text{ herstellbar,}$$

d. h. es gibt in der Prozeßklasse $\boldsymbol{P}_2$ von MS_2 einen Herstellungsprozeß P mit $\mathrm{MS}_1 = h_2(P)$. Die Relation $<$ ist reflexiv und transitiv.

Dabei beachte man, daß i. allg. *nicht* gilt

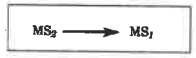
$$(\mathrm{MS}_1 < \mathrm{MS}_2) \text{ und } (\mathrm{MS}_2 < \mathrm{MS}_1) \Rightarrow \mathrm{MS}_1 = \mathrm{MS}_2 .$$

Dies macht gleichzeitig den Unterschied zwischen einer Ordnungsstruktur und einer Quasi-Ordnungsstruktur aus.

Um die Art der vorliegenden Struktur deutlicher zu machen, seien kurz die verschiedenen Möglichkeiten dargestellt, wie zwei oder drei materielle Systeme zueinander in Beziehung stehen können. Seien MS_1, MS_2 und MS_3 materielle Systeme. Dann sind folgende Fälle denkbar:

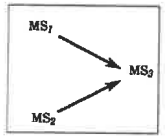
1.) keines ist aus einem der anderen herstellbar

2.) $\mathrm{MS}_1 < \mathrm{MS}_2$, aber nicht umgekehrt

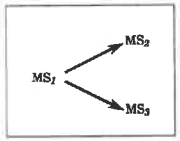


3.) $(\mathrm{MS}_1 < \mathrm{MS}_2)$ und $(\mathrm{MS}_2 < \mathrm{MS}_1)$

4.) $(\mathrm{MS}_3 < \mathrm{MS}_1)$ und $(\mathrm{MS}_3 < \mathrm{MS}_2)$, aber weder $(\mathrm{MS}_2 < \mathrm{MS}_1)$ noch $(\mathrm{MS}_1 < \mathrm{MS}_2)$

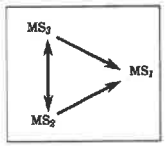


5.) $(MS_3 < MS_1)$ und $(MS_2 < MS_1)$, aber weder $(MS_2 < MS_3)$ noch $(MS_3 < MS_2)$

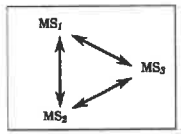


6.) $(MS_1 < MS_2)$ und $(MS_2 < MS_3) \Rightarrow (MS_1 < MS_3)$ (Transitivität)

7.) $(MS_2 < MS_3)$ und $(MS_3 < MS_2)$ und $(MS_1 < MS_2) \Rightarrow (MS_1 < MS_3)$



8.) $(MS_1 >< MS_2)$ und $(MS_2 >< MS_3) \Rightarrow (MS_3 >< MS_1)$



Fall 4 ist besonders interessant: aus zwei materiellen Systemen, die nicht auseinander herstellbar sind, kann ein gemeinsames drittes hergestellt werden. Dies ist der Grund dafür, daß wir materielle Systeme, die auseinander herstellbar sind, nicht einfach miteinander identifizieren.

S 12.14: Sei $MS' = (X, P', F')$ aus $MS = (X, P, F)$ herstellbar, und sind h und h' die Herstellungen von MS bzw. von MS'. Dann gilt

$$h(P) \supset h'(P')$$

Wir werden später sehen, daß die Gleichheit nur dann *immer* gilt, wenn MS einer speziellen Materialklasse angehört, den sogenannten *revertierbaren* Materialien. Für *nicht-revertierbare* Materialien gilt die Gleichheit nur für eine bestimmte Untermenge von aus MS hergestellten materiellen Systemen, beispielsweise für dasjenige, das über den Nullprozeß hergestellt wurde.

13. Zustände

Empfohlene Literatur: ONAT (1968, 1970), NOLL (1972), DASHNER, FABRIZIO/ LAZZARI

Mit den bisher eingeführten Begriffen sind wir in der Lage, den *Zustand* eines materiellen Systems zu definieren. Dazu wählen wir den aus der Systemtheorie bekannten *minimalen Zustandsraum*.

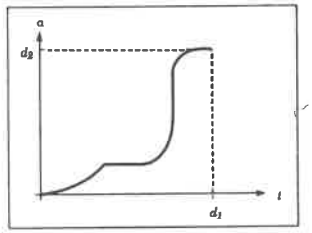
D 13.1: Sei $\mathrm{MS} = (X, \boldsymbol{P}, F)$ materielles System und h seine Herstellung. Wir definieren auf $\boldsymbol{P}$ eine Äquivalenzrelation z :

$$P_1 \; z \; P_2 \quad : \quad h(P_1) = h(P_2) \quad ;$$

d.h. zwei Prozesse der Prozeßklasse sind äquivalent, falls die über sie hergestellten materiellen Systeme identisch sind.
Die Äquivalenzklassen heißen **Zustände** des materiellen Systems MS, ihre Gesamtmenge heißt **Zustandsraum** $\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{P}/z$.
Die zum Nullprozeß äquivalenten Prozesse heißen **Kreisprozesse**, ihre Äquivalenzklasse heißt **Anfangszustand**.

Man beachte, daß also Kreisprozesse immer Zustands-Kreisprozesse sind, was wesentlich schärfer ist als die kinematische Forderung, daß $P(0) = P(d)$ ist.

Als illustratives Beispiel dieses Zustandsbegriffes wollen wir die Definition einer Materialklasse geben (s. OWEN/ WILLIAMS, PIPKIN/ RIVLIN):



D 13.2: Zwei Prozesse P_1 und P_2 heißen **ähnlich**, falls es eine monoton steigende Relation

$$\alpha : [0, d_1] \to [0, d_2]$$

gibt, so daß gilt:

$$P_2 = P_1 \, \alpha \, .$$

D 13.3: Ein materielles System heißt **geschwindigkeitsunabhängig**, falls gilt: Sind zwei Prozesse ähnlich, so sind sie auch z-äquivalent.

Da die Prozeßklasse des hergestellten materiellen Systems den (eindeutigen) Nullprozeß enthält, können wir dessen (einzige) Konfiguration und dessen Spannung berechnen. Sie ist die Spannung des Anfangszustandes des hergestellten materiellen Systems und gleichzeitig die Spannung des Herstellungsprozesses bezüglich des ursprünglichen Systems. Es gilt also: Der Zustand determiniert eindeutig die Konfiguration und die Spannung. Dies gibt den Anlaß, die folgenden **Funktionen zu definieren**:

D 13.4: Sei $\mathrm{MS} = (X, \boldsymbol{P}, F)$ materielles System mit Zustandsraum $\boldsymbol{Z}$, $Z \in \boldsymbol{Z}$ und $P \in Z$ von der Dauer d . Die Abbildung

$$G : \boldsymbol{Z} \to \mathit{Sym}^+(T_X B, T_X{}^* B)$$

definiert durch

$$G(Z) := P(d)$$

heißt **Ausgabefunktion der Konfiguration**. Die Abbildung

$$S : \boldsymbol{Z} \to \mathit{Sym}(T_X{}^* B, T_X B)$$

definiert durch

$$S(Z) := F(P)$$

heißt **Ausgabefunktion der Spannung**.

Man macht sich leicht klar, daß die beiden Funktionen unabhängig von der speziellen Wahl von $P \in Z$ sind.

Beim folgenden handelt es sich um den aus der Mathematik bekannte *Abbildungssatz*:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\theta"'] & & M \\ & Z \arrow[ur, "\Xi"'] & \end{tikzcd}$$

S 13.5: Sei M die Menge der aus einem materiellen System MS herstellbaren materiellen Systeme:

$$M := h(P)$$

und θ die natürliche Abbildung der Äquivalenzrelation $\approx$

$$\theta : P \to Z := P/\approx .$$

Dann existiert genau eine bijektive Abbildung

$$\Xi : Z \to M ,$$

so daß gilt:

$$\Xi\, \theta(P) = h(P) \qquad \forall P \in P .$$

Wie diese Abbildung Ξ im konkreten Fall aussieht, hängt natürlich entscheidend von der Materialfunktion F ab. Es gilt im übrigen:

$$F = S\, \theta : P \to Sym(T_X{}^*B, T_XB) .$$

Im Lichte dieses Satzes ist es also gleich, ob wir von einem "aus MS über P hergestellten materiellen System" oder vom "materiellen System MS im Zustand $Z = \theta(P)$" reden. Letzteres ist allerdings i. allg. einfacher, da θ in allen praktisch relevanten Fällen eine Verkleinerung darstellt, d. h. nicht injektiv ist.

Angesichts der weiter oben genannten Tatsache (S 12.14), daß gilt

$$h(P) \supset h'(P') ,$$

falls $MS' = (X, P', F')$ aus $MS = (X, P, F)$ herstellbar ist, liegt es nahe, die zugehörigen Zustände miteinander zu identifizieren:

A 13.6 Vereinbarung:

Sind $MS = (X, P, F)$ materielles System, $P_1 \in P$,

$$MS' = (X, P', F') := h(P_1) ,$$

$P_2 \in P'_1$ und θ, θ', Ξ, Ξ' sinngemäß (s. S 13.5), so sei

$$\theta(P_2 \circ P_1) = \Xi^{-1}\, h(P_2 \circ P_1) = \Xi'^{-1}\, h'(P_2) = \theta'(P_2) .$$

Es gilt dann: $\qquad Z \supset Z'$.

Allgemeiner gilt für Ketten von auseinander hergestellten materiellen Systemen

$$\ldots < MS_{n-1} < MS_n < MS_{n+1} < \ldots$$

und den zugehörigen Zustandsräumen

$$\ldots, Z_{n-1}, Z_n, Z_{n+1}, \ldots$$

und Prozeßklassen

$$\ldots, P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, \ldots :$$

$$\begin{tikzcd} \ldots h_{n-1}(P_{n-1}) \arrow[r, phantom, "\subset"] & h_n(P_n) \arrow[r, phantom, "\subset"] & h_{n+1}(P_{n+1}) \ldots \\ \ldots Z_{n-1} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[u, "\Xi_{n-1}"'] & Z_n \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[u, "\Xi_n"'] & Z_{n+1} \ldots \arrow[u, "\Xi_{n+1}"'] \end{tikzcd}$$

Zur Illustration solcher Ketten seien zwei *Beispiele* aus der Mechanik gegeben:

Es gibt Theorien, die trockenem Sand die Eigenschaft zuschreiben, seine Dichte während aller Deformationen - Einrieselungen sollen hierzu nicht zählen - einer sogenannten kritischen Dichte anzunähern. Ist er am Anfang locker, so wird er sich verdichten, ist er verdichtet, so wird er sich auflockern. Nach jeder Deformation ist also die Menge der erreichbaren Zustände kleiner geworden, sofern jene nicht isochor (volumentreu) war, und die Menge damit konstant geblieben ist. Denn bei jeder Dichteänderung wird das noch erreichbare Dichtespektrum kleiner.

Im Rahmen der klassischen *Plastizitätstheorie* - auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll - bewirkt die (isotrope) Verfestigung ebenfalls eine Abnahme der Menge der erreichbaren Zustände, weil man sie nicht rückgängig machen kann.

Wir wollen nun noch einmal die früher beschriebenen acht Fälle von Herstellbarkeits-Beziehungen aufgreifen und sehen, welche Aussagen für die Zustandsräume gemacht werden können.

1.)		MS_2	$<>$	MS_1	$\Rightarrow$	$Z_1 \neq Z_2$
2.)		MS_2	$>$	MS_1	$\Rightarrow$	$Z_2 \supset Z_1$
3.)		MS_2	$> <$	MS_1	$\Leftrightarrow$	$Z_1 = Z_2$
4.)		MS_1	$> MS_3 <$	MS_2	$\Rightarrow$	$Z_1 \supset Z_3 \subset Z_2$
5.)		MS_2	$< MS_1 >$	MS_3	$\Rightarrow$	$Z_2 \subset Z_1 \supset Z_3$
6.)		MS_1	$> MS_2 >$	MS_3	$\Rightarrow$	$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3$
7.)		MS_2	$< >$	MS_3		
	und	MS_2	$> MS_1 <$	MS_3	$\Rightarrow$	$Z_2 = Z_3 \supset Z_1$
8.)		MS_1	$< >$	MS_2		
	und	MS_2	$< >$	MS_3		
	und	MS_3	$< >$	MS_1	$\Leftrightarrow$	$Z_1 = Z_2 = Z_3$.

13.1 Revertierbare materielle Systeme

D 13.7: Sei $MS = (X, \mathbf{P}, F)$ materielles System und $P \in \mathbf{P}$.
P heißt **revertierbar**, falls es einen Kreisprozeß in $\mathbf{P}$ gibt, der P als Teilprozeß enthält.

Entscheidend für die Revertierbarkeit eines Prozesses ist, daß man über einen weiteren Prozeß das materielle System wieder in seinen Anfangszustand bringen kann. Wir werden i. allg. damit rechnen müssen, daß eine Prozeßklasse sowohl revertierbare als auch nicht-revertierbare Prozesse enthalten kann. Die Definition

hat im übrigen nichts zu tun mit den aus der Thermodynamik bekannten *reversiblen* Prozessen. Die im vorigen Abschnitt (S. 197 f) angesprochenen Beispiele beschreiben Prozesse oder Zustandsänderungen, die man nicht rückgängig machen kann und deren Herstellungsprozesse damit *nicht-revertierbar* sind.

Es sei noch bemerkt, daß Kreisprozesse trivialerweise revertierbar sind, da sie sich immer selbst als Teilprozesse enthalten. Speziell ist der Nullprozeß ein revertierbarer Prozeß, der in jeder Prozeßklasse enthalten ist.

Die folgende Aussage ist offensichtlich:

S 13.8: Sind alle Herstellungsprozesse einer Kette von materiellen Systemen (s. Seite 197) revertierbar, so gelten:

$$Z_i = Z_j$$

sowie

$$h_i(P_i) = h_j(P_j) \qquad \forall\, i, j .$$

S 13.9: Revertierbarkeit ist eine Zustandseigenschaft, d. h. z-äquivalente Prozesse sind entweder beide revertierbar oder beide nicht-revertierbar .

B: Sei $P_1 \in \mathbf{P}$ revertierbar und z-äquivalent zu $P_2 \in \mathbf{P}$. Dann gibt es zu P_1 eine Fortsetzung P_3 , so daß $P_3 \circ P_1 \in \mathbf{P}$ Kreisprozeß ist. Da $h(P_1) = h(P_2)$ ist, und insbesondere deren Prozeßklassen gleich sind, und P_3 ein Element daraus ist, gilt $P_3 \circ P_2 \in \mathbf{P}$. Dies ist der gesuchte Kreisprozeß.
Ist dagegen P_1 nicht-revertierbar, so lassen sich nicht P_1 und damit auch nicht P_2 zu einem Kreisprozeß fortsetzen. ⊠

Die folgenden Aussagen sind so offensichtlich, daß die Nachweise weggelassen wurden.

S 13.10: Ist P_1 revertierbarer Prozeß von MS und P_2 revertierbarer Prozeß von $h(P_1)$, so ist auch $P_2 \circ P_1$ revertierbarer Prozeß von MS.

S 13.11: Ist P revertierbarer Prozeß von MS, so auch jeder Teilprozeß von P .

Wegen des Nullprozesses ist es, wie wir gesehen haben, unmöglich, daß alle Prozesse einer Prozeßklasse nicht-revertierbar sind. Wir werden es häufig mit dem

entgegengesetzten Fall zu tun haben, daß alle Prozesse revertierbar sind. Dies ist der Anlaß für folgende Definition:

D 13.12: Sind alle Prozesse der Prozeßklasse eines materiellen Systems revertierbar, so heißt das *materielle System* **revertierbar**.

S 13.13: Sei MS revertierbares materielles System, so gilt:
Ist MS' aus MS herstellbar, so auch MS aus MS'.
Die dazugehörigen Zustandsräume Z und Z' sind identisch.

13.2 Alternde materielle Systeme

Eine interessante Klasse innerhalb der nicht-revertierbaren materiellen Systeme bilden die alternden Materialien. Darunter verstehen wir - grob gesagt - Systeme, deren Wirkungen explizit von der Dauer der Prozesse abhängen können. Beispiele sind Gummi, der mit der Zeit spröde wird, oder Beton, bei dem sich die Viskosität mit der Zeit ändert.

D 13.14: Ein materielles System heißt **alternd**, falls gilt:
Prozesse sind nur dann π-äquivalent, falls sie von gleicher Dauer sind.

Daraus folgt trivialerweise

S 13.15: Bei alternden materiellen Systemen gibt es keine Kreisprozesse außer dem Nullprozeß.

Bei solchen Systemen liegt es nahe, die Dauer von Herstellungsprozessen als eine Komponente des Zustandes zu betrachten.

14. Materielle Isomorphie

Wir haben bei unseren bisherigen Überlegungen dem Fußpunkt-Index $X \in B$ wenig Bedeutung beigemessen. Dies ändert sich nun: Wir werden im folgenden Abschnitt materielle Systeme mit verschiedenen Fußpunkten miteinander vergleichen. Dabei soll der Vorstellung davon, daß zwei verschiedene Körperpunkte "aus demselben Material bestehen", eine präzise Bedeutung gegeben werden.

Das führt uns zum Konzept der *materiellen Isomorphie* von materiellen Systemen. Das Vorgehen ist aus der Mathematik bekannt, wo zwischen Mengen mit Strukturen (z. B. metrischen, algebraischen, topologischen, Ordnungsstrukturen) Isomorphismen als umkehrbare Abbildungen definiert werden, die mit den jeweiligen Strukturen verträglich sind. Die so etablierten isomorphen Räume haben dieselben Eigenschaften, und es reicht aus, an einem Repräsentanten deren Eigenschaften stellvertretend für die aller dazu isomorphen Räume zu untersuchen.

Das Konzept der *materiellen Isomorphie* wurde von NOLL entwickelt und später (1972) in den Rahmen der neuen Theorie einfacher Stoffe eingepaßt. Das hier benutzte Konzept stellt eine Verallgemeinerung des NOLLschen dar, in dem der Zustands-Begriff - wie in der gesamten Theorie - nicht grundlegend, sondern abgeleitet ist.

Seien T_XB und T_YB zwei n-dimensionale Vektorräume. Sie sind grundsätzlich isomorph zueinander und die Isomorphismen sind die invertierbaren linearen Abbildungen $Iso(T_XB, T_YB)$.

Sei $\mathbf{A} \in Iso(T_XB, T_YB)$, so ist

$\mathbf{A}^{-1} \in Iso(T_YB, T_XB)$ die Inverse von $\mathbf{A}$,

$\mathbf{A}^* \in Iso(T_Y{}^*B, T_X{}^*B)$ die Adjunkte von $\mathbf{A}$,

$\mathbf{A}^{-*} := (\mathbf{A}^*)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^* \in Iso(T_X{}^*B, T_Y{}^*B)$
die Duale von $\mathbf{A}^{-1}$ und zugleich die Inverse von $\mathbf{A}^*$.

Der Isomorphismus $\mathbf{A} \in Iso(T_XB, T_YB)$ läßt sich geometrisch als Identifikation der materiellen Linienelemente (Tangentenvektoren) in X an B mit denjenigen in Y an B interpretieren. Mittels $\mathbf{A}$ können wir ein inneres Produkt (z. B. die Konfiguration des Körperlementes) $G_X \in Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$ auf T_YB übertragen, indem wir bilden

$$G_Y := A^{-*}\, G_X\, A^{-1} : T_YB \;\rightarrow\; T_Y{}^*B \;.$$

S 14.1: Für jedes innere Produkt $G_X \in Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$ und jeden Isomorphismus $A \in Iso(T_XB, T_YB)$ ist

$$G_Y := A^{-*}\, G_X\, A^{-1}$$

ein inneres Produkt auf T_YB ; d. h. $G_Y \in Sym^+(T_YB, T_Y{}^*B)$.

B: Symmetrie: $\quad G_Y{}^* = A^{-*}\, G_X{}^*\, A^{-1} = G_Y$

positive Definitheit:

$$<G_X(u), u> \;>\; 0 \qquad \forall\; u \neq o \in T_XB \;.$$

Sei $\quad v := A(u)$ und A invertierbar

$$\Rightarrow \qquad <G_Y(v), v> \;>\; 0 \qquad \forall\; v \neq o \in T_YB \;. \boxtimes$$

Die folgenden Aussagen sind offensichtlich:

S 14.2: Sei $A \in Iso(T_XB, T_YB)$.
Ist $P(\cdot)$ Prozeß mit Werten in $Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$, so ist $A^{-*} \cdot P(\cdot) \cdot A^{-1}$ Prozeß mit Werten in $Sym^+(T_YB, T_Y{}^*B)$.

Erfüllt P die Prozeßklassenaxiome $P1$ - 4 (s. D 12.2), so auch

$$A^{-*}\, P\, A^{-1} := \{A^{-*}\, P(\cdot)\, A^{-1} \,|\, P(\cdot) \in P\} \,.$$

Für alle $P_2 \cdot P_1 \in P$ gilt:

$$A^{-*}\, (P_2 \cdot P_1)\, A^{-1} = (A^{-*}\, P_2\, A^{-1}) \cdot (A^{-*}\, P_1\, A^{-1}) \,.$$

Wir sehen, daß aus einer Identifikation der Tangentialräume in X und Y eine Identifizierung von Prozeßklassen in X und Y möglich wird. Ähnliches gilt für die intrinsischen Spannungen:

Für $A \in Iso(T_XB, T_YB)$ und $S \in Sym(T_X{}^*B, T_XB)$ folgt:

$$A\, S\, A^* \in Sym(T_Y{}^*B, T_YB) \;.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweisen definieren wir für $A \in Iso(T_XB, T_YB)$

$$A : Lin(T_X{}^*B, T_XB) \rightarrow Lin(T_Y{}^*B, T_YB)$$

durch

$$A(L) := A\, L\, A^* \qquad \forall\; L \in Lin(T_X{}^*B, T_XB) \;.$$

$$\begin{tikzcd}
T_XB \arrow[d, "A"'] & T_X{}^*B \arrow[l, "L"'] \\
T_YB & T_Y{}^*B \arrow[l, "A(L)"] \arrow[u, "A^*"']
\end{tikzcd}$$

Dann folgt natürlicherweise:

$$A^{-1} = A^{-1} (\cdot)\, A^{-*} \;:\; Lin(T_Y{}^*B, T_YB) \rightarrow Lin(T_X{}^*B, T_XB)$$

$$A^* = A^* (\cdot)\, A \;:\; Lin(T_YB, T_Y{}^*B) \rightarrow Lin(T_XB, T_X{}^*B)$$

$$A^{-*} = A^{-*} (\cdot)\, A^{-1} \;:\; Lin(T_XB, T_X{}^*B) \rightarrow Lin(T_YB, T_Y{}^*B) \;,$$

so daß

$$A^{-1}\, A = I \qquad \text{auf } Lin(T_X{}^*B, T_XB)$$

und

$$A^{-*}\, A^* = I \qquad \text{auf } Lin(T_YB, T_Y{}^*B) \,.$$

Es gilt also die Implikation

$$A \in Iso(T_XB, T_YB) \;\Rightarrow\; A = A\, (\cdot)\, A^* \in Iso\,[Lin(T_X{}^*B, T_XB), Lin(T_Y{}^*B, T_YB)] \;.$$

Wir kommen nun zu der grundlegenden Definition dieses Kapitels.

D 14.3: Zwei materielle Elemente MS_1 und MS_2 heißen **materiell isomorph**, falls es einen **materiellen Isomorphismus**

$$A \in Iso(T_XB, T_YB)$$

gibt, so daß gelten:

$$(I1) \qquad P_2 = A^{-*}\, (P_1)$$

$$(I2) \qquad A\, F_1\, (P_1) = F_2\, A^{-*}(P_1) \qquad \forall\, P_1 \in P_1 \,.$$

S 14.4: Materielle Isomorphie definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der materiellen Systeme.

B: Reflexivität: nimm $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{T_x B}$

Transitivität: nimm $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_1$

Symmetrie: nimm $\mathbf{A}^{-1}$. ⊠

Der folgende Satz zeigt, daß die materielle Isomorphie durch "parallele" Herstellungen nicht verloren geht.

S 14.5: Ist $\mathbf{A}$ materieller Isomorphismus zwischen MS_1 und MS_2, so auch zwischen $h_1(P)$ und $h_2(\mathbf{A}^{-*}(P))$ für alle $P \in \mathbf{P}_1$.

B: Folgt sofort aus der Herstellungs-Definition in Verbindung mit *(I1)* und *(I2)*. ⊠

S 14.6: Sei $\mathbf{A}$ materieller Isomorphismus zwischen MS_1 und MS_2.
Dann bildet $\mathbf{A}^{-*}$

a) z-äquivalente Prozesse in z-äquivalente,
b) Kreisprozesse in Kreisprozesse,
c) revertierbare in revertierbare Prozesse,
d) nicht-revertierbare in nicht-revertierbare Prozesse

ab.

B: a) Seien $P_1, P_2 \in \mathbf{P}$

$$P_1 \; z \; P_2 \quad \Leftrightarrow \quad h_1(P_1) = h_1(P_2)$$

MS_1 ist $\mathbf{A}$-isomorph zu MS_2

$\Rightarrow$ $h_1(P_i)$ ist $\mathbf{A}$-isomorph zu $h_2(\mathbf{A}^{-*}(P_i))$ für $i = 1, 2$ nach S 14.5.

Mit *(I1)*, *(I2)* folgt

$$h_2(\mathbf{A}^{-*}(P_1)) = h_2(\mathbf{A}^{-*}(P_2)) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^{-*}(P_1) \; z \; \mathbf{A}^{-*}(P_2).$$

b) $\mathbf{A}^{-*}$ bildet den Nullprozeß von $\mathbf{P}_1$ in den Nullprozeß von $\mathbf{P}_2$ ab. Dann folgt aus a) auch b).

c) Sei $P \in \mathbf{P}_1$ revertierbar, so existiert ein Kreisprozeß P', der P als Teilprozeß enthält. Mit b) ist $\mathbf{A}^{-*}(P')$ Kreisprozeß für MS_2, der $\mathbf{A}^{-*}(P)$ als Teilprozeß enthält, welcher damit revertierbar ist.

d) Folgt mit c) und der Symmetrie der materiellen Isomorphie. ⊠

Wir kommen nun zur exakten Formulierung dessen, was wir anschaulich unter *aus demselben Material bestehend* verstehen.

D 14.7: Zwei materielle Systeme heißen m-**äquivalent**, falls es für beide revertierbare Herstellungsprozesse gibt, so daß die über sie hergestellten materiellen Systeme materiell isomorph sind.
Die Äquivalenzklassen heißen **Material**.

Hierbei können die Herstellungsprozesse auch Nullprozesse sein.

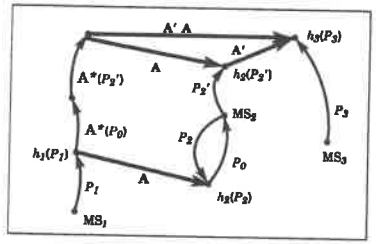
Damit die Definition sinnvoll ist, muß nachgewiesen werden, daß es sich wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt.

S 14.8: m ist eine Äquivalenzrelation zwischen materiellen Systemen.

B: a) Reflexivität: nimm $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{T_x B}$ und den Nullprozeß als Herstellungsprozeß.

b) Symmetrie: folgt aus der Symmetrie der Definition.

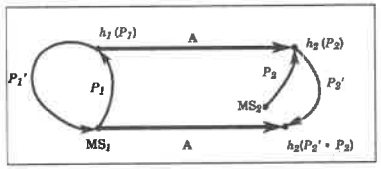
c) Transitivität:
Sei $\mathrm{MS}_1 \; m \; \mathrm{MS}_2$, dann gibt es ein $P_1 \in \mathbf{P}_1$ revertierbar, $P_2 \in \mathbf{P}_2$ revertierbar und einen materiellen Isomorphismus $\mathbf{A}$ zwischen $h_1(P_1)$ und $h_2(P_2)$.



Sei MS_2 m MS_3, dann gibt es $P_2' \in \mathbf{P}_2$ revertierbar, $P_3 \in \mathbf{P}_3$ revertierbar, und materiellen Isomorpismus A' zwischen $h_2(P_2')$ und $h_3(P_3)$.
Dann gibt es außerdem einen Prozeß P_0, so daß $P_0 \circ P_2 \in \mathbf{P}_2$ Kreisprozeß ist.
P_0 kann man mit allen Prozessen aus $\mathbf{P}_2$ fortsetzen, also auch mit P_2'. Der Gesamtprozeß $P_2' \circ P_0 \circ P_2$ ist revertierbar und zu P_2' z-äquivalent.
Dann ist $A^*(P_2' \circ P_0) \circ P_1 \in \mathbf{P}_1$ revertierbar. $h_1(A^*(P_2' \circ P_0) \circ P_1)$ ist materiell isomorph $h_2(P_2')$ mittels A und damit auch zu $h_3(P_3)$ mittels $A'A$. ⊠

S 14.9: Zwei materielle Systeme sind genau dann m-äquivalent, wenn es zu *einem* (beliebigen) der beiden materiellen Systeme einen revertierbaren Prozeß gibt, so daß das darüber hergestellte materielle System dem anderen materiell isomorph ist.

B: MS_1 m MS_2 $\Leftrightarrow$ es gibt $P_1 \in \mathbf{P}_1$, $P_2 \in \mathbf{P}_2$, beide revertierbar, so daß $h_1(P_1)$ materiell isomorph zu $h_2(P_2)$ bez. A ist.



Da P_1 revertierbar ist, läßt sich P_1 mittels eines P_1' zu einem Kreisprozeß fortsetzen, so daß P_1' aus der Prozeßklasse von $h_1(P_1)$ und revertierbar ist.
Der Prozeß

$$P_2' := A^{-*}(P_1')$$

ist revertierbar für $h_2(P_2)$, und damit ist auch $P_2' \circ P_2$ revertierbar für MS_2.
Gemäß **S 14.5** ist $h_2(P_2' \circ P_2)$ materiell isomorph zu $h_1(P_1' \circ P_1) = MS_1$ bez. A.
Die umgekehrte Richtung des Beweises ist trivial. ⊠

Man beachte, daß der materielle Isomorphismus für beide Fälle der gleiche ist.

$P_2' \circ P_2$ ist im übrigen genau dann ein Kreisprozeß, wenn P_2 z $A^{-*}(P_1)$ ist, was i. allg. nicht zu erwarten ist.

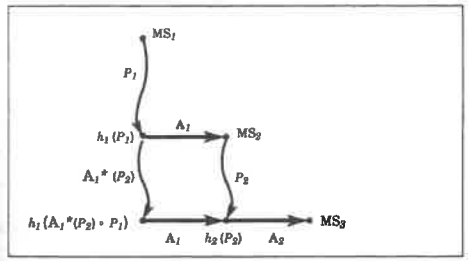
Es kann der Fall auftreten, daß zwei materielle Systeme gegeben sind, die zwar nicht aus dem gleichen Material sind, aber die Eigenschaft haben, daß man - anschaulich gesagt - aus dem einen Material das andere herstellen kann. Dies wäre eine Verallgemeinerung des bereits definierten Herstellbarkeits-Begriffes auf materielle Systeme mit verschiedenen Fußpunkten.

D 14.10: MS_1 und MS_2 seien zwei materielle Systeme. Wir sagen:
MS_2 ist aus MS_1 **herstellbar**, falls es einen Prozeß $P \in \mathbf{P}_1$ gibt, so daß

$$h_1(P) \quad m \quad MS_2 .$$

Hierbei braucht P nicht revertierbar zu sein. Ist dies trotzdem der Fall, so fällt dieser Herstellungs-Begriff mit der m-Äquivalenz zusammen.

S 14.11: Herstellbarkeit ist eine transitive Relation, d. h.
sind MS_2 aus MS_1 herstellbar
und MS_3 aus MS_2 herstellbar,
so ist MS_3 aus MS_1 herstellbar.



B: Gemäß den beiden Prämissen gibt es Prozesse $P_1 \in \boldsymbol{P}_1$, $P_2 \in \boldsymbol{P}_2$, so daß

$$h_1(P_1) \quad \text{materiell isomorph} \quad \mathrm{MS}_2 \quad \text{bez. } \mathrm{A}_1 ,$$

$$h_2(P_2) \quad \text{materiell isomorph} \quad \mathrm{MS}_3 \quad \text{bez. } \mathrm{A}_2 .$$

Dann ist auch

$$h_1(\mathrm{A}_1{}^*(P_2) \circ P_1) \quad \text{materiell isomorph} \quad \mathrm{MS}_3 \quad \text{bez. } \mathrm{A}_2\,\mathrm{A}_1 . \qquad \boxtimes$$

D 14.12: Ein Material heißt aus einem anderen **herstellbar**, falls dieses für je einen Repräsentanten beider Materialien gilt (und damit für alle).

Man kann sich leicht überlegen, daß sich aus revertierbaren Materialien nur revertierbare herstellen lassen, es dagegen bei nicht-revertierbaren Materialien vom Herstellungsprozeß abhängt, ob das hergestellte Material revertierbar ist oder nicht. Ist der Herstellungsprozeß revertierbar, so ist das hergestellte Material auf keinen Fall revertierbar.

Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen Zustandsraum und materieller Isomorphie untersucht werden.

Sei $\mathrm{MS} = (X, \boldsymbol{P}, F)$ materielles System; $P_h \in \boldsymbol{P}$ und $\mathrm{MS}' = (X, \boldsymbol{P}', F') := h(P_h)$.
Es war (S 13.5)

$$Z = \theta(\boldsymbol{P}) = \Xi^{-1}(\mathrm{MS}') .$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{P} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, shift left, "\theta"'] & & \boldsymbol{M} \\ & \boldsymbol{Z} \arrow[ul, shift left, "\mu"] \arrow[ur, "\Xi"'] & \end{tikzcd}$$

Als **Auswahlfunktion** bezeichnen wir eine Abbildung

$$\mu : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{P} ,$$

die jedem Zustand einen *beliebigen* Prozeß aus der z-Äquivalenzklasse zuordnet, so daß

$$\theta\,\mu = 1_{\boldsymbol{Z}} .$$

D 14.13: Sei MS_1 materiell isomorph MS_2 bezüglich A .
Die von A **induzierte Bijektion der Zustandsräume** ist die Abbildung

$$\gamma_A : \boldsymbol{Z}_1 \to \boldsymbol{Z}_2$$

definiert durch

$$\gamma_A\,\theta_1 = \theta_2\,\mathrm{A}^{-*} .$$

γ_A läßt sich darstellen mittels einer Auswahlfunktion μ_1 von MS_1 als

$$\gamma_A = \theta_2\,\mathrm{A}^{-*}\,\mu_1 .$$

$$\begin{tikzcd} \text{für } \mathrm{MS}_1 & \text{für } \mathrm{MS}_2 \\ \boldsymbol{P}_1 \arrow[r, "\mathrm{A}^{-*}"] \arrow[d, shift left, "\theta_1"] & \boldsymbol{P}_2 \arrow[d, shift left, "\theta_2"] \\ \boldsymbol{Z}_1 \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[u, shift left, "\mu_1"] & \boldsymbol{Z}_2 \arrow[u, shift left, "\mu_2"] \end{tikzcd}$$

S 14.14: (Bezeichnungen wie oben.) Die Abbildung γ_A ist bijektiv.

B: Ist A materieller Isomorphismus zwischen MS_1 und MS_2 , so ist A^{-1} materieller Isomorphismus zwischen MS_2 und MS_1 .

$$\begin{aligned} \gamma_A\,\theta_1 &= \theta_2\,\mathrm{A}^{-*} && : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{Z}_2 \\ \gamma_{A^{-1}}\,\theta_2 &= \theta_1\,\mathrm{A}^{*} && : \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{Z}_1 \\ \Rightarrow \quad \gamma_{A^{-1}}\,\theta_2\,\mathrm{A}^{-*} &= \theta_1 && = \gamma_{A^{-1}}\,\gamma_A\,\theta_1 . \end{aligned}$$

Da θ_1 surjektiv ist, folgt

$$\gamma_{A^{-1}} = (\gamma_A)^{-1}$$

und ist damit auf ganz $\boldsymbol{Z}_2$ invertierbar. $\boxtimes$

15. Materielle Symmetrie

Das Konzept der materiellen Symmetrie ist mathematisch gesehen nichts anderes als die Spezialisierung der Isomorphismen auf Automorphismen. Die physikalische Bedeutung jedoch ist eine gänzlich andere. Die materielle Isomorphie dient dazu, mathematisch zu präzisieren, was es heißt, daß zwei materielle Systeme dasselbe Material beschreiben. Die materielle Symmetrie hingegen ist ein Werkzeug, um Materialien unter einem speziellen Gesichtspunkt zu klassifizieren. Sie ist zunächst eine mathematische Eigenschaft von materiellen Systemen. Wir werden aber darüber hinaus versuchen, ihr eine physikalisch-anschauliche Bedeutung zu geben.

Vorweg zwei mathematische Definitionen:

D 15.1: Eine **Halbgruppe** ist eine Menge H, auf der eine zweistellige Verknüpfung (hier wie die Hintereinanderschaltung von Funktionen notiert) erklärt ist, so daß gilt:

1) $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in H \Rightarrow \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \in H$

2) Assoziativität: $(\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2) \mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_1 (\mathrm{A}_2 \mathrm{A}_3) \quad \forall \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \in H$

3) es existiert ein neutrales Element:

$\exists\, \mathrm{I}_H \in H$, so daß $\forall \mathrm{A} \in H$ gilt: $\mathrm{A}\,\mathrm{I}_H = \mathrm{I}_H \mathrm{A} = \mathrm{A}$

H heißt **Gruppe**, falls außer den Halbgruppenaxiomen auch noch gilt:

4) es existiert ein inverses Element:

$\forall \mathrm{A} \in H \;\exists\, \mathrm{A}^{-1} \in H$, so daß $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I}_H$

15.1 Die Symmetrie-Halbgruppe

D 15.2: Seien $\mathrm{MS} = (X, \boldsymbol{P}, F)$ materielles System und $\mathrm{A} \in Aut(T_X B)$.
A heißt **Symmetrie-Transformation** von MS, falls ein $P_A \in \boldsymbol{P}$ existiert, so daß MS materiell isomorph zu $h(P_A) := (X, \boldsymbol{P}_A, F_A)$ bez. A ist, d. h. falls

(S1) $\boldsymbol{P}_A = \mathrm{A}^{-*}(\boldsymbol{P})$

(S2) $\mathrm{A}\,F = F_A\,\mathrm{A}^{-*}$.

Die Menge aller Symmetrie-Transformationen von MS heißt **Symmetrie-Halbgruppe** H von MS.

Sie ist für kein materielles System leer, da sie mindestens $\mathrm{I}_{T_X B}$ und $-\mathrm{I}_{T_X B}$ enthält (mit A enthält sie immer auch $-\mathrm{A}$). Wir suchen also aus MS hergestellte materielle Systeme, deren Prozeßklasse und Materialgleichung sich auf einfache Weise, nämlich durch (S1) und (S2) durch die von MS darstellen lassen.

Der Name Symmetrie-*Halbgruppe* erfordert den Nachweis dieser Struktur. Das soll nun geschehen:

S 15.3: H ist Halbgruppe bezüglich Hintereinanderschaltung.

B: 1) " $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in H \Rightarrow \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \in H$ "
Sei A_1 Symmetrie-Transformation zwischen

$$\mathrm{MS} \text{ und } \mathrm{MS}' := h(P_1) = (X, \boldsymbol{P}', F')$$

und A_2 zwischen

$$\mathrm{MS} \text{ und } \mathrm{MS}'' := h(P_2) = (X, \boldsymbol{P}'', F'')$$

mit $P_1, P_2 \in \boldsymbol{P}$. Dann gilt

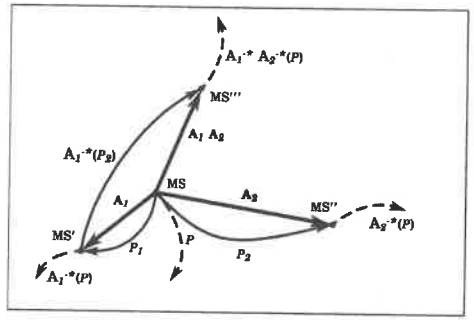
$$\boldsymbol{P}' = \mathrm{A}_1^{-*}(\boldsymbol{P})$$

und speziell auch

$$\mathrm{A}_1^{-*}(P_2) \in \boldsymbol{P}'$$

und demzufolge

$$\mathrm{A}_1^{-*}(P_2) \circ P_1 \in \boldsymbol{P}.$$



Sei

$$MS''' := h[A_1^{\cdot *}(P_2) \circ P_1] =: (X, \mathcal{P}''', F''') .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& P \in \mathcal{P} \\
\Leftrightarrow\quad & A_2^{\cdot *}(P) \in \mathcal{P}'' \\
\Leftrightarrow\quad & A_2^{\cdot *}(P) \circ P_2 \in \mathcal{P} \\
\Leftrightarrow\quad & A_1^{\cdot *}[A_2^{\cdot *}(P) \circ P_2] = A_1^{\cdot *} A_2^{\cdot *}(P) \circ A_1^{\cdot *}(P_2) \in \mathcal{P}' \\
\Leftrightarrow\quad & A_1^{\cdot *} A_2^{\cdot *}(P) \circ A_1^{\cdot *}(P_2) \circ P_1 \in \mathcal{P} \\
\Leftrightarrow\quad & A_1^{\cdot *} A_2^{\cdot *}(P) \in \mathcal{P}''' .
\end{aligned}$$

Es gilt $\forall P \in \mathcal{P}$

$$A_1 F(P) = F' A_1^{\cdot *}(P)$$

und

$$A_2 F(P) = F''' A_2^{\cdot *}(P)$$

und außerdem

$$\begin{aligned}
F'''[A_1^{\cdot *} A_2^{\cdot *}(P)] &= F[A_1^{\cdot *} A_2^{\cdot *}(P) \circ A_1^{\cdot *}(P_2) \circ P_1] \\
&= F'[A_1^{\cdot *} A_2^{\cdot *}(P) \circ A_1^{\cdot *}(P_2)] \\
&= A_1 F[A_2^{\cdot *}(P) \circ P_2] \\
&= A_1 F''[A_2^{\cdot *}(P)] \\
&= A_1 A_2 F(P) .
\end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß mit $A_1, A_2 \in H$ auch $A_1 A_2 \in H$ ist.

2) Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Automorphismen auf $T_X B$ und der Assoziativität der Hintereinanderschaltung von Prozessen.

3) Die Identität $1_H \in H$ ist gleich der Identität $1_{T_X B}$. Dann ist jeder Kreisprozeß, speziell der Nullprozeß, der gesuchte Herstellungsprozeß. ⊠

Ähnlich wie bei der materiellen Isomorphie erhalten wir auch hier eine induzierte Abbildung der Zustandsräume.

D. S 15.4: Sei $MS = (X, \mathcal{P}, F)$ materielles System mit Symmetrie-Halbgruppe H, $A \in H$ mit $MS_A := h(P_A) = (X, \mathcal{P}_A, F_A)$, und θ bzw. θ_A die natürlichen Abbildungen von $\mathcal{P}$ in Z bzw. von $\mathcal{P}_A$ in Z_A.
Dann gibt es genau eine Bijektion

$$\gamma_A : Z \to Z_A ,$$

so daß gilt

$$\gamma_A \theta = \theta_A A^{\cdot *} .$$

γ_A heißt die durch A **induzierte Zustandsraum-Bijektion** und ist darstellbar durch

$$\gamma_A(Z) = \theta[A^{\cdot *} \mu(Z) \circ P_A]$$

für alle $Z \in Z$. Dabei ist $\mu(\cdot)$ Auswahlfunktion (s. S 208).

(siehe Abbildung auf der nächsten Seite)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "A^{-*}"] \arrow[d, shift right, "\theta"'] & P_A \arrow[d, "\theta_A"] \\ Z \arrow[r, "\gamma_A"] \arrow[u, shift right, "\mu"'] & Z_A \end{tikzcd}$$

15.2 Die Symmetriegruppe

D 15.5: Sei $A \in H$, der Symmetrie-Halbgruppe eines materiellen Systems MS, so daß MS materiell isomorph zu $h(P_A)$ bez. A ist. Die Untermenge von H, für die P_A *revertierbar* ist, heißt **Symmetriegruppe** G von MS.

In der Symmetriegruppe sind immer $\pm\, 1_{T_X B}$ enthalten; sie ist also nie leer. Nach der Definition ist die Symmetriegruppe in der Symmetrie-Halbgruppe enthalten. Bei revertierbaren materiellen Systemen falle beide Mengen zusammen. Der folgende Satz dient zur Rechtfertigung des Namens:

S 15.6: G ist Gruppe bezüglich Hintereinanderschaltung.

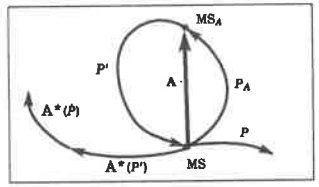
B: 1) " $A_1, A_2 \in G \quad \Rightarrow \quad A_1 A_2 \in G$ "

Nach dem bisher Ermittelten gilt: $A_1 A_2 \in H$.
Es muß also noch nachgewiesen werden, daß aus
" $P_{A_1} \circ P_{A_2}$ revertierbar " folgt: " $A_1^{-*}(P_{A_2}) \circ P_{A_1}$ revertierbar ".
$A_1^{-*}(P_{A_2})$ ist aber revertierbar nach dem Satz **S 14.6 c)**, und die Verknüpfung von revertierbaren Prozessen ist wieder revertierbar nach **S 13.10**.

2) Die Assoziativität wurde schon für H bewiesen.

3) Die Identität ist in G, weil der Nullprozeß revertierbar ist.

4) "es existiert für alle $A \in G$ ein $A^{-1} \in G$ mit $A\, A^{-1} = 1_{T_X B}$ ":
Sei $A \in G$ beliebig und $MS_A = (X, P_A, F_A) = h(P_A)$.



Da P_A revertierbar ist, kann er mittels eines P' zu einem Kreisprozeß $P' \circ P_A \in P$ fortgesetzt werden. Dann gilt:

$$P \in P \quad \Leftrightarrow \quad P \circ P' \circ P_A \in P \quad \Leftrightarrow \quad P \circ P' \in P_A \quad \Leftrightarrow \quad A^*(P \circ P') \in P .$$

Sei $MS_{(A^{-1})} := h[A^*(P')] = (X, P_{(A^{-1})}, F_{(A^{-1})})$.
$A^*(P')$ ist revertierbar, weil P' revertierbar ist. Dann ist

$$P \in P \quad \Leftrightarrow \quad A^*(P) \in P_{(A^{-1})}$$

und

$$\begin{aligned} A\, F_{(A^{-1})}\, A^*(P) &= A\, F[A^*(P) \circ A^*(P')] \\ &= F_A[A^{-*} A^*(P) \circ A^{-*} A^*(P')] \\ &= F_A(P \circ P') \\ &= F(P \circ P' \circ P_A) = F(P) . \end{aligned}$$

Also ist MS A^{-1}-symmetrisch zu $MS_{(A^{-1})}$. ⊠

Wir hatten im Kapitel 13 gesehen, daß der Zustandsraum Z' eines über P hergestellten Materials genau dann gleich dem Zustandsraum Z des Ausgangsmaterials ist, wenn P revertierbar ist. Daraus folgern wir:

S 15.7: Die durch eine Symmetrie-Transformation A induzierte Zustandsraum-Bijektion γ_A leistet genau dann

$$\gamma_A(Z) = Z ,$$

wenn $A \in G$.

Im folgenden benutzen wir die Vereinbarung **A 13.6**

$$Z_A \subset Z$$

und fassen γ_A auf als Abbildung

$$\gamma_A : Z \to Z \ .$$

Sie ist dann für $A \in H$ nur noch injektiv und lediglich für $A \in G$ bijektiv.

S 15.8: Für die durch Symmetrie-Transformationen induzierte Zustandsabbildungen gelten:

a) $A_1 , A_2 \in H \quad \Rightarrow \quad \gamma_{A_1} \gamma_{A_2} = \gamma_{(A_1 A_2)}$

b) $A_1 , A_2 , A_3 \in H \quad \Rightarrow \quad \gamma_{(A_1 A_2)} \gamma_{A_3} = \gamma_{A_1} \gamma_{(A_2 A_3)}$

c) $\gamma_I = I_Z$

d) $A \in G \quad \Rightarrow \quad \gamma_{(A^{-1})} = (\gamma_A)^{-1}$

B: a) Sind P_{A_i} die Herstellungsprozesse, so daß MS A_i-symmetrisch zu $h(P_{A_i})$ ist für $i = 1, 2$. Im Beweis der Halbgruppeneigenschaft von H war gezeigt worden, daß

$$P_{(A_1 A_2)} = A_1^{-*} (P_{A_2}) \circ P_{A_1} \ .$$

Außerdem gilt

$$\gamma_{A_i}(Z) = \theta [A_i^{-*} \mu(Z) \circ P_{A_i}] \ .$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} \gamma_{(A_1 A_2)}(Z) &= \theta [A_1^{-*} A_2^{-*} \mu(Z) \circ P_{(A_1 A_2)}] \\ &= \theta [A_1^{-*} A_2^{-*} \mu(Z) \circ A_1^{-*} (P_{A_2}) \circ P_{A_1}] \ . \end{aligned}$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} \gamma_{A_1} \gamma_{A_2}(Z) &= \theta [A_1^{-*} \mu \ \gamma_{A_2}(Z) \circ P_{A_1}] \\ &= \theta [A_1^{-*} \mu \ \theta \ (A_2^{-*} \mu(z) \circ P_{A_2}) \circ P_{A_1}] \\ &= \theta [A_1^{-*} A_2^{-*} \mu(z) \circ A_1^{-*} (P_{A_2}) \circ P_{A_1}] \ . \end{aligned}$$

Dabei wurde für $\mu \ \theta = I_P$ gewählt.

b) Folgt aus a) und der Assoziativität der Hintereinanderschaltung von Funktionen.

c) Für alle $z \in Z$ gilt

$$\gamma_I(Z) = \theta [\mu(Z) \circ P_I]$$

Wir wählen P_I als Nullprozeß und schließen

$$\gamma_I(Z) = \theta \mu(Z) = Z \ .$$

d) Aus a) folgt mit $A_2 = A_1^{-1}$

$$\gamma_{A_1} \gamma_{(A_1^{-1})} = \gamma_I = I_Z \quad \Rightarrow \quad \gamma_{(A_1^{-1})} = (\gamma_{A_1})^{-1} \ . \qquad \boxtimes$$

Demnach bilden die durch $A \in H$ bzw. G induzierten Zustandsabbildungen bezüglich Hintereinanderschaltung eine Halbgruppe bzw. eine Gruppe, und die Zuordnung, die

$$A \mapsto \gamma_A$$

leistet, stellt einen Gruppen-Homomorphismus dar.

Wir wissen, daß $G \subset H$. Es stellt sich die Frage, ob sich G durch irgend etwas als Untergruppe auszeichnet gegenüber anderen Untergruppen.

S 15.9: Sei MS materielles System mit Symmetriegruppe G und Symmetrie-Halbgruppe H . Dann gilt:
G ist die maximale Gruppe in H ,
d. h. G enthält alle Gruppen in H als Untergruppen.

B: Sei G' Gruppe in H , so gilt

$$A \in G' \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \in G' \ .$$

Dann ist γ_A invertierbar, das Bild von γ_A ist ganz Z und mit S 15.7 der zugehörige Herstellungsprozeß revertierbar. Damit gilt: $G' \subset G$. $\boxtimes$

Ein Spezialfall des Satzes ist der, daß H Gruppe ist (wie beispielsweise bei revertierbaren Materialien). Dann gilt

$$H = G \ .$$

Aus letzterem folgt allerdings nicht, daß das Material revertierbar sein muß. Man denke sich z. B. ein System mit

$$H = G = \{I , -I\}$$

(Der Nullprozeß ist immer revertierbar!). Hier könnte es sogar sein, daß alle Prozesse außer dem Nullprozeß nicht-revertierbar sind.

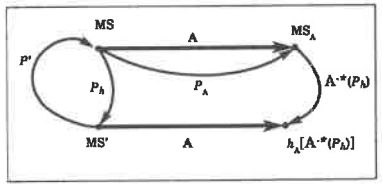
S 15.10: Symmetriegruppe und Symmetrie-Halbgruppe sind invariant unter revertierbaren Herstellungen,
d. h. sei $\mathrm{MS} = \langle X, P, F \rangle$ materielles System mit H und G. Sei $P_h \in P$ revertierbar, und $\mathrm{MS}' := h(P_h) = \langle X, P', F' \rangle$ mit H' und G', so gilt:

$$H = H' \;,\; G = G' \;.$$

B: Da MS auch aus MS' herstellbar ist, genügt es, zu zeigen, daß aus

$$\mathrm{A} \in G \text{ bzw. } H \;\Rightarrow\; \mathrm{A} \in G' \text{ bzw. } H' \;.$$

Sei $\mathrm{A} \in H$ und $\mathrm{MS}_\mathrm{A} := h(P_\mathrm{A})$, so daß MS A-isomorph zu MS_A ist. Sei $P_h \in P$ revertierbar, d. h. ein $P' \circ P_h \in P$ Kreisprozeß für MS. Dann ist gem. **S 14.5** auch $\mathrm{MS}' := h(P_h)$ A-isomorph zu $h_\mathrm{A}[\mathrm{A}^{-*}(P_h)] = h[\mathrm{A}^{-*}(P_h) \circ P_\mathrm{A}] = h'[\mathrm{A}^{-*}(P_h) \circ P_\mathrm{A} \circ P']$
$\Rightarrow \mathrm{A} \in H'$.



Weiterhin gilt

$$\mathrm{A}^{-*}(P_h) \circ P_\mathrm{A} \circ P' \text{ revertierbar} \;\Leftrightarrow\; P_\mathrm{A} \text{ revertierbar}$$

und somit

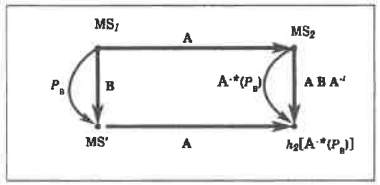
$$\mathrm{A} \in G \;\Leftrightarrow\; \mathrm{A} \in G' \;. \qquad \boxtimes$$

S 15.11: Sei MS_1 materielles System mit Symmetriegruppe G_1 und Symmetrie-Halbgruppe H_1, das zu MS_2 mit G_2 und H_2 A-isomorph ist. Dann gelten:

$$H_2 = \mathrm{A}\, H_1\, \mathrm{A}^{-1} \;;\; G_2 = \mathrm{A}\, G_1\, \mathrm{A}^{-1}$$

B: Sei MS_1 A-isomorph zu MS_2.

Dann ist auch



$$h_1(P_\mathrm{B}) \text{ A-isomorph zu } h_2[\mathrm{A}^{-*}(P_\mathrm{B})] \qquad \forall P_\mathrm{B} \in P_1$$

gemäß **S 14.5**. Ist $\mathrm{B} \in H_1$, so existiert ein $P_\mathrm{B} \in P_1$ mit

$$\mathrm{MS}_1 \text{ B-isomorph zu } h_1(P_\mathrm{B}) \;.$$

Wegen der Transitivität der materiellen Isomorphie ist dann auch

$$\mathrm{MS}_2 \text{ (A B A}^{-1}\text{)-isomorph zu } h_2[\mathrm{A}^{-*}(P_\mathrm{B})] \,,$$

d. h. $\mathrm{A\,B\,A}^{-1} \in H_2$. Vertauscht man 1 und 2, so erhält man die Gegenrichtung.
Ist $\mathrm{B} \in G_1$, so ist P_B revertierbar, wie auch $\mathrm{A}^{-*}(P_\mathrm{B})$, und damit ist $\mathrm{A\,B\,A}^{-1} \in G_2$.

$\boxtimes$

Daraus folgt zusammen mit **S 15.10**, daß das Symmetrie-Konzept material-individuell ist.

Die folgenden Definitionen und Resultate gehen im wesentlichen auf NOLL (1972) zurück.

D 15.12: Sei $Z \in \mathbf{Z}$ und G Symmetriegruppe eines materiellen Elementes. Dann heißt die Menge

$$G(Z) := \{\mathrm{A} \in G \,|\, \gamma_\mathrm{A}(Z) = Z\}$$

Symmetriegruppe des Zustandes.

Damit ist dann $P_\mathrm{A} = \mu(Z)$ Kreisprozeß von MS und somit gelten

$$P_\mathrm{A} = P = \mathrm{A}^{-*}\, P\, \mathrm{A}^{-1}$$

$$F_\mathrm{A} = F \;.$$

Die Ausgabefunktion der Spannungen S (s. D 13.4) und der Konfiguration G sind gleich. Die Gruppeneigenschaft ist Folge davon, daß die Zuordnung

$$\mathbf{A} \mapsto \gamma_{\mathbf{A}}$$

mit der Gruppenstruktur verträglich ist, wie wir gesehen haben (s. S 15.8). Aus

$$G(Z) = G[\gamma_{\mathbf{A}}(Z)]$$

folgt sofort, daß $G(Z)$ Untergruppe der orthogonalen Gruppe $Ort(T_XB, G(Z))$ von T_XB bez. des inneren Produktes $G(Z)$ ist (s. S. 26). Als Folge der Definition von $G(Z)$ gilt verschärft:

$$G(Z) \subset [Ort(T_XB), G(Z)] \cap G .$$

D 15.13: Ein Zustand Z heißt **isotrop**, falls

$$G(Z) = Ort(T_XB, G(Z)) .$$

Ein Material heißt isotrop, falls man revertierbar isotrope Zustände erreichen kann.

S 15.14: In einem isotropen Zustand gilt für die Spannungen:

$$\mathbf{S} = -p\,\mathbf{G}^{-1} \quad , \quad p \in \mathbb{R} .$$

B: Für einen isotropen Zustand Z gilt für den Nullprozeß P_0 mit

$$\mathbf{S} = S(Z) = F(P_0)$$

und

$$P_0(0) = \mathbf{G} :$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-*}\,\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-*}\,\mathbf{G}\,\mathbf{A}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{A}^{-*}\,\mathbf{G}$$

$$F(P_0) = \mathbf{S} = \mathbf{A}\,F_{\mathbf{A}}(P_0) = \mathbf{A}\,F(P_0) = \mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{A}^{*} .$$

Beides zusammen ergibt

$$\mathbf{A}^{*}\,\mathbf{G}\,\mathbf{S} = \mathbf{G}\,\mathbf{S}\,\mathbf{A}^{*} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S}\,\mathbf{G}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{G} \quad \forall \mathbf{A} \in Ort(T_XB, G(Z)) .$$

In der Gruppentheorie wird dann gezeigt, daß $\mathbf{S}$ nur ein skalares Vielfaches von $\mathbf{G}^{-1}$ sein kann. Man kann sich dies leicht klarmachen, indem man $\mathbf{G}$ zur Identität auf T_XB erklärt. Dann gilt

$$\mathbf{A}^{*}\,\mathbf{S}\,\mathbf{A} = \mathbf{S} \qquad \forall \mathbf{A} \in Ort(T_XB) .$$

Stellt man $\mathbf{S}$ spektral dar, so kann man durch geeignete Drehungen $\mathbf{A}$ immer ausschließen, daß zwei Eigenwerte von $\mathbf{S}$ verschieden sind. Also ist $\mathbf{S}$ Vielfaches der Identität (Kugeltensor). ⊠

Ein Beispiel für eine orthogonale Symmetrie-Tansformation ist folgendes:

$$\mathbf{G} = \sum_i \lambda_i\, \mathbf{k}^i \otimes \mathbf{k}^i \;;\; \lambda_i \in \mathbb{R}^{+} \qquad \{\mathbf{k}^i\}, \{\mathbf{t}_i\} \text{ duale Basen}$$

$$\mathbf{A}^{-*} = \sum_i \sqrt{(\lambda_{(i+1)}/\lambda_i)}\; \mathbf{k}^{(i+1)} \otimes \mathbf{t}_i \in Ort(T_XB, \mathbf{G}),$$

wobei für $i = 3$ gesetzt wird: $i + 1 \equiv 1$.

D 15.15: Ein materielles System heißt **Fluid** oder **Gas**, falls gilt: die Symmetriegruppe enthält die unimodulare Gruppe:

$$G \supset Unim(T_XB) .$$

Es ist üblich, davon auszugehen, daß die Symmetriegruppe grundsätzlich nur unimodulare Elemente enthält, weil Dichteänderungen bei jedem realen Material das Verhalten ändern dürften.

15.3 Materielle Systeme in intrinsischer und bezogener Beschreibungsweise und ihre Symmetriegruppe

Sei P Prozeß und $t \in [0,d]$ der Zeitparameter des Prozesses. Da die momentanen Werte von P Konfigurationen des Körperelementes sind, werden wir dafür auch $\mathbf{G}_t$ schreiben. Analog sind dann $\mathbf{F}_t$, $\mathbf{C}_t$, etc. Prozesse mit $t \in [0,d]$, deren Werte momentan dem Deformationsgradienten, dem rechten *Cauchy-Green*-Tensor, etc. entsprechen. Ihr Endwert des jeweiligen Prozesses wird folglich als $\mathbf{F}_d$, $\mathbf{C}_d$, etc. bezeichnet. Es sind dann

$\mathbf{K}_t$: die Plazierung des Körperelementes

$\mathbf{K}_0$: die Bezugsplazierung des Körperelementes

$\mathbf{F}_t := \mathbf{K}_t\,\mathbf{K}_0^{-1}$ der Deformationsgradient

$\mathbf{G}_t := \mathbf{K}_t^{*}\,\mathbf{K}_t = P(t)$ die lokale Konfiguration

$\mathbf{C}_t := \mathbf{F}_t^{*}\,\mathbf{F}_t = \mathbf{K}_0^{-*}\,\mathbf{K}_t^{*}\,\mathbf{K}_t\,\mathbf{K}_0^{-1} = \mathbf{K}_0^{-*}\,\mathbf{G}_t\,\mathbf{K}_0^{-1}$

der rechte *Cauchy-Green*-Tensor

S_t : der intrinsische Spannungstensor

$T_t := K_t S_t K_t^*$ der *Eulersche* Spannungstensor

$T^{2PK}_t := det(F_t)\, F_t^{-1} T_t F_t^{-*} = \sqrt{(det C_t)}\, F_t^{-1} T_t F_t^{-*}$

der 2. *Piola-Kirchhoff*-Tensor

zur Zeit $t \in [0,d]$.

Wir schreiben das intrinsische Stoffgesetz als Funktional F in der Form

$$F\langle G_t\rangle := F(P) = S_d ,$$

wobei die Klammern $\langle\ \rangle$ symbolisiern sollen, daß das Argument ein G - *Prozeß* ist. Seine Umrechnung in die bezogene Form erfolgt durch

$$\begin{aligned} T_d &= K_d\, F\langle G_t\rangle\, K_d^* \\ &= K_d\, F\langle K_t^*\, K_t\rangle\, K_d^* \\ &= K_d\, K_o^{-1} K_o\, F\langle K_o^*\, K_o^{-*} K_t^*\, K_t\, K_o^{-1} K_o\rangle\, K_o^*\, K_o^{-*} K_d^* \\ &= F_d\, K_o\, F\langle K_o^*\, F_t^*\, F_t\, K_o\rangle\, K_o^*\, F_d^* \\ &=: J\langle F_t\rangle \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} T^{2PK}_d &= \sqrt{(det C_d)}\, F_d^{-1} T_d F_d^{-*} \\ &= \sqrt{(det C_d)}\, F_d^{-1} F_d\, K_o\, F\langle K_o^*\, C_t\, K_o\rangle\, K_o^*\, F_d^*\, F_d^{-*} \\ &= \sqrt{(det C_d)}\, K_o\, F\langle K_o^*\, C_t\, K_o\rangle\, K_o^* \\ &=: E\langle C_t\rangle . \end{aligned}$$

Wir wollen als nächstes untersuchen, wie die Symmetrie-Transformationen in der bezogenen Darstellung erscheinen.

Sei $A \in G(Z)$ aus der Symmetriegruppe eines Zustandes. Das bedeutet für alle Prozesse nach *(S2)*

$$A\, F\langle G_t\rangle\, A^* = F_A\langle A^{-*}\, G_t\, A^{-1}\rangle = F\langle A^{-*}\, G_t\, A^{-1}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad F\langle G_t\rangle = A^{-1}\, F\langle A^{-*}\, G_t\, A^{-1}\rangle\, A^{-*} ,$$

worin F_A analog zu F_A definiert ist. Wir setzen

$$A_o := K_o\, A^{-1}\, K_o^{-1} \quad ; \quad A_o^* = K_o^{-*}\, A^{-*}\, K_o^*$$

oder

$$A = K_o^{-1}\, A_o^{-1}\, K_o \quad ; \quad A^{-1} = K_o^{-1}\, A_o\, K_o \quad ; \quad A^{-*} = K_o^*\, A_o^*\, K_o^{-*} .$$

Dann gilt

$$A \in G \quad \Leftrightarrow \quad A_o \in \{K_o\, G^{-1}\, K_o^{-1}\}$$

Wir setzen

$$G_t = K_o^*\, C_t\, K_o = K_o^*\, F_t^*\, F_t\, K_o$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} &F\langle K_o^*\, F_t^*\, F_t\, K_o\rangle \\ &= K_o^{-1}\, A_o\, K_o\, F\langle K_o^*\, A_o^*\, K_o^{-*}\, K_o^*\, F_t^*\, F_t\, K_o\, K_o^{-1}\, A_o\, K_o\rangle\, K_o^*\, A_o^*\, K_o^{-*} . \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $F_d\, K_o$ von links und $K_o^*\, F_d^*$ von rechts erhalten wir

$$J\langle F_t\rangle = J(F_t\, A_o) \qquad \forall A_o \in \{K_o\, G^{-1}\, K_o^{-1}\} .$$

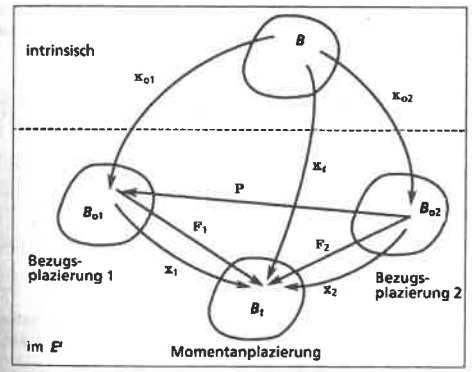
Ist A unimodular, so auch A_o , womit folgt

$$det C_d = det(A_o^*\, C_d\, A_o)$$

und

$$A_o^{-1}\, E\langle C_t\rangle\, A_o^{-*} = E\langle A_o^*\, C_t\, A_o\rangle \qquad \forall A_o \in \{K_o\, G^{-1}\, K_o^{-1}\} .$$

Die Gruppe $\{K_o\, G^{-1}\, K_o^{-1}\}$ ist demnach die **Symmetrie-Gruppe in der bezogenen Darstellung**. Sie hängt, wie schon die Materialfunktionale J und E , von der Bezugsplazierung ab. Die Symmetrie-Transformation wird oft als Wechsel der Bezugsplazierung gedeutet, unter dem J invariant ist (s. Abschnitt 8.3).



Sind nämlich κ_{o1} und κ_{o2} zwei Bezugsplazierungen und

$$\mathbf{P} := Grad(\kappa_{o1}\,\kappa_{o2}^{-1}) = \mathbf{K}_{o1}\,\mathbf{K}_{o2}^{-1}\,,$$

so daß

$$\mathbf{F}_{t2} = \mathbf{F}_{t1}\,\mathbf{P}\,,$$

so gilt für die Funktionale bez. der beiden Bezugsplazierungen

$$J_1\langle\mathbf{F}_{t1}\rangle = J_2\langle\mathbf{F}_{t1}\,\mathbf{P}\rangle\,.$$

Sind die beiden Bezugsplazierungen nun so gewählt, daß $\mathbf{P} = \mathbf{A}_o \in \{\mathbf{K}_o\,\mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{K}_o^{-1}\}$, so folgt weiter

$$J_1\langle\mathbf{F}_{t1}\,\mathbf{P}\rangle = J_1\langle\mathbf{F}_{t1}\rangle$$

und damit

$$J_1\langle\mathbf{F}_{t1}\rangle = J_1\langle\mathbf{F}_{t2}\rangle\,.$$

Man zeigt, daß

$$\mathbf{A} \in Ort(T_X\mathcal{B}\,,\mathbf{G}_o) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_o \in Ort(V)$$

vermittels

$$\mathbf{A}_o^{*}\,\mathbf{A}_o = \mathbf{K}_o^{-*}\,\mathbf{A}^{-*}\,\mathbf{K}_o^{*}\,\mathbf{K}_o\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{K}_o^{-1} = \mathbf{I}\,.$$

Materialien, deren Symmetriegruppe (echte) Untergruppe der orthogonalen Gruppe ist, heißen (anisotrope) **Festkörper**. Materialien, die nicht isotrop sind, aber auch nicht-orthogonale Symmetrie-Transformationen besitzen, heißen **flüssige Kristalle**.

Daß isotrope Körper entweder isotrope Festkörper oder Fluide sind, folgt aus dem Satz

S 15.16: Die orthogonale Gruppe ist maximal in der unimodularen Gruppe.

B: s. BRAUER, NOLL (1965).

Isotrope Elastizität

Betrachten wir speziell isotrope *elastische* Materialien (s. S. 188), so gelangen wir zu konkreten Darstellungen der Materialfunktionale, die jetzt nur noch von dem jeweiligen Prozeßendwert abhängen. Deswegen können wir die eckigen Klammern

der Funktionale wieder durch runde ersetzen. Wir brauchen auch nicht mehr zwischen den Zeit-Indizes t und d unterscheiden und lassen sie deshalb weg.

Ist $\mathbf{G}_o$ isotroper (Anfangs-)Zustand, so gilt für die Materialfunktion des 2. *Piola-Kirchhoff*-Tensors (s. S. 222)

$$\mathbf{A}_o\,E(\mathbf{C})\,\mathbf{A}_o^{*} = E(\mathbf{A}_o\,\mathbf{C}\,\mathbf{A}_o^{*}) \qquad \forall\,\mathbf{A}_o \in Ort(V)\,.$$

Eine Funktion $E(\cdot)$, die dieser Bedingung genügt, heißt **isotrope Tensorfunktion**. Für sie gilt der

S 15.17: **Darstellungssatz für isotrope Tensorfunktion** (*Rivlin / Ericksen*, 1955)
Jede isotrope Tensorfunktion

$$E : Sym^{+}(V,V) \rightarrow Sym(V,V)$$

läßt sich darstellen als

$$\begin{aligned} E(\mathbf{C}) &= \mu_o\mathbf{I} + \mu_1\,\mathbf{C} + \mu_2\,\mathbf{C}^2 \\ &= \psi_o\mathbf{I} + \psi_1\,\mathbf{C} + \psi_2\,\mathbf{C}^{-1} \end{aligned}$$

wobei die reellen Funktionen μ_i und ψ_i von den Hauptinvarianten von $\mathbf{C}$ abhängen:

$$\mu_i(\mathrm{I}_{\mathbf{C}}\,,\mathrm{II}_{\mathbf{C}}\,,\mathrm{III}_{\mathbf{C}})$$

$$\psi_i(\mathrm{I}_{\mathbf{C}}\,,\mathrm{II}_{\mathbf{C}}\,,\mathrm{III}_{\mathbf{C}})\,.$$

Sie sind eindeutig, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{C}$ verschieden sind.

B: s., z. B., WANG/TRUESDELL S. 179 f.

Wir erhalten für die *isotropen elastischen Materialfunktionen* die äquivalenten Darstellungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{T}^{PK} &= \lambda_o\mathbf{I} + \lambda_1\mathbf{C} + \lambda_2\mathbf{C}^2 && \text{mit } \lambda_i(\mathrm{I}_{\mathbf{C}}\,,\mathrm{II}_{\mathbf{C}}\,,\mathrm{III}_{\mathbf{C}}) \\ \mathbf{T} &= \alpha_o\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{B} + \alpha_2\mathbf{B}^2 && \text{mit } \alpha_i(\mathrm{I}_{\mathbf{B}}\,,\mathrm{II}_{\mathbf{B}}\,,\mathrm{III}_{\mathbf{B}}) \\ \mathbf{S} &= \alpha_o\mathbf{G}^{-1} + \alpha_1\mathbf{G}_o^{-1} + \alpha_2\mathbf{G}_o^{-1}\,\mathbf{G}\,\mathbf{G}_o^{-1} && \text{mit } \alpha_i(\mathrm{I}_{\mathbf{G}\mathbf{G}_o^{-1}}\,,\mathrm{II}_{\mathbf{G}\mathbf{G}_o^{-1}}\,,\mathrm{III}_{\mathbf{G}\mathbf{G}_o^{-1}}) \end{aligned}}$$

Um zu der Materialfunktion der **klassischen** (d. h. linearen) **Elastizitätstheorie** zu gelangen, verwenden wir die Beziehungen für kleine Verformungen von Abschnitt 8.5 und linearisieren die Materialfunktionen in dem linearisierten *Green*schen Verzerrungstensor $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$.
Bei kleinen Verformungen fallen die Spannungstensoren zusammen:

$$\mathbf{T} \approx \mathbf{T}^{1PK} \approx \mathbf{T}^{2PK} .$$

Wir erhalten das ***Hooke*sche Gesetz** als allgemeine Darstellung für lineare isotrope elastische Materialien bezogen auf eine spannungsfreie Bezugsplazierung

$$\mathbf{T} = \lambda \, sp(\mathbf{E}) \, \mathbf{I} + 2\mu \, \mathbf{E}$$

mit den *Lamé*schen Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Man beachte, daß bei kleinen Verformungen nach den Befunden aus Abschnitt 8.5 $sp\,\mathbf{E}$ ein Maß für die Dichtedifferenz zwischen (spannungsfreier) Bezugsplazierung $(\mathbf{E} = \mathbf{0})$ und der Momentanplazierung $\mathbf{E}$ ist. Das *Hooke*sche Gesetz erfüllt allerdings nicht mehr das Prinzip der materiellen Objektivität und kann deshalb nicht in die intrinsische Form gebracht werden.

ROBERT HOOKE 1635 - 1703
GABRIEL LAMÉ 1795 - 1870

Elastische Fluide und Gase

S 15.18: Für elastische Fluide oder Gase mit $\mathcal{G} = \mathit{Unim}(T_X B)$ gilt die allgemeine Darstellung

$$\mathbf{T} = \alpha_0(\rho) \, \mathbf{I} ,$$

nach der die Spannungen nur aus einem hydrostatischen Druck bestehen, der von der momentanen Dichte abhängt.

B: Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

1) " $\mathbf{T} = \alpha_0(\rho) \, \mathbf{I} \Rightarrow \mathcal{G} = \mathit{Unim}(T_X B)$ "

weil

$$\det \mathbf{B} = \det(\mathbf{F}\mathbf{F}^*) = \det^2 \mathbf{F} = (\rho_0/\rho)^2 = (\det \mathbf{F})^2 (\det \mathbf{A}_0)^2 = \det^2(\mathbf{F}\mathbf{A}_0) \quad \forall \, \mathbf{A}_0 \in \mathit{Unim}(V).$$

2) " $\mathcal{G} = \mathit{Unim}(T_X B) \Rightarrow \mathbf{T} = \alpha_0(\rho) \, \mathbf{I}$ "

Wir wählen $\mathbf{A}_0 = (\det \mathbf{F})^{\frac{1}{3}} \mathbf{F}^{-1} \in \mathit{Unim}(V)$ und setzen in die zweite Darstellung isotroper elastischer Materialfunktionen in die Symmetrie-Bedingung $J(\mathbf{F}) = J(\mathbf{F}\mathbf{A}_0)$ ein. Dann folgt, daß $\mathbf{T}$ nur Kugeltensor sein kann. Die skalare Funktion kann aber nur von der Determinante von $\mathbf{B}$ abhängen, da die beiden anderen Hauptinvarianten durch unimodulare $\mathbf{A}_0$ in $\mathbf{F}\mathbf{A}_0\mathbf{A}_0^*\mathbf{F}^*$ beliebig verändert werden können. ☒

Damit sind Zähigkeitseffekte freilich nicht beschreibbar: elastische Fluide oder Gase sind reibungsfrei. Will man auch viskose Effekte beschreiben, so benutzt man materiellen Systeme vom Differentialtyp vom Grade *1*; sie werden dargestellt durch die Materialfunktion des (kompressiblen) ***Reiner-Rivlin*-Fluids** (s. S. 189)

$$\mathbf{T} = \mu_0 \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{D} + \mu_2 \mathbf{D}^2 \qquad \text{mit} \quad \mu_i(\rho, \mathrm{I}_\mathbf{D}, \mathrm{II}_\mathbf{D}, \mathrm{III}_\mathbf{D}) .$$

Für die (in den Verzerrungsgeschwindigkeiten) *linearen inkompressiblen* (s. S. 253) *Fluide* ergibt sich das ***Navier-Stokes*-Fluid**

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$$

mit dem hydrostatischen Druck $p \in \mathbb{R}$ und der Viskositätskonstante $\mu \in \mathbb{R}^+$.

MARKUS REINER 1886 - 1976
RONALD S. RIVLIN 1915 -
CLAUDE-LOUIS-MARIE-HENRI NAVIER 1785 - 1836
GEORGE GABRIEL STOKES 1819 - 1903

16. Topologien im Zustandsraum

16.1 Uniforme Räume

Empfohlene Literatur: SCHUBERT, KELLEY, BOURBAKI, NOLL (1972)

Bis jetzt hat der Zustandsraum weder eine Metrik noch eine Topologie, geschweige denn eine lineare Struktur. Das Ziel dieses Abschnitts wird es sein, den Zustandsraum in eine Summe von uniformen Räumen zu zergliedern. Dies wird benötigt, um das Konzept der *Relaxation* zu entwickeln, das für das folgende Kapitel über *Geschichtsfunktionale* von grundlegender Bedeutung ist.

Zunächst sollen einige Definitionen aus der Topologie wiederholt werden.

D 16.1: Ein System F von Teilmengen einer Menge M heißt **Filter**, falls gelten:

(F 1): die leere Menge gehört nicht zu F und F ist nicht leer;

(F 2): der Durchschnitt zweier Mengen aus F ist eine Menge aus F;

(F 3): F enthält alle Obermengen von Mengen aus F.

Wir betrachten nun Untermengen von $M \times M$ (Relationen). Die **Diagonale** Δ ist definiert als

$$\Delta := \{(x,x) \mid x \in M\} \subset M \times M .$$

Sei $A \subset M \times M$. A^{-1} ist definiert als

$$A^{-1} := \{(x,y) \mid (y,x) \in A\}$$

und A^2 als

$$A^2 := \{(x,y) \mid \exists z \in M \text{ mit } (x,z) \in A \text{ und } (z,y) \in A\} .$$

D 16.2: Sei U ein Filter auf $M \times M$ mit den Eigenschaften

(U1): jede Menge aus U enthält Δ;

(U2): $V \in U \Rightarrow V^{-1} \in U$;

(U3): zu $V \in U$ $\exists$ ein $W \in U$ mit $W^2 \subset V$.

Dann heißen:

U : **Nachbarschaftsfilter oder Uniformität** von M;

die Elemente von U : **Nachbarschaften**;

(M, U) : **uniformer Raum**;

$(x,y) \in V \in U$: x zu y **benachbart von der Ordnung** V.

D 16.3: Seien (M, U) und (M', U') uniforme Räume. Eine Abbildung

$$f : M \to M'$$

heißt **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem $V' \in U'$ ein $V \in U$ gibt, so daß für alle $x, y \in M$ gilt:

$$(x,y) \in V \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V' .$$

D 16.4: Sei (M, U) uniformer Raum. Eine Menge $N \in M$ heißt **klein von der Ordnung** $V \in U$, falls je zwei Punkte aus N von der Ordnung V benachbart sind, d. h. $N \times N \subset V$. Ein Mengensystem auf M **enthält beliebig kleine Mengen**, falls es zu jedem $V \in U$ eine Menge in diesem System gibt, die klein von der Ordnung V ist.
Ein Filter auf M heißt ***Cauchy*-Filter**, falls er beliebig kleine Mengen enthält.

S 16.5: In uniformen Räumen ist jeder konvergente Filter auch *Cauchy*-Filter.

(Zur Konvergenz von Filtern s. SCHUBERT S. 42.) In diesem Satz kann man *Filter* auch durch die Begriffe *Netz* oder *Folge* ersetzen.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht, sondern nur für spezielle uniformen Räume:

D 16.6: Ein uniformer Raum heißt **vollständig**, falls jeder *Cauchy*-Filter (-Netz, -Folge) konvergiert.

Zu einem uniformen Raum gehört eindeutig eine Topologie. Sie wird folgendermaßen konstruiert:
Sei (M, U) uniformer Raum und $V \in U$ und $x \in M$, so sei

$$V(x) := \{y \mid (x,y) \in V\} .$$

Diese Mengen bilden die Umgebungen für eine Topologie auf M (s. SCHUBERT, S. 103). Umgekehrt aber determiniert eine Topologie *nicht* eine eindeutige Uniformität. Man kann sich uniforme Strukturen auch durch Metriken oder - schwächer - Quasimetriken erzeugen.

D 16.7: Eine **Quasimetrik** auf M ist eine Abbildung

$$d : M \times M \to [0, \infty] \qquad \text{mit}$$

$$(M1): d(x,x) = 0 \qquad \forall x \in M$$

$$(M2): d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall x,y \in M$$

$$(M3): d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \qquad \forall x,y,z \in M.$$

Eine Quasimetrik ist eine **Metrik**, falls außerdem gelten:

$$(M4): d(x,y) < \infty \qquad \forall x,y \in M$$

$$(M5): d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y .$$

Trägt ein Raum M eine Metrik oder eine Quasimetrik d, so wird dadurch eine Uniformität induziert (und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist für endliche d gleichmäßig stetig): Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so bilden die Mengen

$$V_\varepsilon := \{(x,y) \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

eine Basis eines Nachbarschaftsfilters auf $M \times M$, der eine Uniformität erzeugt.

16.2 Die Zustandsübergangsfunktion

D 16.8: Sei $\mathrm{MS} = (X, P, F)$ materielles System mit Zustandsraum Z und $Z \in Z$ Zustand. Wir bezeichnen mit P_Z die Prozeßklasse des materiellen Systems $S(Z)$. Sei

$$(Z, P_Z) := \{(Z,P) \mid Z \in Z, P \in P_Z\},$$

so können wir die **Zustandsübergangsfunktion**

$$\eta : (Z, P_Z) \to Z$$

definieren als

$$\eta(Z,P) := \theta(P) ,$$

wobei θ die natürliche Abbildung des Systems $S(Z)$ ist.

η ordnet also einem Anfangszustand und einem passenden Prozeß den Endzustand zu. Es gilt folgende *Kettenregel*:

$$\eta(Z, P_2 \circ P_1) = \eta[\eta(Z,P_1), P_2] \qquad \forall (Z, P_2 \circ P_1) \in (Z, P_Z)$$

16.3 Uniforme Strukturen im Zustandsraum

Sei P eine beliebige Prozeßklasse (also nicht unbedingt die von MS), so heißt die Menge der Zustände, in denen das materielle Systeme P als Prozeßklasse hat,

$$Z_P := \{Z \in Z \mid P_Z = P\}$$

P **-Sektion des Zustandsraumes**. Sie stellt eine Faktorisierung von Z dar und ist feiner als die Sektionierung in Zustände mit gleicher Konfiguration, die dem Anfangswert der Prozeßklasse entspricht. Sei S Ausgabefunktion der Spannung und η Zustandsübergangsfunktion des materiellen Systems, so können wir die Hintereinanderschaltung der beiden Funktionen bilden

$$S\,\eta : (Z, P_Z) \to Sym(T_X{}^*B, T_XB) .$$

Wir kommen nun zur **initialen Konstruktion**, d. h. zum Zurückholen der uniformen und topologischen Struktur in den Zustandsraum (s. NOLL 1972).

D 16.9: Wir nennen die gröbste Uniformität, die die Abbildung

$$S\,\eta(\cdot, P)|_{Z_P} : Z_P \to Sym(T_X{}^*B, T_XB)$$

für $\forall P \in P$ *gleichmäßig stetig* macht, die **natürliche Uniformität** von Z_P. Die durch sie induzierte Topologie heißt **natürliche Topologie** von Z_P.

Man könnte nun diese Topologie auf den ganzen Zustandsraum ausdehnen, indem wir diesen als topologische Summe seiner Sektionen betrachten. Dann wären genau diejenigen Teilmengen von Z offen, für die alle Durchschnitte mit Sektionen Z_P, P beliebig, offen sind. Diese Topologie ist jedoch unter physikalischen Gesichtspunkten zu grob, da sie Zustände mit unterschiedlichen Konfigurationen unabhängig von der Standard-Topologie auf dem Konfigurationsraum (als linearem Raum) unterschiedslos behandelt. Wir nehmen deshalb davon Abstand und werden genausowenig versuchen, die Uniformität auf ganz Z auszudehnen.

S 16.10: Sei MS materielles System, Z_P Sektion des Zustandsraumes und η Zustandsübergangsfunktion. Dann ist

$$\eta(\cdot, P)\,|\,Z_P : Z_P \to Z_{P'}$$

für alle $P \in \boldsymbol{P}$ gleichmäßig stetig. Dabei ist $\boldsymbol{P}'$ die Menge der Prozeßfortsetzungen von P aus $\boldsymbol{P}$.

B: Es muß zunächst gezeigt werden, daß die Abbildung tatsächlich existiert, d. h. daß

$$\eta(Z_P, P) \subset Z_{P'}$$

für alle $P \in \boldsymbol{P}$. Da die Prozeßklassen für alle Zustände $Z \in Z_P$ definitionsgemäß gleich sind, ist aber auch die Teilmenge derjenigen Prozesse gleich, die ein P als Teilprozeß enthalten. $\eta(\cdot, P)\,|\,Z_P$ ist dann eine Abbildung des uniformen Raumes Z_P in $Z_{P'}$, wobei $Z_{P'}$ die durch

$$S\,\eta(\cdot, P')\,|\,Z_{P'} \qquad \forall P' \in \boldsymbol{P}'$$

induzierte Uniformität trägt und

$$S\,\eta(\cdot, P)\,|\,Z_P \qquad \forall P \in \boldsymbol{P}$$

gleichmäßig stetig ist.
Damit sind die Voraussetzungen für folgenden Satz erfüllt (BOURBAKI S. 190):
Sei P' aus einer Indexmenge. Es seien $X, Y, Z_{P'}$ uniforme Räume und

$$f : X \to Y \quad , \quad g_{P'} : Y \to Z_{P'}$$

Abbildungen. Besitzt Y die von allen $g_{P'}$ induzierte uniforme Struktur, so ist f genau dann gleichmäßig stetig, wenn alle $g_{P'}\,f$ es sind.

Wir identifizieren nun

$$\begin{aligned} X &\equiv Z_P \\ Y &\equiv Z_{P'} \\ Z_{P'} &\equiv \mathit{Sym}(T_X{}^*B, T_XB) \\ f &\equiv \eta(\cdot, P)\,|\,Z_P \\ g_{P'} &\equiv S\,\eta(\cdot, P')\,|\,Z_{P'} \qquad \text{gleichmäßig stetig} \end{aligned}$$

und

$$g_{P'}\,f \equiv S\,\eta[\eta(\cdot, P)\,|\,Z_P, P']\,|\,Z_{P'} = S\,\eta(\cdot, P' \circ P)\,|\,Z_P$$

$$\Rightarrow \quad \eta(\cdot, P)\,|\,Z_P \text{ ist gleichmäßig stetig.} \qquad \boxtimes$$

Ein uniformer Raum ist bekanntlich genau dann separiert, wenn seine Topologie separiert ist. Ein separierter oder *Hausdorff*-Raum besitzt für unterschiedliche Elemente diskunkte offene Umgebungen.

S 16.11: Die $\boldsymbol{P}$-Sektionen des Zustandsraumes Z_P sind *Hausdorff*- Räume.

B: Seien $Z_1, Z_2 \in Z_P$ und $Z_1 \neq Z_2$.
Seien F_1 und F_2 die Materialfunktionen und $\boldsymbol{P}$ die gemeinsame Prozeßklasse der materiellen Systeme $\Sigma(Z_1)$ bzw. $\Sigma(Z_2)$.
Aus $Z_1 \neq Z_2 \quad \Rightarrow \quad \exists\ P \in \boldsymbol{P}$ mit $F_1(P) \neq F_2(P)$.
Da $\mathit{Sym}(T_X{}^*B, T_XB)$ *Hausdorff*-Raum ist, gibt es in ihm zwei offene Umgebungen:

$$V_1 \text{ von } S\,\eta(Z_1, P)$$

und

$$V_2 \text{ von } S\,\eta(Z_2, P),$$

die disjunkt sind. Deren Urbilder unter $S\,\eta(\cdot, P)$ sind aus Stetigkeitsgründen offen und außerdem disjunkt. Dies sind die gesuchten offenen Umgebungen, die Z_1 und Z_2 trennen. $\boxtimes$

Wir wollen noch zeigen, daß sich die durch materielle Isomorphismen induzierten Bijektionen der Zustandsräume mit der natürlichen Uniformität der Zustandsräume vertragen.

S 16.12: Seien MS_1 und MS_2 materiell isomorph bez. A, und γ_{A} die von A induzierte Bijektion der Zustandsräume

$$\gamma_{\mathrm{A}} : Z_1 \to Z_2 ,$$

so gilt:

$$\gamma_{\mathrm{A}}\,|\,Z_{1P}$$

ist für alle Zustandsraumsektionen uniformer Isomorphismus.

B: Ist Z_{1P} Zustandsraumsektion von Z_1, so gilt mit $P_{\mathrm{A}} := \mathrm{A}^{-*}(P)$:

$$\gamma_{\mathrm{A}}(Z_{1P}) = Z_{2P_{\mathrm{A}}} .$$

Denn: haben zwei Zustände dieselben Prozeßklassen, so bilden sich diese auch unter A^{-*} gleich ab und umgekehrt. Jede der folgenden Abbildungen ist gleichmäßig stetig für alle $P \in \boldsymbol{P}$:

$$S_1\ \eta_1(\cdot, P)\,|\,Z_{1P}$$

$$\mathrm{A} \text{ und } \mathrm{A}^{-1}$$

$$S_2\ \eta_2(\cdot, \mathrm{A}^{-*}(P))\,|\,Z_{2P_A}\,.$$

Damit ist auch

$$\mathrm{A}\, S_1\ \eta_1(\cdot, P)\,|\,Z_{1P} = S_2\ \eta_2(\gamma_A(\cdot), \mathrm{A}^{-*}(P))\,|\,Z_{1P}$$

gleichmäßig stetig. Wir wenden nun den bereits zitierten Satz (BOURBAKI, S. 190) an. In diesem Fall besteht die Index-Menge nur aus einem Element, und wir können den Index P weglassen. Wir identifizieren:

$$\begin{tikzcd}
Z_{1P} \arrow[r, "S_1\ \eta_1"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & Sym(T_1{}^*B, T_1B) \arrow[d, "\mathrm{A}"] \\
Z_{2P_A} \arrow[r, "S_2\ \eta_2"'] & Sym(T_2{}^*B, T_2B)
\end{tikzcd}$$

$$f = \gamma_A\,|\,Z_{1P}$$

$$g = S_2\ \eta_2(\cdot, \mathrm{A}^{-*}(P))\,|\,Z_{2P_A}$$

$$X = Z_{1P}$$

$$Y = Z_{2P_A} := \gamma_A(Z_{1P})$$

$$Z = Sym(T_2{}^*B, T_2B)$$

und sehen, daß die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Damit ist $\gamma_A|Z_{1P}$ gleichmäßig stetig. Da das bisher Gezeigte unabhängig davon ist, welches materielle System den Index 1 oder 2 trägt, gilt dasselbe auch für

$$\gamma_{(A^{-1})} = (\gamma_A)^{-1}\ .$$

γ_A ist also in beiden Richtungen gleichmäßig stetig und damit Isomorphismus der uniformen Räume Z_{1P} und Z_{2P_A} für alle $P \in \boldsymbol{P}$ und alle Prozeßklassen $\boldsymbol{P}$, für die Z_{1P} nicht-leer ist. ☒

Damit übertragen sich auch alle Eigenschaften die Uniformität oder die Topologie betreffend auf m-äquivalente Materialien, wie z. B. die im folgenden Abschnitt definierten Relaxationseigenschaften.

16.4 Vervollständigung der Zustandsraumsektionen

Fassen wir die Ergebnisse des vorigen Abschnitts zusammen: Für alle Zustände mit gleicher Prozeßklasse $\boldsymbol{P}$, genannt Zustandsraumsektion $Z_{\boldsymbol{P}}$, gilt:
$Z_{\boldsymbol{P}}$ trägt eine natürliche topologische Struktur, die es uns ermöglicht, die Konvergenz von Folgen, Netzen oder Filtern in $Z_{\boldsymbol{P}}$ zu untersuchen. $Z_{\boldsymbol{P}}$ ist bezüglich dieser Topologie *Hausdorff*-Raum, womit die Limites von konvergenten Filtern eindeutig sind.

Darüber hinaus trägt $Z_{\boldsymbol{P}}$ eine mit der topologischen Struktur verträgliche uniforme Struktur, die es uns ermöglicht, *Cauchy*-Folgen, -Netze und -Filter in $Z_{\boldsymbol{P}}$ zu erklären. Dabei sind die Abbildungen

$$S\ \eta(\cdot, P)\,|\,Z_{\boldsymbol{P}} : Z_{\boldsymbol{P}} \rightarrow Sym(T_X{}^*B, T_XB)$$

und

$$\eta(\cdot, P)\,|\,Z_{\boldsymbol{P}} : Z_{\boldsymbol{P}} \rightarrow Z_{\boldsymbol{P}'}$$

für alle $P \in \boldsymbol{P}$ gleichmäßig stetig.

Es stellt sich nun die Frage nach der Vollständigkeit der Zustandsraumsektionen: **konvergieren alle *Cauchy*-Filter in $Z_{\boldsymbol{P}}$?** Diese Frage sei an einem anschaulichen **Beispiel illustriert:**

Beispiel: **Relaxation**

Wir betrachten materielle Systeme in Zuständen Z_0, von denen aus man Einfrierungen beliebiger Länge durchführen kann. Die Prozeßklassen der hierüber hergestellten materiellen Systeme sollen gleich sein, so daß die zugehörigen Zustände in derselben Zustandsraumsektion liegen.

Sei E_d eine derartige Einfrierung der Dauer $d > 0$. Dann bilden die Endstücken

$$\{\eta(Z_0, E_d) \in Z_{\boldsymbol{P}}\,|\,d > 0\}\ ,$$

erweitert um ihre Obermengen, einen Filter in $Z_{\boldsymbol{P}}$.

Es gibt nun folgende Möglichkeiten:

der Filter

(A) ist *Cauchy*-Filter — (B) ist kein *Cauchy*-Filter

(A1) und konvergiert — (A2) und konvergiert nicht

(A1) bedeutet folgendes: Es gibt einen Zustand $z_{lim} \in Z_P$, dem sich das System beliebig dicht annähern kann, wenn man die Einfrierung nur lange genug ausdehnt. Dieser Zustand ist aber auch - und das gehört zur Definition von Zustand - (exakt) erreichbar über einen Prozeß aus P.

Es ist aber auch denkbar, daß sich das System bei der Einfrierung genauso verhält, es aber keinen Prozeß in P gibt, der einen Grenzzustand im obigen Sinne repräsentiert. Damit bleibt der Filter *Cauchy*-Filter, konvergiert aber nicht in Z_P (A2). Wir könnten zwar den Häufungspunkt als Grenzzustand mit in die Zustandsraumsektion hineinnehmen; er wäre aber nicht mehr als Äquivalenzklasse von Prozessen deutbar, da es in unserer Terminologie keine Prozesse unendlicher Dauer gibt.

Es ist i. a. nicht zu erwarten, daß Z_P vollständig ist. Man kann aber Z_P vervollständigen, indem man seine Grenzzustände hinzunimmt, die man zwar nicht durch Prozesse exakt erreichen kann, die damit auch nicht als Äquivalenzklassen von Prozessen interpretierbar sind, die aber über Prozesse beliebig genau (im Sinne der Uniformität) erreichbar sind.

Dabei machen wir Gebrauch von folgenden Sätzen:

(1) Zu jedem separierten Raum Z_P gibt es einen (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmten separierten vollständigen Raum $\underline{Z}_P$ derart, daß Z_P dicht in $\underline{Z}_P$ ist (SCHUBERT S. 126).

(2) Es sei Z_P uniformer Raum und

$$S\,\eta(\cdot, P)|_{Z_P} : Z_P \rightarrow Sym(T_X{}^*B, T_XB)$$

eine gleichmäßig stetige Abbildung in dem separierten vollständigen Raum $Sym(T_X{}^*B, T_XB)$. Dann besitzt diese Funktion eine eindeutig bestimmte

Fortsetzung auf $\underline{Z}_P$, die gleichmäßig stetig ist (dabei wird $P \in P$ als Index betrachtet) (s.SCHUBERT S. 124, Satz 2).

Fassen wir nun die vervollständigten Sektionen zu $\underline{Z}$ zusammen, so können wir die Abbildung betrachten

$$\underline{S\,\eta} : (\underline{Z}, \underline{P}_Z) \rightarrow Sym(T_X{}^*B, T_XB)$$

worin

$$(\underline{Z}, \underline{P}_Z) := \{(Z, P) \mid Z \in \underline{Z}, P \in P_Z\}$$

ist und P_Z die Prozeßklasse der Zustandssektion ist, der Z angehört.

Wir können dann auch die Ausgabefunktionen ausdehen:
$G(Z)$ ist für alle $Z \in Z_P$ konstant und wird konstant auf die vervollständigten Sektionen ausgedehnt.

$S(Z)$ wird für die Grenzzustände Z definiert als

$$S(Z) := \underline{S\,\eta}(Z, P_o),$$

worin P_o der Nullprozeß ist.

Ebenso können wir die Zustandsübergangsfunktion gleichmäßig stetig ausdehnen zu

$$\underline{\eta} : (\underline{Z}, \underline{P}_Z) \rightarrow \underline{Z}.$$

Wir wollen analog zu den Zustandsraum-Sektionen die Menge der herstellbaren materiellen Systeme mit gleicher Prozeßklasse

$$M_p := \Xi(Z_P) \subset M$$

definieren. Die Mengen Z_P und M_p waren bisher nur mengentheoretisch isomorph; wir wollen diese Eigenschaft auch bez. der uniformen Struktur erreichen, indem wir

$$\Xi|_{Z_P}$$

zu einem uniformen Isomorphismus erklären, der die Nachbarschaften von $Z_P \times Z_P$ nach $M_P \times M_P$ hinüberholt. Dann können wir M_P vervollständigen zu $\underline{M}_P$ und alle diese vereinigen zu

$$\underline{M} := \cup_P \underline{M}_P.$$

Gemäß SCHUBERT, S. 125, Satz 4 läßt sich $\Xi|_{Z_P}$ ausdehnen zu einem uniformen Isomorphismus

$$\underline{S}|_{\underline{Z}_P} : \underline{Z}_P \rightarrow \underline{M}_P$$

und auf der Vereinigung der Definitionsbereiche zu

$$\underline{S} : \underline{Z} \rightarrow \underline{M} .$$

Dabei sind die Grenzelemente von der Art

$$MS' = [X, P, \underline{S}_{\underline{n}}(Z_0, \cdot)]$$

mit

$$Z_0 = \underline{S}^{-1}(MS') .$$

Es gibt für ein materielles System möglicherweise Zustände und materielle Systeme, die man nicht (exakt) erreichen bzw. herstellen, jedoch beliebig genau annähern kann. Man kann in diesen Grenzzuständen (theoretisch) starten und es mag auch möglich sein, daß man das ursprüngliche materielle System wieder herstellen kann.

16.5 Relaxation

Wenn wir eine Konfiguration beliebig lange einfrieren können, so kann es sein, daß die Zustände, die man dabei durchläuft, einen *Cauchy*-Filter erzeugen.

D 16.13: Sei $Z \in \mathbf{Z}$ und E_d konstanter Prozeß der Dauer $d \in \mathbb{R}^+$ aus $\mathbf{P}$.
Z heißt **relaxierbarer Zustand**, falls die Endstücken

$$\{\eta(Z_0, E_d) \in \mathbf{Z}_P \mid d > 0\}$$

einen *Cauchy*-Filter in $\mathbf{Z}_P$ erzeugen.
Existiert der Grenzwert

$$\lambda(Z) := \lim_{d \to \infty} \eta(Z, P_d) \in \mathbf{Z} ,$$

so heißt er **relaxierter Zustand**.
Ein materielles System heißt **relaxierend**, falls alle Zustände relaxierbar sind.
Ein materielles System heißt **semi-elastisch**, falls es relaxierend ist und gilt:

$$G(Z_1) = G(Z_2) \Rightarrow \lambda(Z_1) = \lambda(Z_2) \qquad \forall\, Z_i \in \mathbf{Z} .$$

Man beachte, daß es für relaxierende materielle Systeme notwendig ist, daß Einfrierungen von beliebiger Dauer aus jedem Zustand heraus überhaupt in der

jeweiligen Prozeßklasse sind. Sind alle Prozesse als einmal stetig differenzierbar vorausgesetzt, so ist dies i. allg. nicht gegeben.

S 16.14: Ein Zustand ist genau dann relaxiert, wenn jeder konstante Prozeß $E(t) \equiv G(Z)$ Kreisprozeß ist.
Ist das System relaxierend, so gilt schärfer:
Z ist genau dann relaxiert, falls *ein* nicht-trivialer konstanter Prozeß Kreisprozeß ist.

B: Angenommen, Z ist relaxierter Zustand, d. h. es existiert ein Z' mit

$$Z = \lambda(Z') = \lim_{d \to \infty} \eta(Z', P_d) \qquad \text{mit } P_d = G(Z).$$

Dann ist für jedes $t > 0$

$$Z_0 := Z' \;;\; Z_1 := \eta(Z_0, P_t) \;;\; Z_2 := \eta(Z_1, P_t) \;\ldots$$

eine Folge, die nach Z konvergiert. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\eta(\cdot, P_t)$ ist

$$\{\eta(Z_i, P_t)\}$$

eine Folge, die gegen Z konvergiert. Damit gilt:

$$\lim \eta(Z_i, P_t) = \eta(\lim Z_i, P_t) = \eta(Z, P_t) .$$

Die Umkehrung der Aussage ist trivial. Nehmen wir nun an, das System sei relaxierend. Am Ende eines konstanten Prozesses der Dauer $t \neq 0$ erhält man voraussetzungsgemäß denselben Zustand. Dann kann man diesen Prozeß beliebig oft wiederholen. Wenn die Folge der dabei durchlaufenen Zustände eindeutig konvergieren soll, so muß er während jeder Periode t konstant sein. ⊠

17. Geschichtsfunktionale

Empfohlene Literatur: KRAWIETZ (§ 3.9), NOLL (1972)

Obwohl die *Rationale Mechanik* ihre Wurzeln in den klassischen Werken des 18. und frühen 19. Jahrhunderts hat (e. g. *Euler, Cauchy*), blieb sie lange Zeit unentwickelt. Erst in der Mitte unseres Jahrhunderts erlebte sie, zunächst in England und Amerika, eine Renaissance. Dies hatte vor allem die folgenden Gründe:

- die Entwicklung und Verwendung neuer Materialien, z. B. Kunststoffe, die sich inelastisch verhalten;
- extreme Anforderungen (Rüstung, Raumfahrt) erforderten eine genauere Berechnung des mechanischen Verhaltens;
- mit der Entwicklung elektronischer Rechenanlagen und in deren Folge auch der numerischer Verfahren (z. B. Finite-Elemente-Methode) kam man in der Lage, nicht-lineare Randwertprobleme zu lösen.

Die Theorie der einfachen Materialien mit Geschichtsfunktional wurde in den fünfziger und sechziger Jahren von NOLL u. a. entwickelt. Ihre wohl geschlossenste und ausführlichste Darstellung ist die von TRUESDELL/ NOLL (s. a. BECKER/ BÜRGER, BILLINGTON, HAUPT, LEIGH, MÜLLER (1973, 1985)). Ihr Schwerpunkt lag auf elastischen und viskoelastischen Materialien (z. B. zähe Flüssigkeiten). *Plastizität* (Metalle) konnte in diesem Rahmen aus prinzipiellen Gründen nicht behandelt werden.

Aufgrund einiger gravierender Mängel dieser Theorie entwickelte NOLL (1972) die "New Theory of Simple Materials", die der unmittelbare Vorgänger unserer Theorie der *materiellen Systeme* ist. (Genauer gesagt: die *neuen einfachen Materialien* sind eine echte Untermenge der *materiellen Systeme*. Zur Einbettung s. BERTRAM (1982)). Charakteristisch für beide neuen Theorien ist der Zustandsbegriff und die Betrachtung von (zeitlich) *endlichen* Prozessen, während die alte Theorie einfacher Materialien halb-unendliche Prozesse, sog. *Deformations-Geschichten*, ohne Zustandsbegriff behandelte.

Mit der neuen Theorie kam man in die Lage, auch Plastizitätstheorien zu behandeln (s. SILHAVI/ KRATOCHVIL, KRAWIETZ, DEL PIERO), wie auch die immer wichtiger werdene *Viskoplastizität*.

Obwohl die alte Theorie bei unserem heutigen Kenntnisstand als überholt gilt, müssen wir sie trotzdem darstellen. Dies nicht nur wegen ihrer enormen historischen Bedeutung, sondern auch wegen ihrer großen Verbreitung, die die neueren Theorien aufgrund ihrer begrifflichen Komplexität bisher nicht gefunden haben.

NOLL (1972) hat gezeigt, daß die alten *einfachen Materialien* im wesentlichen den *semielastischen* Stoffen entsprechen, und sie als solche in seine neue Theorie eingebettet. Wir wollen ihm hierin folgen.

Die folgenden Größen sind jeweils für einen Körperpunkt $X \in B$ definiert.

D 17.1: Seien $\mathbb{R}^{0+}$ die nicht-negativen reellen Zahlen und $t \in T$.
Eine **Deformationsgeschichte** bis zur Zeit t ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} H: \mathbb{R}^{0+} &\to Sym^+(T_X B, T_X{}^* B) \\ s &\mapsto G(t-s) \end{aligned}$$

Ihr Wert $H(s)$ bedeutet die *intrinsische Konfiguration des Körperelements* zur Zeit $(t-s)$.
Ist $\delta \in \mathbb{R}^{0+}$, so heißt

$$H^\delta(\cdot) := H(\delta + \cdot): s \mapsto G(t-\delta-s)$$

δ-**Teilgeschichte** von H.

D 17.2: Eine **Geschichtsklasse** Γ ist eine Menge von Deformationsgeschichten, die folgende Bedingungen erfüllt:

(G1) Γ ist nicht leer;

(G2) alle **Teilgeschichten** von Deformationsgeschichten aus Γ gehören zu Γ, d. h.

$$H \in \Gamma \text{ und } \delta \in \mathbb{R}^{0+} \Rightarrow H^\delta \in \Gamma;$$

(G3) zu jeder Geschichte aus Γ gibt es eine echte **Fortsetzung**, d. h.

$$\forall H \in \Gamma \text{ existiert ein } H' \in \Gamma \text{ und ein } \delta \in \mathbb{R}^{0+} \text{ mit } H = H'^\delta.$$

D 17.3: Sei Γ Geschichtsklasse. Ein **Geschichtsfunktional** von Γ ist eine Abbildung

$$G: \Gamma \to Sym(T_X{}^*\mathcal{B}, T_X\mathcal{B})$$
$$H \mapsto \mathcal{S},$$

wobei $\mathcal{S}$ die intrinsischen Spannungen am Ende der Deformationsgeschichte H sind.
Ist $X \in \mathcal{B}$, Γ Geschichtsklasse und G Geschichtsfunktional, so heißt (X, Γ, G) **Material mit Geschichtsfunktional.**

Die alte Theorie einfacher Materialien betrachtete ausschließlich Geschichtsfunktionale. Dies ist aus drei Gründen unbefriedigend:
1.) die Kenntnis einer unendlich langen Vorgeschichte ist nicht nur grundsätzlich fragwürdig, sondern auch rein praktisch unmöglich;
2.) für wichtige Materialklassen (z. B. Plastizität, Alterung) läßt sich keine Geschichtsfunktional-Beschreibung finden (s. KREMPL 1975, 1981).

Auf die dritte Schwierigkeit werden wir gestoßen, wenn wir versuchen, die Materialien mit Geschichtsfunktionalen in die Theorie der materiellen Systeme einzubauen.

Die **materiellen Isomorphismen** zwischen zwei Materialien (X_1, Γ_1, G_1) und (X_2, Γ_2, G_2) kann man definieren durch $\mathbf{A} \in Iso(T_{X_1}\mathcal{B}, T_{X_2}\mathcal{B})$

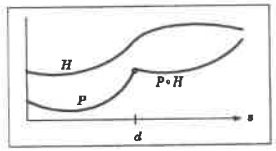
$$(J1) \qquad \Gamma_2 = \mathbf{A}^{-*}\,\Gamma_1\,\mathbf{A}^{-1}$$
$$(J2) \qquad G_2(\mathbf{A}^{-*}\,H\,\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}\,G_1(H)\,\mathbf{A}^* \qquad \forall H \in \Gamma_1,$$

und die **Symmetrie-Transformationen** entsprechend mit $\mathbf{A} \in Iso(T_X\mathcal{B}, T_X\mathcal{B})$.

Um aus einem Material mit Geschichtsfunktional (X, Γ, G) ein materielles System zu konstruieren, liegt folgendes Vorgehen nahe:

Seien H Geschichte und P Prozeß der Dauer d, und sei $H(0) = P(0)$, so definieren wir eine Geschichte $P \circ H$ durch

$$(P \circ H)(s) := \begin{cases} P(d-s) & \text{für } 0 \le s \le d \\ H(s-d) & \text{für } s > d \end{cases}$$



S, D 17.4: Herstellungssatz
Sei (X, Γ, G) Material mit Geschichtsfunktional und $H \in \Gamma$, sowie

$$\mathcal{P} := \{P \text{ Prozeß} \mid P \circ H \in \Gamma\}$$
$$F(P) := G(P \circ H) \qquad \forall P \in \mathcal{P}.$$

Dann ist $MS_H := (X, \mathcal{P}, F)$ materielles System.
Es heißt: **das über die Herstellungsgeschichte H hergestellte materielle System.**

Mit diesem Herstellungsbegriff kann man nun die Geschichtsklasse fasern:

$$H_1 \sim H_2: \quad H_1, H_2 \in \Gamma \quad \text{und} \quad MS_{H_1} = MS_{H_2}.$$

Diese Faserung tritt an die Stelle der τ-Äquivalenz und führt auf einen ähnlichen Zustands-Begriff für Materialien mit Geschichtsfunktionalen.

Es könnte nun aber der Fall auftreten, daß es zwei Geschichten H_1 und H_2 gibt, so daß weder MS_{H_1} aus MS_{H_2} hergestellt werden kann, noch umgekehrt.
Wir suchen deshalb eine "Urgeschichte" $H_0 \in \Gamma$, in deren Fortsetzung wir alle Zustände des Materials erreichen können, so daß für $MS_{H_0} = (X, \mathcal{P}, F)$ gilt:
für jedes $H \in \Gamma$ gibt es ein $P \in \mathcal{P}$, so daß

$$P \circ H_0 \sim H.$$

In diesem Fall könnten wir mit MS_{H_0} dasselbe Materialverhalten beschreiben wie mit dem Geschichtsfunktional.

Da diese Forderung sehr streng ist, wollen wir sie dahingehend abschwächen, daß wir die Zustandsraumsektionen von MS_{H_0} vervollständigen zu $\underline{Z}_P$ und alle Zustandsfunktionen ausdehnen. Dann soll für jedes $H \in \Gamma$ ein $Z \in \underline{Z}$ existieren, so daß

$$\mathrm{MS}_H = \underline{S}(Z) .$$

In diesem Fall könnten wir mit MS_{H_0} *näherungsweise* dasselbe Materialverhalten beschreiben wie mit dem Geschichtsfunktional.

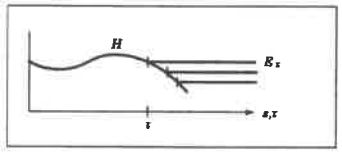
3.) Ist auch dies nicht gegeben, so können wir zwei Geschichten H_1 und H_2 aus Γ finden, so daß sich die beiden Materialien für alle Fortsetzungen unterschiedlich verhalten und ihre (vervollständigten) Zustandsräume ungleich sind.

Dies ist der dritte Nachteil der alten Theorie. Um solche Fälle auszuschließen, stellt NOLL (1972) einschränkende Bedingungen an die Materialien mit Geschichtsfunktional:

Zunächst muß die Geschichtsklasse groß genug sein, d. h. alle Geschichten enthalten, die im folgenden benötigt werden, nämlich Einfrierungen und Verbindungen zweier Konfigurationen. Sodann soll G folgende Konvergenzeigenschaften haben:

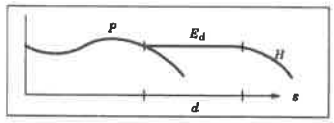
- Sei $H \in \Gamma$ und E_τ, $\tau > 0$ eine (konstante) Einfrierungsgeschichte mit dem Wert $H(\tau)$, so soll gelten

$$G(H) = \lim_{\tau \to \infty} G(H(\tau - s)|_{s \in [0,\tau]} \circ E_\tau)$$



- Sei $P \circ H \in \Gamma$ und E_d eine Einfrierung der Dauer $d \in [0, \infty]$ auf dem Wert $P(0)$, so soll gelten:

$$G(P \circ E_\infty) = \lim_{d \to \infty} G(P \circ E_d \circ H)$$

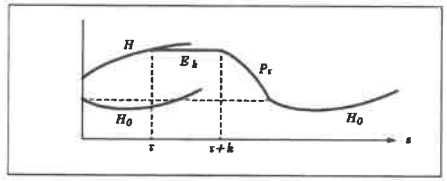


d. h. der Einfluß der Anfangsgeschichte kann herausrelaxiert werden. Diese Forderung ist analog zur Eigenschaft der *Semielastizität* bei materiellen Systemen.

Die Konstruktion der oben angesprochenen Grenzzustände wird nun durch zwei Grenzübergänge vollzogen:

Sei $H_0 \in \Gamma$ wie vorher und $H \in \Gamma$ beliebig. Dann soll es zu jedem $\tau > 0$ einen Prozeß P_τ der Dauer d geben mit $P_\tau(0) = H_0(0)$ und $P_\tau(d) = H(\tau)$, so daß

$$H(\tau - s)|_{s \in [0,\tau]} \circ E_k \circ P_\tau \circ H_0 \in \Gamma .$$



E_k ist die Einfrierung der Dauer k auf den Wert $P(d)$. Dann gelte

$$\lim_{\tau \to \infty} \left[\lim_{k \to \infty} \{ G[H(\tau - s)|_{s \in [0,\tau]} \circ E_k \circ P_\tau \circ H_0] \} \right] = G(H)$$

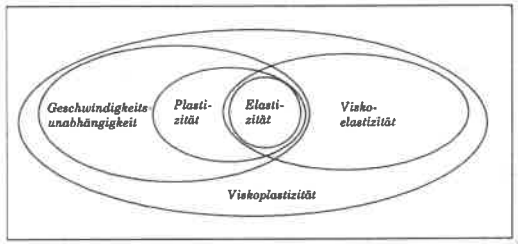
Auf diese Weise erhalten wir ein *semi-elastisches materielles System*. Die Grenzwerte sind unabhängig von P_τ, da dessen Einfluß herausrelaxiert.

17.1 Überblick über verschiedene Materialtheorien

Historisch gesehen gab es mindestens zwei wichtige Entstehungszweige in der mechanischen Materialtheorie:

1) die *Viskoelastizität*, die sich im wesentlichen der Geschichtsfunktionale bediente und im Grunde *Semielastizität* beschreibt. Wesentliche Konzepte und Schlagworte dieser Schule sind: *Geschwindigkeitsabhängigkeit, schwindendes Gedächnis, Relaxation, Kriechen, (geschwindigkeitsabhängige) Dämpfung*. Literatur-Beispiel für diese Richtung :TRUESDELL/ NOLL.

2) die *geschwindigkeitsunabhängigen Materialien*, deren wichtigste Unterklasse die *Plastizität* darstellt, wie auch die *Hypoelastizität* und die *endochrone Theorie* (s. HAUPT, e. g.). Schlagworte aus diesem Bereich sind: *elastischer Bereich, Fließkriterium, (plastisches) Fließen, Verfestigung, Bauschinger-Effekt*. Literatur-Beispiele bilden alle Bücher über Elastizität und Plastizität.



Die Vereinigung beider Materialklassen bildet den weiten Bereich der *Viskoplastizität* (s. KRAWIETZ, CRISTESCU/ SULICIU, BACKHAUS, LEMAITRE/ CHABOCHE). Sie ist erst relativ spät entstanden und noch stark in der Entwicklung begriffen, da sich die beiden Schulen lange nicht auf eine gemeinsame Rahmenordnung verständigen konnten. Noch heute gehören die meisten Bücher über Materialtheorie nur einer der beiden Klassen an. In Büchern, die wirklich beide

Klassen beinhalten, wird man meistens vergeblich nach einer allgemeinen Rahmenordnung suchen. Man geht nicht allgemein, sondern exemplarisch vor.

Zu beiden Materialklassen gemeinsam gehört die *Elastizität*, die wiederum als Untermenge die *Hyperelastizität* enthält (diejenigen elastischen Materialien, bei denen die Materialfunktion ein Potential - die *Formänderungs-Energie* - besitzt). (Siehe dazu WANG/ TRUESDELL, TRUESDELL/ NOLL, MARSDEN/ HUGHES, CIARLET, FRAEIJS DE VEUBEKE).

Starke Impulse für die mechanische Materialtheorie kamen immer wieder von der *Thermodynamik*, genauer: von der thermomechanischen Materialtheorie. Praktisch alle wichtigen Vertreter der *Rationalen Mechanik* sind zugleich auch *Rationale Thermodynamiker*.

Ursprünglich aus der Thermodynamik stammend, haben Theorien mit *inneren Variablen* (internal variables, hidden v., state v.) in praktisch allen Zweigen der inelastischen Materialtheorie große Verbreitung gefunden. Die inneren Variablen entsprechen (endlich vielen) Zustandsparametern, die sich aus einem Anfangswert entlang eines Prozesses mittels einer *Zustandsübergangsfunktion* (Evolutionsgleichung, Entwicklungsgl., s. Abschnitt 16.2) aktualisieren lassen. Diese Funktion wird meistens als gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit angenommen. Innere-Variablen-Modelle bilden eine (echte) Unterklasse der materiellen Systeme, sind aber in vieler Hinsicht allgemeiner als die *Semielastizität*.

Alle genannten Materialklassen - mit Ausnahme der Elastizität und der Geschwindigkeitsunabhängigkeit, die beide exakt definiert sind - werden von verschiedenen Autoren unterschiedlich abgegrenzt. Historisch sind die meisten von ihnen so entstanden, daß einfache Modelle vorgeschlagen wurden, die anschließend verallgemeinert wurden. So ist es nicht möglich, allgemein akzeptierte Definitionen von Plastizität oder Viskoelastizität zu geben.

18. Innere Zwangsbedingungen

Im Abschnitt 11.2 hatten wir bereits den *starren Körper* als einen solchen definiert, für den die Bewegungsklasse nur Starrkörperbewegungen enthält. Als Folge davon besteht die Menge der Konfigurationen des (starren) Körpers aus einem einzigen Element.

Natürlich ist das Konzept der Starrheit eine Idealisierung - wie übrigens alles andere auch, was in diesem Buch steht; in der Natur sind alle Körper deformierbar. Es kann aber für bestimmte Körper unter bestimmten Bedingungen (Belastungen, Lagerungen) vorteilhaft sein, sie als starre Körper zu beschreiben. Wir haben in 11.2 insbesondere gesehen, daß sich die Darstellung der Bewegungen gegenüber einem deformierbaren Körper erheblich vereinfacht.

Während dem starren Körper *alle* Konfigurationsänderungen versagt sind, kann es sinnvoll sein, nur *bestimmte* zu vernachlässigen und alle anderen zuzulassen. Man spricht dann von Körpern mit *Zwangsbedingungen*, und zwar von

- *äußeren*, falls die Bewegungsmöglichkeiten des Körpers von außen im *Euklid*ischen Raum eingeschränkt sind, z. B. durch Lager, Führungen, Wände, etc., die als starr angenommen werden;
- *inneren*, falls die Konfigurationen der Körperlemente eingeschränkt sind, also nicht mehr ganz $Sym^+(T_X B, T_X{}^*B)$ umfassen.

Man stellt zum Beispiel fest, daß es bei Wasser für Dichteänderungen wesentlich größerer Spannungen bedarf als für alle anderen Deformationen. Man beschreibt deshalb Wasser häufig als *inkompressibles* Material, bei dem nur *isochore* (= volumentreue) Bewegungen möglich sind.

Wir werden im Weiteren nur *innere* Zwangsbedingungen betrachten, weil sie für die Materialtheorie besonders wichtig sind. Viele Befunde lassen sich allerdings sinngemäß auch auf äußere übertragen. Die Einschränkung der Bewegungsmöglichkeiten durch Zwangsbedingungen bewirkt, daß nicht mehr alle Spannungen durch die Bewegung determinierbar sind; es treten *Reaktionsspannungen* auf. Üblicherweise wird angenommen, daß sie bei keiner *zulässigen*, d. h. mit den Zwangsbedingungen verträglichen Bewegung, Arbeit leisten. Diese Charakterisierung mag bei bestimmten Material- und Zwangsbedingungsklassen

motivierbar sein; allgemein ist sie es nicht. In BERTRAM (1980) wurde durch Grenzübergänge sich versteifender Materialien u. a. gezeigt, daß

- im (hyper-)elastischen Fall diese Annahme begründet werden kann,
- für die meisten anderen Materialien sich jedoch Gegenbeispiele zu dieser Annahme finden lassen.

Da eine allgemeine Theorie von Zwangsbedingungen noch nicht ausgearbeitet wurde, können wir hier nur die speziellen Fälle referieren, die eine geschlossene Behandlung zulassen (s. TRUESDELL/ NOLL S. 69 ff).

Die Form der inneren Zwangsbedingung wird zunächst im Rahmen der bezogenen Beschreibungsweise dargestellt und dann intrinsisch notiert. Sei also $\mathcal{B}$ Körper mit Plazierungsklasse $\mathcal{K}$, $\kappa_0 \in \mathcal{K}$ Bezugsplazierung und $\mathbf{F}(X_0) = \kappa_* \kappa_{0*}^{-1}|_{X_0}$ (s. S. 78) Deformationsgradient einer Plazierung $\kappa \in \mathcal{K}$. Dann habe eine innere Zwangsbedingung die Form

$$f_0 : Aut(V) \to \mathbb{R} ,$$

so daß für alle $\kappa \in \mathcal{K}$ gilt

$$f_0(\mathbf{F}) = 0 .$$

Die Funktion f_0 ist Materialgleichung und wird deshalb als objektiv angenommen, d. h. es muß gelten

$$f_0(\mathbf{F}) = f_0(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}) \qquad \mathbf{Q} \in Ort(V)$$

Zerlegt man $\mathbf{F}$ polar (s. S 8.1), so erhält man mit der speziellen Wahl $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$

$$f_0(\mathbf{R}\,\mathbf{U}) = f_0(\mathbf{Q}\,\mathbf{R}\,\mathbf{U}) = f_0(\mathbf{U}) =: f_C(\mathbf{C})$$

mit $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$. Eine objektive Funktion $f_0(\mathbf{F})$ läßt sich also immer ausdrücken durch eine beliebige Funktion $f_C(\mathbf{C})$, die automatisch objektiv ist.

Bei Wechsel der Bezugsplazierung erhält man gem. Abschnitt 8.3

$$f_{0_2}(\mathbf{F}_2) = f_{0_2}(\mathbf{F}_1\,\mathbf{P}) = f_{0_1}(\mathbf{F}_1)$$

oder

$$f_{C_2}(\mathbf{C}_2) = f_{C_2}(\mathbf{F}_2{}^*\,\mathbf{F}_2) = f_{C_2}(\mathbf{P}^*\,\mathbf{F}_1{}^*\,\mathbf{F}_1\,\mathbf{P}) = f_{C_2}(\mathbf{P}^*\,\mathbf{C}_1\,\mathbf{P}) = f_{C_1}(\mathbf{C}_1) ,$$

d. h. beide Versionen der inneren Zwangsbedingung hängen von der Bezugsplazierung ab. Erst beim Übergang zur intrinsischen Darstellung kommt man zu der invarianten Form

$$f_C(\mathbf{C}) = f_C(\mathbf{K}_0{}^{-*}\,\mathbf{G}\,\mathbf{K}_0{}^{-1}) =: f_G(\mathbf{G}) .$$

Die Menge aller Nullstellen von f_C und f_G - und nur sie interessiert - bildet in allen praktisch relevanten Fällen eine 5-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $Sym(V,V^*)$ bzw. $Sym(T_X B, T_X{}^*B)$, die **Zwangsmannigfaltigkeit** (s. NOLL 1972). Wir kommen zu folgenden Definitionen:

D 18.1: Sei B Körper mit Plazierungsklasse K. Dann heißt eine differenzierbare Funktion

$$f_G \; : \; Sym(T_X B, T_X{}^*B) \to \mathbb{R}$$

innere Zwangsbedingung des materiellen Punktes $X \in B$, falls für alle $\kappa \in K$ gilt:

$$f_G(\kappa^* \kappa_*|_X) = 0 \, .$$

Es kann natürlich auch Körperpunkte geben, für die mehrere Zwangsbedingungen gleichzeitig gelten, wobei deren Zwangsmannigfaltigkeiten weder identisch noch disjunkt sein sollen. Um den Extremfall eines starren Körpers zu beschreiben, benötigt man sechs Zwangsbedingungen. Der Durchschnitt der Zwangsmannigfaltigkeiten besteht dann aus einem einzigen Punkt.

Bei Materialien mit inneren Zwangsbedingungen gilt nun nicht mehr das *Prinzip des Determinismus* in der Form **A 12.7**, sondern stattdessen in der folgenden:

A 18.2: **Prinzip des Determinismus**
für Materialien mit inneren Zwangsbedingungen
Der Prozeß bestimmt die Spannungen am Ende des Prozesses nur bis auf einen additiven Anteil S_R, den **Reaktionsspannungen**, der bei keiner mit der Zwangsbedingung verträglichen Bewegung Spannungs-Arbeit leistet.

Die Verträglichkeitsbedingung lautet für einen Prozeß $P \in \mathbf{P}$ der Dauer d:

$$f_G(G) = 0 \qquad \forall \, t \in [0, d] \text{ mit } G = P(t) \, .$$

Ist P differenzierbar, so folgt entlang P die inkrementelle Form

$$\langle df_G/dG, G^{\cdot} \, dt \rangle = 0 \, ,$$

wobei $G^{\cdot} = P^{\cdot}$ aus dem Tangentialraum $T_G \, Sym(T_X B, T_X{}^*B)$ und df_G/dG aus dessen Dual, dem Kotangentialraum $T_G{}^* \, Sym(T_X B, T_X{}^*B)$ sind.

Handelt es sich nun bei der Zwangsmannigfaltigkeit um eine 5-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist deren Tangentialraum Unterraum von $T_G \, Sym(T_X B, T_X{}^*B)$ und enthält $G^{\cdot}$.

Wir haben in Abschnitt 5 gesehen, daß der Tangentialraum an einen Vektorraum kanonisch isomorph zu dem Vektorraum selbst ist (s. S. 55):

$$T_G \, Sym(T_X B, T_X{}^*B) \cong Sym(T_X B, T_X{}^*B) \, .$$

Für das Dual gilt (s. S. 55 und 18)

$$T_G{}^* \, Sym(T_X B, T_X{}^*B) \cong Sym^*(T_X B, T_X{}^*B) \cong Sym(T_X{}^* B, T_X B) \, .$$

Um nun den entscheidenden Schluß aus der Annahme ziehen zu können, muß die Prozeßklasse des betrachteten materiellen Systems genügend Prozesse enthalten. Wir wollen deshalb annehmen, daß sie alle stetigen und stückweise differenzierbaren Prozesse mit gemeinsamem Anfangswert enthält, die mit der Zwangsbedingung verträglich sind. Dann gelten

$$\langle df_G/dG, G^{\cdot} \, dt \rangle = 0$$

für alle zulässigen $G^{\cdot} \in Sym(T_X B, T_X{}^*B)$ mit $df_G/dG \in Sym(T_X{}^* B, T_X B)$ und

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}/(2\rho) \, \langle S_R, G^{\cdot} \rangle = 0$$

(s. S. 174) gem. **A 18.2**. Daraus folgt die Parallelität von df_G/dG und S_R, d. h.

$$\boxed{S_R = \alpha \, df_G / dG \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$

worin α ein reeller Faktor ist, der nicht aus einem Bewegungsfunktional bestimmt werden kann. Offensichtlich kann man diesen Schluß nur ziehen, wenn man $G^{\cdot}$ im ganzen 5-dimensionalen Unterraum, dem Tangentialraum der Zwangsmannigfaltigkeit, variieren kann. Läßt die Prozeßklasse dies nicht zu, so ist auch dieser Schluß nicht möglich.

Bei gleichzeitiger Geltung mehrerer innerer Zwangsbedingungen stellt man analog fest, daß eine beliebige Linearkombination aller ihrer Ableitungen

$$S_R = \Sigma_i \; \alpha_i \, df_{Gi} / dG \qquad \forall \; \alpha_i \in \mathbb{R}$$

leistungsneutral ist, d. h. bei keiner zulässigen Bewegung Arbeit leistet. Um zu einer entsprechenden Darstellung in anderen Spannungstensoren zu gelangen, bilden wir analog

$$<df_C/dC, C^{\cdot}\,dt> = 0$$

und (s. S. 174)

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= 1/(2\rho_0)\ <T^{dPK}, C^{\cdot}> = 0 \\ &= 1/(2\rho_0)\ <F^{-1}\,T^{dPK}, C^{\cdot}> \\ &= 1/(2\rho_0)\ <det(F)\ F^{-1}\,T\,F^{-*}, C^{\cdot}> \\ &= 1/(2\rho)\ <F^{-1}\,T\,F^{-*}, C^{\cdot}> \end{aligned}$$

und erhalten somit die Parallelitäten der entsprechenden Reaktionsspannungstensoren

$$\begin{aligned} T_R &= \alpha\, F\, df_C/dC\, F^* \\ T^{1PK}{}_R &= \alpha\, F\, df_C/dC \\ T^{dPK}{}_R &= \alpha\, df_C/dC\,, \end{aligned}$$

wobei wir die α-Faktoren laxerweise alle gleich bezeichnet haben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der durch ein Materialfunktional determinierte Spannungsanteil

$$T_E = T - T_R\,,$$

die **Extra-Spannung**, so normiert werden kann, daß er keine Komponente in die Richtung der Reaktionsspannung enthält:

$$<T_E, T_R> = <T_E, \alpha\, F\, df_C/dC\, F^*> = 0 \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.\,,$$

also aus dem orthogonalen Komplement aller möglichen Reaktionsspannungen ist.

Wichtigstes **Beispiel** einer inneren Zwangsbedingung ist die **Inkompressibilität**: alle Prozesse aus der Prozeßklasse sind isochor (volumentreu). Wählen wir die Bezugsplazierung als eine zulässige Plazierung, so folgt

$$1 = \rho_0/\rho = det(F) = det(C) = det(G\ G_0^{-1})$$

(s. S. 83), und somit

$$f_C(C) = det(C) - 1$$

und deren Ableitung (s. S. 117)

$$df_C/dC = det(C)\ C^{-1}$$

oder intrinsisch

$$f_G(G) = det(G\ G_0^{-1}) - 1$$

und folglich

$$df_G/dG = det(G\ G_0^{-1})\ G^{-1}\,,$$

so daß die Reaktionsspannungen einen hydrostatischen Druckzustand beschreiben:

$$\begin{aligned} S_R &= \alpha\, G^{-1} \\ T_R &= \alpha\, I \\ T^{1PK}{}_R &= \alpha\, F^{-*} \\ T^{dPK}{}_R &= \alpha\, C^{-1}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere für faserverstärkte Materialien ist die **Undehnbarkeit in einer Richtung** (oder auch mehreren) eine sinnvolle Idealisierung, wenn die Dehnsteifigkeit der Fasern um Größenordnungen höher ist als die der einbettenden Matrix. Ein normiertes Linienelement e_0 in der (zulässigen) Bezugsplazierung bewahrt während der Verrückung seine Länge, wenn

$$\|F(e_0)\| = \|e_0\|$$

oder

$$\begin{aligned} <F(e_0), F(e_0)> &= <e_0, e_0> = 1 = <e_0, F^*\ F(e_0)> = <e_0, C(e_0)> \\ &= <e_0, K_0^{-*}\ G\ K_0^{-1}(e_0)> = <K_0^{-1}(e_0),\ G\ K_0^{-1}(e_0)> = <t_0,\ G(t_0)> \end{aligned}$$

mit

$$t_0 := K_0^{-1}(e_0) \in T_X B\,.$$

Damit lauten die objektiven Versionen dieser Zwangsbedingung

$$f_C(C) = <e_0, C(e_0)> - 1$$

und

$$f_G(G) = <t_0,\ G(t_0)> - 1$$

mit den Ableitungen

$$df_C/dC = e_0 \otimes e_0$$

oder intrinsisch

$$df_G/dG = t_0 \otimes t_0\,,$$

so daß in diesem Falle

$$S_R = \alpha\ t_o \otimes t_o$$

$$T_R = \alpha\ F(e_o) \otimes F(e_o)$$

$$T^{1PK}{}_R = \alpha\ F(e_o) \otimes e_o$$

$$T^{2PK}{}_R = \alpha\ e_o \otimes e_o$$

folgen. Die Reaktionsspannungen liegen also in Faserrichtung.

Für den **starren Körper** benötigt man sechs voneinander unabhängige Zwangsbedingungen. Die *Euler*schen Reaktionsspannungen spannen den ganzen Raum der symmetrischen Tensoren auf, so daß der gesamte Spannungszustand durch die Bewegung undeterminiert ist und (nach Normierung) keine Extraspannungen verbleiben.

Der Zusammenhang zwischen inneren Zwangsbedingungen und materieller Symmetrie wurde von COHEN/ WANG und PODIO GUIDUGLI/ VIANELLO eingehend untersucht, allerdings nur für elastische Materialien in der bezogenen Darstellung.

Die hier vorgestellte Theorie innerer Zwangsbedingungen ist im Rahmen ihrer Voraussetzungen elegant, klar und durch viele Anwendungen erprobt. Die so darstellbaren Zwänge sind ihrem Charakter nach elastisch, da sie lediglich die Klasse der Plazierungen (oder der Konfiguration) einschränken. Es lassen sich aber auch allgemeinere Zwangsbedingungen formulieren, die beispielsweise die Verzerrungsgeschwindigkeiten limitieren. Die Reaktionsspannungen sollten sich auch in solchen Fällen durch Grenzübergänge von ungezwängten Materialien bestimmen lassen. Dabei kann aber herauskommen, daß auch Reaktionsspannungen Arbeit zu leisten imstande sind (s. BERTRAM 1980).

Ein wichtiges Gebiet, daß durch obige Theorie ebensowenig abgedeckt wurde, sind die *unilateralen Zwänge*. Ein Beispiel dafür sind faserverstärkte Materialien, bei denen die Fasern zwar in guter Näherung undehnbar, aber sehr wohl stauchbar sind. Durch Textilfasern verstärkte Polymere könnten dieses Verhalten zeigen. Unilaterale Zwänge führen auf Zwangs*ungleichungen* wie z. B.

$$\langle F(e_o), F(e_o)\rangle - 1 \leq 0$$

für den oben angesprochenen Fall. Die Reaktionsspannungen ergeben sich wie vorher, nur daß hierbei der Faktor α ein bestimmtes Vorzeichen haben muß (s.

FICHERA, PRAGER). Thermodynamische und elektrodynamische Verallgemeinerungen der Zwangsbedingungen findet man bei ALTS, BERTRAM (1980), GURTIN/ PODIO GUIDUGLI, ANDREUSSI / PODIO GUIDUGLI, BERTRAM/ HAUPT, GREEN/ NAGHDI/ TRAPP, TRAPP. Als allgemeinste Rahmenordnung zur Beschreibung nicht-klassischer inneren Zwangsbedingungen kann wohl die aus BERTRAM (1982) gelten.

Große Bedeutung findet die Theorie der Zwangsbedingungen bei der analytischen Lösung von Randwertproblemen (s. Kapitel 19).

19. Das allgemeine Kontinuumsproblem

Zum Schluß wollen wir das *allgemeine Rand- und Anfangswertproblem der Kontinuumsmechanik* darstellen.

Gegeben seien:

(1) ein *Körper* $\boldsymbol{B}$, so daß für jeden Körperpunkt das *materielle System*

$$(X, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F})$$

bekannt ist;

(2) die *Massenkraftdichte* als Funktion von Ort und Zeit

$$\mathbf{k}^f(t, X) \quad ;$$

(3) *Anfangsbedingungen*: Anfangslage (= Bezugsplazierung)

$$\boldsymbol{\kappa}(t, X)\big|_{t=0} \qquad \forall X \in \boldsymbol{B};$$

und evtl. Anfangsgeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i(t, X)\big|_{t=0} \qquad \forall X \in \boldsymbol{B};$$

(4) *Randbedingungen* auf zwei Randbereichen $d\boldsymbol{B}_1$ und $d\boldsymbol{B}_2$:

geometrische: $\quad f_{geo}(\boldsymbol{\kappa}(t, X)) = 0 \qquad \forall t \in [0, d], \forall X \in d\boldsymbol{B}_1;$

dynamische: $\quad f_{dyn}(\mathbf{s}(t, X), \boldsymbol{\kappa}(t, X)) = 0 \qquad \forall t \in [0, d], \forall X \in d\boldsymbol{B}_2.$

Gesucht wird eine Bewegung des Körpers

$$\boldsymbol{\kappa}(t, X) \qquad \forall t \in [0, d], \forall X \in \boldsymbol{B},$$

so daß die folgenden Feldgleichungen befriedigt werden:

(3) die Anfangs- und

(4) die Randbedingungen ;

(5) die Plazierungs-Konfigurations-Beziehungen (alles Ortsfunktionen) :

$$\mathbf{K}_0(X) = \mathit{Grad}\ \boldsymbol{\kappa}(t, X)\big|_{t=0} \qquad \text{als Bezugsplazierung}$$

und

$$\mathbf{K}_x(t) = \mathit{Grad}\ \boldsymbol{\kappa}(t, X) \qquad \forall t \in [0, d],$$

so daß

$$\mathbf{G}_x(t) := \mathbf{K}_x^* \cdot \mathbf{K}_x \qquad \forall X \in \boldsymbol{B}$$

in der Prozeßklasse $\boldsymbol{P}$ ist;

(6) der lokale Impulssatz

$$\mathit{div}(\mathbf{T}) + \rho_R\, \mathbf{k}^f = \rho_R\, \mathbf{b}$$

mit

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}\, \mathbf{S}\, \mathbf{K}^* ,$$

wobei $\mathbf{S}$ lokal als Funktional des G-Prozesses durch das Materialfunktional berechnet wird.

Die Impulsbilanz stellt zunächst einen Satz von drei partiellen Differentialgleichungen dar. Setzt man das Materialfunktional für $\mathbf{S}$ ein (*Methode der Elimination der Spannungen*), so ist (6) "nur" noch eine Differentialgleichung in der Bewegung $\boldsymbol{\kappa}$. Analog kann man mit

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{K}\, \mathbf{S}\, \mathbf{K}^*(\mathbf{n})$$

und dem Materialfunktional die Spannungsrandbedingungen in Bedingungen an die Plazierungsprozesse umformulieren, die freilich sehr kompliziert sein können. Der Kontakt zwischen Körpern wird in der *Reibungskunde* oder *Tribologie* untersucht. Eine allgemeine Systematik von Reibungsgesetzen, die ihrer Natur nach Materialgleichungen sind, wurde von BERTRAM/ SAMPAIO entwickelt, übrigens auf Grundlage derselben Theorie der *materiellen Systeme*.

Liegen p *innere Zwangsbedingungen* vor, so hat man p zusätzliche Felder $a_i(t, x)$ der Reaktionsspannungs-Intensitäten zu bestimmen. Im Einzelfall kann dies sogar zu einer Vergrößerung der Menge geschlossener Lösungen führen (s. TRUESDELL/ NOLL S. 186ff).

Das Problem vereinfacht sich, wenn der Körper aus einem einzigen Material besteht (*uniformer* Körper), und obendrein in der Anfangsplazierung alle Körperpunkte materiell isomorph sind (*homogener* Anfangszustand). Aber selbst dann können Materialfunktional und Randbedingungen usw. so kompliziert sein, daß man geschlossene Lösungen kaum erwarten darf. Man kann in vielen Fällen schon zufrieden sein, wenn man Näherungslösungen finden kann, und wird zunächst auf viele Arten versuchen, die Feldgleichungen so zu vereinfachen und an das gegebene Problem anzupassen, daß gängige numerische Verfahren anwendbar sind (z. B. Differenzenverfahren, Finite-Elemente- oder Randelementemethode).

Man weiß i. allg. nicht einmal, ob das gegebene Problem überhaupt eine Lösung hat. Aber selbst wenn dies der Fall ist, und man eine solche gefunden hat, ist aufgrund der Nicht-Linearitäten der Differentialgleichungen nicht gesichert, daß dies die einzige Lösung ist. Dies führt zur Frage der *Stabilität* von Lösungen: obwohl eine Bewegung $\mathbf{x}$ als exakte Lösung berechnet wurde, kann es sein, daß sie experimentell nicht nachvollziehbar und damit praktisch bedeutungslos ist, weil kleinste Störungen oder Imperfektionen eine völlig andere Bewegung verursachen. Aussagen hierzu sind lediglich in ganz einfachen Fällen bekannt, z. B. bei linear-elastischen Körpern (s. KNOPS/ PAYNE, HACKL/ ZASTROW). Bei nicht-linearer Elastizität werden die Verhältnisse schon erheblich komplizierter (s. BALL, CIARLET, VALENT, WANG/ TRUESDELL). Über alle diese Probleme gibt es eine große Fülle von Untersuchungen. Es würde jedoch unseren Rahmen sprengen, wollten wir auch dieses Gebiet noch darstellen.

Um das Materialverhalten zu untersuchen, ist es jedoch sinnvoll, einfache Lösungen des Impulssatzes zu suchen, und erst dadurch Rand- und Anfangsbedingungen zu konstruieren. Nehmen wir beispielsweise einen uniformen Körper in einem homogenen Anfangszustand. Gelingt es uns, eine *homogene Bewegung* zu finden, (so daß die auf die Anfangskonfiguration bezogenen Verzerrungen nicht ortsabhängig sind), so sind auch die daraus resultierenden Spannungen homogen (also nicht ortsabhängig), womit

$$div(\mathbf{T}) = \mathbf{o}$$

überall gilt. Damit können wir die Impulsbilanz dadurch lösen, daß

$$\mathbf{b} := \mathbf{r}^{\cdot\cdot} = \mathbf{k}^t$$

gesetzt wird. Da die Massenkraft normalerweise gegeben ist, z. B. als konstantes Gravitationsfeld, können wir aus dieser einfachen homogenen Differentialgleichung $\mathbf{x}(t\ ,\ \mathbf{x})$ integrieren. Oft kann man auch $\mathbf{k}^t$ vernachlässigen und *quasistatische* Lösungen suchen, für die die Beschleunigung so klein ist, daß wir den Trägheitsterm im Impulsgesetz ebenfalls vernachlässigen können. Beispiel einer solche Bewegung ist die *einfache Scherung*, wie sie im Abschnitt 8.6 und 10.1 beschrieben wurde.

20. Dimensionen und Einheiten

Empfohlene Literatur: CARLSON

Für konkrete Messungen und Berechnungen ist es nötig, die physikalischen Größen auf *Einheiten* zu beziehen. Zu diesem Zweck müssen wir feststellen, welche physikalische *Dimension* die betreffenden Größen haben. In der Mechanik kommen wir mit drei **Grund-Dimensionen** aus:

- der *Länge* (genauer: der Abstand zweier räumlicher Punkte im E^3)
- der *Zeit* (genauer: der Abstand zweier Zeitpunkte in T)
- der *Masse* eines Körpers.

Die Dimensionen aller anderen Größen können daraus durch Produkt- und Quotientenbildung gemäß ihren Definitionen und Bestimmungsgleichungen abgeleitet werden.

Die **Einheiten** erhält man aus der Dimension, indem man auf den physikalischen Größen eine Norm, eine Metrik oder ein Maß erklärt und ihm einen Namen gibt, den man hinter den numerischen Wert schreibt. Für die Grund-Dimensionen sind folgende **Grund-Einheiten** üblich:

- das **Meter** m : die Metrik des *Euklid*ischen Raumes E^3 ,
- die **Sekunde** s : die Metrik des *Euklid*ischen Raumes T , und
- das **Kilogramm** kg : das Maß, das durch die Differential-3-Form *Massenelement* dm auf den Körpern induziert wird.

Alle anderen Einheiten können aus diesen Grund-Einheiten abgeleitet werden. Beispiele sind:

Einheit des *Volumens*	*Kubikmeter*	m^3
Einheit der *Kraft*	*Newton*	$N := kg\ m\ s^{-2}$
Einheit der *Spannung*	*Pascal*	$Pa := N\ m^{-2} = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
Einheit der *Arbeit*	*Joule*	$J := N\ m = kg\ m^2\ s^{-2}$
Einheit der *Leistung*	*Watt*	$W := J\ s^{-1} = kg\ m^2\ s^{-3}$

Die Deformationsmaße haben allesamt die Dimension *Länge / Länge = 1* (dimensionslos).

Während die Einführung der Einheiten willkürlich ist (man hätte beispielsweise auch die *Meile*, die *Stunde* und das *Pfund* wählen können), liegt die Dimension der physikalischen Größen durch ihre Einführung fest. Lediglich die Unterscheidung in Grund-Dimensionen und abgeleitete ist willkürlich. So hätte man auch *Länge*, *Zeit* und *Kraft* als Grund-Dimensionen wählen können.

Literaturverzeichnis

1975 **Adams, R.A.**: Sobolev Spaces.
Academic Press. New York, San Francisco, London.

1989 **Alexandru, C.**: Eine Systematik nichtlokaler kelvinhafter Fluide vom Grade 2 auf der Basis eines Cosserat-Kontinuummodells.
VDI Verlag. **18**, 61.

1979 **Alts, T.**: Thermodynamik elastischer Körper mit thermo-kinematischen Zwangsbedingungen - fadenverstärkte Materialien.
TU, Berlin.

1973 **Andreussi, F., Podio Guidugli, P.**: Thermomechanical constraints in simple materials.
Bull. Acad. Polon. Sci., Serie des sci. techn. **21**, 4, S. 199-205.

1983 **Backhaus, G**: Deformationsgesetze.
Akademie-Verlag, Berlin.

1977 **Ball, J. M.**: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity.
Arch. Rat. Mech. Anal. **63**, 4. S. 337 - 403.

1975 **Becker, E., Bürger, W.**: Kontinuumsmechanik.
Teubner, Stuttgart.

1976 **Bertram, A., Haupt, P.**: A note on Andreussi-Guidugli´s theory of thermomechanical constraints in simple materials.
Bull. Acad. Polon. Sci., Serie des sci. techn. **24**, 1, S.47 - 51.

1980 **Bertram, A.**: An introduction of internal constraints in a natural way.
ZAMM **60**, S. T100 - 101.

1980 **Bertram, A.**: Materielle Systeme mit inneren Zwangsbedingungen.
Diss., TU Berlin.

1982 **Bertram, A.**: Material systems - a framework for the description of material behavior.
Arch. Rat. Mech. Anal. **80**, 2. S. 99 - 133.

1983 **Bertram, A.**: An axiomatic approach to classical dynamics based on an objective power functional.
Forsch.-Ber. Nr. 1, 2. Inst. f. Mechanik, TU, Berlin.

1988 **Bertram, A., Sampaio, R.**: A constitutive theory of frictional systems.
in: Mechanik - Beiträge zu Theorie und Anwendungen. Trostel-Festschrift.
Hrsg.: Bertram, A., Nasseri, S. M., Sievert, R., TU, Berlin.

1986 **Billington, E. W.**: Introduction to the mechanics and physics of solids.
Adam Hilger, Bristol, Boston.
1982 **Boer, R. de**: Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
1965 **Bourbaki, N.**: Topologie generale.
Chapt. 1 und 2. Hermann, Paris.
1976 **Bowen, R. M., Wang, C.-C.**: Introduction to vectors and tensors.
Bde. 1 und 2. Plenum Press, New York, London.
1965 **Brauer, R.**: On the relation between the orthogonal group and the unimodular group.
Arch. Rat. Mech. Anal. **18**, 2. S. 97 - 99.
1970 **Brickell, F., Clark, R. S.**: Differentiable manifolds.
Van Nostrand Reinhold, London.
1972 **Brunk, G.**: Über die Äquivalenz von Lastensystemen und die mechanischen Wirkungen elektromagnetischer Felder.
Diss. TU, Berlin.
1976 **Brunk, G.**: Die Erweiterung des Prinzips der Rahmeninvarianz der Materialgleichungen auf beliebig bewegte Beobachter.
Habilitationsschrift, TU, Berlin.
1979 **Carlson, D. E.**: A mathematical theory of physical units, dimensions, and measures.
Arch. Rat. Mech. Anal. **70**, 4. S. 289 - 305.
1977 **Choquet-Bruhat, Y., de Witt-Morette, C., Dillard-Bleick, M.**: Analysis, manifolds and physics.
North Holland, Amsterdam, New York, Oxford.
1983 **Ciarlet, P. G.**: Lectures on three-dimensional elasticity.
Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay.
1988 **Ciarlet, P. G.**: Mathematical elasticity. Vol. 1.
North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo.
1745 **Clairaut, A. C.**: Sur quelques principes qui donnent la solution d'un grand nombre de problèmes de dynamique.
Mém. Acad. Sci., Paris. S. 1 - 52.
1987 **Cohen, H., Wang, C.-C.**: On the response and symmetry of elastic materials with internal constraints.
Arch. Rat. Mech. Anal. **99**, 1, S. 1 - 36.
1982 **Cristescu, N., Suliciu, I.**: Viscoplasticity.
Martinus Nijhoff Publ., The Hague, Boston, London.

1986 **Dashner, P. A.**: Large strain inelastic state variable theory.
Int. J. Sol. Struc. **22**, 6, S. 571 - 592.
1975 **Del Piero, G.**: On the elastic-plastic material element.
Arch. Rat. Mech. Anal. **59**, 2. S. 111 - 130.
1905 **Einstein, A.**: Zur Elektrodynamik bewegter Körper.
Ann. Phys., Lpz., **17**, S. 891.
1981 **Fabrizio, M., Lazzari, B.** : On the notion of state for a material system.
Meccanica, **16**, 4, S. 175 - 180.
1972 **Fichera, G.**: Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints.
Handbuch der Physik VIa / 2, Festkörpermechanik II. Bandhrsg.: Truesdell.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. S. 391 - 424.
1892 **Finger, J.**: Über die gegenseitigen Beziehungen von gewissen in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik.
Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien (IIa), **101**, S. 1105 - 1142.
1977 **Fleming, W.**: Functions of several variables.
Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
1979 **Fraeijs de Veubeke, B. M.**: A course in elasticity.
Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
1964 **Green, A. E., Rivlin, R. S.**: On Cauchy's equations of motion.
ZAMP **15**. S. 290 - 292.
1970 **Green, A. E., Naghdi, P. M., Trapp, J. A.**: Thermodynamics of a continuum with internal constraints.
Int. J. Engng. Sci. **8**. S. 891 - 908.
1967 **Greub, W. H.**: Multilinear Algebra.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
1986 **Gummert, P., Reckling, K.-A.**: Mechanik.
Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.
1971 **Gurtin, M. E., Williams, W. O.**: On the first law of thermodynamics.
Arch. Rat. Mech. Anal. **42**, 2. S. 77 - 92.
1972 **Gurtin, M. E.**: Modern continuum thermodynamics.
In: Mechanics today. Bd. 1. Hrsg.: Nemat-Nasser. Pergamon Press, New York.
1973 **Gurtin, M. E., Podio Guidugli, P.**: The thermodynamics of constrained materials.
Arch. Rat. Mech. Anal. **51**, 3. S.192 - 208.
1981 **Gurtin, M. E.**: An introduction to continuum mechanics.
Academic Press, New York.

1986 **Gurtin, M. E., Williams, W. O., Ziemer, W. P.**: Geometric measure theory and the axioms of continuum thermodynamics.
Arch. Rat. Mech. Anal. 92, 1. S. 1 - 22.

1988 **Hackl, K., Zastrow, U.**: On the existence, uniqueness and completeness of displacements and stress functions in linear elasticity.
J. Elast. 19, S. 3 - 23.

1974 **Halmos, P. R.**: Finite-dimensional vector spaces.
Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

1922 **Hamel, G.**: Elementare Mechanik.
Teubner, Leipzig, Berlin.

1949 **Hamel, G.**: Theoretische Mechanik.
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

1977 **Haupt, P.**: Viskoelastizität und Plastizität.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

1987 **Heinz, C.**: Motorrechnung im X_{1+3+3}.
ZAMM 67, 11. S. 537 - 544.

1970 **Holmann, H.**: Lineare und multilineare Algebra I.
Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich.

1981 **Holmann, H., Rummler, H.**: Alternierende Differentialformen.
Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich.

1969 **Hu, S.-T.**: Differentiable manifolds.
Holt, Rinehart and Winston, New York.

1968 **Hund, F.** : Geschichte der physikalischen Begriffe.
Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich.

1955 **Kelley, J. L.** : General Topology.
Nostrand, Toronto, New York, London.

1929 **Kellogg, O. D.**: Foundations of potential theory.
Fr. Ungar Pub., New York. Sowie: Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

1971 **Knops, R. J., Payne, L. E.**: Uniqueness theorems in linear elasticity.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

1986 **Krawietz, A.**: Materialtheorie.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

1975 **Krempl, E.**: On the interaction of rate and history dependence in structural metals.
Acta Mechanica 22, 1-2. S. 53 - 90.

1981 **Krempl, E.**: Plasticity and variable heredity.
Arch. Mech. 33, 2. S. 289 - 306.

1959 **Lagally, M., Franz, W.**: Vorlesungen über Vektorrechnung.
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

1968 **Leigh, D. C.**: Nonlinear Continuum Mechanics.
McGraw-Hill, New York.

1985 **Lemaitre, J., Chaboche, J.-L.**: Mécanique des matériaux solides.
Dunod, Paris.

1968 **Loomis, L. H., Sternberg, S.**: Advanced calculus.
Addison-Wesley, Reading.

1983 **Marsden, J. E., Hughes, T. J. R.**: Mathematical foundations of elasticity.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

1924 **Mises, R. v.**: Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik.
ZAMM 4, 2. S. 155 - 181.
Sowie: Anwendungen der Motorrechnung.
ZAMM 4, 3. S. 193 - 213.

1972 **Müller, I.**: On the frame dependence of stress and heat flux.
Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 4. S. 241 - 250.

1973 **Müller, I.**: Thermodynamik.
Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf.

1985 **Müller, I.**: Thermodynamics.
Pitman, Boston, London, Melbourne.

1977 **Muschik, W., Brunk, G.**: Bemerkungen zur Objektivität und zur materiellen Indifferenz bei beliebigem Wechsel des Bezugssystems.
ZAMM 57. T 108 - 110.

1687 **Newton, I.**: Mathematische Prinzipien der Naturlehre.
Hrsg. Wolfers. Berlin, 1872.

1959 **Noll, W.**: The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics.
In: The axiomatic method, with special reference to geometry and physics. (Symposium at Berkeley 1957). North-Holland, Amsterdam.
In: Noll (1974).S. 32 - 47.

1963 **Noll, W.**: La mécanique classique, basée sur un axiome d'objectivité.
In: La méthode axiomatique dans les mécaniques classiques et nouvelles. (Colloque Int., Paris 1959). Gauthier-Villars, Paris.
In: Noll (1974). S. 135 - 144.

1964 **Noll, W.**: Euclidean geometry and minkowskian chronometry.
Amer. Math. Month. 71. S. 129 - 144.
In: Noll (1974). S. 183 - 198.

1965 **Noll, W.**: Proof of the maximality of the orthogonal group in the unimodular group.
Arch. Rat. Mech. Anal. **18**, 2. S. 100 - 102.
In: Noll (1974). S. 200 - 202.

1967 **Noll, W.**: Space-time structures in classical mechanics.
Delaware seminar in the foundations of physics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. S. 28 - 34.
In: Noll (1974). S. 204 - 210.

1972 **Noll, W.**: A new mathematical theory of simple materials.
Arch. Rat. Mech. Anal. **48**, 1. S. 1 - 50.
In: Noll (1974). S. 243 - 292.

1973 **Noll, W.**: Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics.
Arch. Rat. Mech. Anal. **52**, 1. S. 62 - 92.
In: Noll (1974). S. 294 - 324.

1974 **Noll, W.**: The foundations of mechanics and thermodynamics.
Selected Papers. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

1987 **Noll, W.**: Finite-dimensional spaces. Algebra, geometry, and analysis.
Vol. 1. Martinus Nijhoff Publ., Dordrecht, Boston, Lancaster.

1988 **Noll, W., Virga, E. G.**: Fit regions and functions of bounded variation.
Arch. Rat. Mech. Anal.**102**, 1. S. 1 - 21.

1968 **Onat, E. T.**:The notion of state and its implications in thermodynamics of inelastic solids.
In: IUTAM 1966. Irreversible aspects of continuum mechanics. Hrsg. Parkus, Sedov. Springer-Verlag, Wien, New York. S. 292 - 313.

1970 **Onat, E. T.**: Representation of inelastic mechanical behavior by means of state variables.
In: IUTAM 1968. Hrsg.: Boley. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. S. 213 - 225.

1968 **Owen, D. R., Williams, W. O.**: On the concept of rate-independence.
Quaterly Appl. Math. **16**, 3. S. 321 - 329.

1965 **Pipkin, A,. C., Rivlin, R. S.**: Mechanics of rate-independent materials.
ZAMP, **16**, 3. S. 313 - 327.

1989 **Podio Guidugli, P., Vianello, M.**: Constraint manifolds for isotropic solids.
Arch. Rat. Mech. Anal. **105**, 2. S. 105 - 121.

1986 **Povstenko, Yu. Z.**: Analysis of motor fields in cosserat continua of two and one dimensions and its applications.
ZAMM **66**, 10. S. 505 - 507.

1966 **Prager, W.**:On elastic, perfectly locking materials.
In: München 1964. Applied mechanics. Hrsg.: Görtler. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. S. 538 - 544.

1964 **Schubert, H.**: Topologie.
Teubner. Stuttgart.

1986 **Silber, G.**: Eine Systematik nichtlokaler kelvinhafter Fluide vom Grade drei auf der Basis eines klassischen Kontinuummodelles.
VDI Verlag. **18**, 26.

1977 **Šilhavý, M., Kratochvíl, J.**: A theory of inelastic behavior of materials.
Arch. Rat. Mech. Anal. **65**, 2. S. 97 -152.

1956 **Simonyi, K.**: Theoretische Elektrotechnik.
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

1970 **Spivak, M.**: A comprehensive introduction to differential geometry.

1979 Bde. I und IV. Publish or Perish, Berkeley.

1982 **Tolstow, G. P.**: Maß und Integral.
Carl Hanser Verlag, München, Wien.

1971 **Trapp, J. A.**: Reinforced materials with thermo-mechanical constraints.
Int. J. Engng. Sci. **9**. S. 757 - 773.

1979 **Trostel, R.**: Mechanik III, Energieprinzipien der Mechanik.
TU, Berlin.

1980 **Trostel, R.**: Eine Struktur-Analyse der Materialgleichungen in der Stabtheorie auf der Basis der Cosserat-Modellvorstellung.
In: Beiträge zur Bautechnik. Halasz-Festschrift. Hrsg.: Bauer, Scheer, Cziesielski. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München. S. 73 - 86.

1981 **Trostel, R.**: Gedanken zur klassischen Punktmechanik.
In: Humanismus und Technik, **24**. TU, Berlin. S. 63 - 134.

1982 **Trostel, R.**: Ein Verifizierungsschema für die Grundgleichungen der Relativistischen Punktmechanik.
In: Humanismus und Technik. TU, Berlin. S. 86 - 139.

1985 I **Trostel, R.**: Mechanik IV, 1, Strömungsmechanik.
TU, Berlin.

1985 II **Trostel, R.**: Gedanken zur Konstruktion mechanischer Theorien.
In: Beiträge zu den Ingenieurwissenschaften. Sattler-Festschrift.
TU, Berlin. S. 96 - 134.

1988 **Trostel, R.**: Gedanken zur Konstruktion mechanischer Theorien II.
Forsch.-Ber. Nr. 7, 2. Inst. f. Mechanik, TU, Berlin.

1960 **Truesdell, C. A., Toupin, R. A.**: The classical field theories.
In: Handbuch der Physik. Bd. III/ 1. (Hrsg. Flügge).
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

1965 **Truesdell, C. A., Noll, W.**: The non-linear field theories of mechanics.
Handbuch der Physik. Bd. III/ 3. Hrsg. Flügge.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

1977 **Truesdell, C. A.**: A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1.
Academic Press, New York, San Francisco, London.

1988 **Valent, T.**: Boundary value problems of finite elasticity - local theorems on existence, uniqueness, and analytic dependence on data.
Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo.

1973 **Wang, C.-C., Truesdell, C. A.**: Introduction to rational elasticity.
Noordhoff Int. Pub., Leyden.

1981 **Westenholz, C. v.** : Differential forms in mathematical physics.
North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford.

1981 **Woods, L. C.**: The bogus axioms of continuum mechanics.
Bull: Inst. Math. Appl., Southend on Sea, 17. S. 98 - 102.

Notations-Index

Es werden häufig benutzte Formelzeichen aufgeführt und die Seite ihrer Einführung angegeben.

Lateinische Formelzeichen:		Seite
$\mathbf{a}_\xi := \vdash \zeta_\xi(o_\xi(t))\ ,\ \zeta_\xi(o_\xi(t)) \to \ \in V$	relat. Verschiebung der Beobachter	102
$A_\xi : \Pi \to \mathbb{R}$	Arbeit	139
$\mathbf{A} \in Iso(T_X B\ , T_Y B)$	materieller Isomorphismus	203
$\dot{\mathbf{A}}(\cdot) := \mathbf{A}\ (\cdot)\ \mathbf{A}^*$: $Lin(T_X{}^*B\ , T_X B) \to Lin(T_Y{}^*B\ , T_Y B)$		202
$Aut(V) := Iso(V,V)$	lineare invertierbare Abbildungen	16
$axi(\mathbf{A}) := a^{ij}\, \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i$	axialer Vektor eines Tensors $\mathbf{A}$	34
$\mathbf{b}_\xi := \mathbf{r}_\xi^{\cdot\cdot} = \mathbf{v}_\xi^{\cdot}$	Beschleunigung bez. des Beobachters ξ	100
$\mathbf{B} := \mathbf{F}\,\mathbf{F}^* \in Sym^+(V,V)$	linker *Cauchy-Green*-Tensor	81
$\mathcal{B}$	materieller Körper	67
$\mathcal{B}_o := \kappa_o(\mathcal{B}) \subset E^3$	Körpergebiet in der Bezugsplazierung	78
$\mathcal{B}_t := \kappa(\mathcal{B}) \subset E^3$	Körpergebiet in der Momentanplazierung	78
BZP	Bezugspunkt	40
BZS := (BZP, Basis)	Bezugssystem	41
$\mathbf{c}_{o\zeta} \in V$	verlorenes Moment	144
$\mathcal{C}$	Raum-Zeit-Kontinuum	97
$\mathbf{C} := \mathbf{F}^*\mathbf{F} \in Sym^+(V,V)$	rechter *Cauchy-Green*-Tensor	80, 81
C^k	Klasse der k-mal diff.-baren Funktionen	14
$d_i \in \mathbb{R}^{+1}$	Dauer eines Prozesses P_i	185
$\mathbf{d}_{o\xi} := \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{v}_\xi\, dm \in V$	Drall (oder Drehimpuls) bez. o	120
do	Oberflächenelement	65
$dV = *1 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_n$	Volumenelement	64, 71
$\mathbf{D} := \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^*) \in Sym(V,V)$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	112, 113
$\mathbf{D}^A := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \in Sym(V,V)$	*Almansi*scher Verzerrungstensor	82
$d\mathcal{B}$	Körperrand	67
$det\,\mathbf{A}$	Determinante eines Tensors $\mathbf{A}$	21
$\mathbf{D}^F := det\,\mathbf{F}\ \mathbf{F}^* \in Aut(V)$	Flächenkonfigurations-Tensor	82
$\mathbf{D}^G := \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \in Sym(V,V)$	*Green*scher Verzerrungstensor	82
$\mathbf{D}^H := ln\,\mathbf{V} = \frac{1}{2}\,ln\,\mathbf{B} \in Sym(V,V)$	*Henck*yscher Verzerrungstensor	82

div	Divergenz eines Feldes	62
dm	Massenelement	67
$\overset{e}{\mathbf{e}}_t := \mathbf{a}_t'' + \mathbf{w}_t^{\cdot} \times (\mathbf{r}_t(t) - \mathbf{a}_t) + 2\,\mathbf{w}_t \times \mathbf{Q}_t(\mathbf{v}_t(t)) + \mathbf{w}_t \times [\mathbf{w}_t \times (\mathbf{r}_t(t) - \mathbf{a}_t)]$	in *Euler*scher Darstellung	111
	nicht-objektiven Anteil der Beschleunigungs-Transformation	105
$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^*) \in Sym(V,V)$	linearisierter *Green*scher Tensor	87
$\mathcal{E}$	Beobachterraum	70, 98
$E_{kin} := \frac{1}{2}\int_B <\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t> dm$	kinetische Energie	169
$E_t := \pi^{-1}(t)$	Simultanraum	97
$\mathbf{f}_{ot} \in V$	verlorene Kraft	144
$\mathbf{f}^o_t$	spezifischen verlorenen Kraft	155
$F: P \to Sym(T_X{}^*B, T_XB)$	Materialfunktional	187
$\mathbf{F} := \mathbf{x}_*\|_{X_o} = \mathbf{K}_X \mathbf{K}_{oX}^{-1} \in Aut(V)$	Deformationsgradient	78
$\mathbf{G}_X := \mathbf{K}_X{}^* \mathbf{K}_X \in Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$	Konfiguration des Körperlementes in X	72
$G: Z \to Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$	Ausgabefunktion der Konfiguration	195
$\mathcal{G}$	Symmetriegruppe	214
$G: \Gamma \to Sym(T_X{}^*B, T_XB)$	Geschichtsfunktional	242
$grad$	Gradient eines Feldes	59
$h: P \to M$	Herstellung	190
$H: \mathbb{R}^{0+} \to Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$	Deformationsgeschichte	241
$\mathbf{H} := Grad\,\mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \in Lin(V,V)$	Verschiebungsgradient	79
$\mathcal{H}$	Symmetrie-Halbgruppe	211
$\overset{i}{\mathbf{i}}_t := \int_{B_t} \mathbf{v}_t\, dm \in V$	in intrinsischer Darstellung	111
	Impuls	119
$\mathbf{I}_M$ oder nur $\mathbf{I}$	Identische Abbildung einer Menge M	14
$Iso(V_1,V_2) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V_2,V_1), \exists\, \mathbf{A}^{-1} \}$	lineare invertierbare Abbildungen	15
$\mathbf{k}_{ot} := \mathbf{f}_{ot} + \mathbf{i}_t^{\cdot} \in V$	Kraft	144
$\mathbf{k}^o_t := \mathbf{f}^o_t + \mathbf{h}_t$	spezifische Kraft	158
$\mathbf{k}^f_t$	Fernkraft	162
$\mathbf{k}^n_t$	Nahkraft	162
$\mathcal{K}$	Plazierungsklasse des Körpers	70

$\mathbf{K}_X := \mathbf{x}_*\|_X \in Iso(T_XB, T_{x(X)}E)$	Plazierung des Körperelements in X	70
$\mathbf{K}_{oX} := \mathbf{x}_{o*} \in Iso(T_XB, T_{x_o(X)}E)$	Bezugsplazierung des Körperelements	77
$\overset{l}{\mathbf{l}}_t$	in *Lagrange*scher Darstellung	111
l_t	spezifische Leistung	154, 160
$L_t(\mathbf{x}, t) := A_t(\mathbf{x}, t)^{\cdot}$	Leistung	139, 169
$L^a_t(\mathbf{x}, t) := \int_B <\mathbf{k}^f_t, \mathbf{v}_t> dm + \int_B <\mathbf{m}^f_t, \boldsymbol{\omega}_t> dm + \int_{\partial B} <\mathbf{v}_t, \mathbf{T}_t(d\mathbf{o})> + \int_{\partial B} <\boldsymbol{\omega}_t, \mathbf{M}_t(d\mathbf{o})>$	äußeren Leistung	169
$L^i_t(\mathbf{x}, t) := \int_B <\mathbf{T}_t, \mathbf{D}_t> dV + \int_B <\mathbf{M}, grad\, \boldsymbol{\omega}_t> dV$	innere od. Spannungsleistung	169
$\mathbf{L} := grad\, \mathbf{v} = \mathbf{F}^{\cdot} \mathbf{F}^{-1} \in Lin(V,V)$	Geschwindigkeitsgradient	112
$Lin(V_1,V_2) := \{ \mathbf{A}: V_1 \to V_2 \mid \text{linear} \}$	lineare Abbildungen	15
m	Material-Äquivalenzrelation	205
$m_B \in \mathbb{R}^+$	Masse des Körpers B	67
$\mathbf{m}_{ot} := \mathbf{e}_{ot} + \mathbf{d}_{ot}^{\cdot} \in V$	Moment	144
$\mathbf{m}^o_t$	spezifisches freies Moment	155
$\mathbf{m}^f_t$	Fernmoment	162
$\mathbf{m}^n_t$	Nahmoment	162
$\mathcal{M}$	Menge der herstellbaren Systeme	190, 196
$\mathbf{M}_t \in Lin(V,V)$	Momenten-Spannungs-Tensor	162
$MS = (X, P, F)$	materielles System	188
$\mathbf{n}$	normierte äußere Flächennormale	170
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen	14
$\mathbf{N} := \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-*} \in Lin(T_X{}^*B, T_XB)$	intrins. Momenten-Spannungs-Tensor	164
$Ort(V) := \{ \mathbf{A} \in Aut(V) \mid \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{I} \}$	orthogonale Gruppe	26
$Ort(V,\mathbf{G}) := \{ \mathbf{A} \in Aut(V) \mid \mathbf{A}^* \mathbf{G} \mathbf{A} = \mathbf{G} \}$	orthogonale Gruppe bez. $\mathbf{G}$	26
$Ort^+(V) := \{ \mathbf{A} \in Ort(V) \mid det\, \mathbf{A} = 1 \}$	spezielle orthogonale Gruppe	26
$P: [0, d] \to Sym^+(T_XB, T_X{}^*B)$	Prozeß	184, 187
P_o	Nullprozeß	185
$\mathcal{P}$	Prozeßklasse	186
$Q_t \in Ort^+(V)$	relative Drehung der Beobachter	102
$\mathbf{r} \in V$	Ortsvektor	40, 78, 102
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	14

$\mathbf{R} := \mathbf{F}\,\mathbf{U}^{-1} \in Ort^+(V)$	Drehungs-Anteil der Deformation	80, 81
rot	Rotation eines Feldes	62
$s_\xi := \mathbf{T}_\xi(\mathbf{n}) \in V$	(Kraft-) Spannungsvektor	170
$\mathcal{S} := \mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{T}\,\mathbf{K}^{-*} \in Lin(T_X{}^*B, T_XB)$	intrinsischer (Kraft-) Spannungs-Tensor	164
$S : Z \to Sym(T_X{}^*B, T_XB)$	Ausgabefunktion der Spannung	195
$Skw(V,V^*) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V^*) \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^* \}$	antimetrische lineare Abbildungen	20
$sp\,\mathbf{A} := \alpha^1{}_1 + \alpha^2{}_2 + \alpha^3{}_3$	Spur eines Tensors $\mathbf{A}$	18, 21
$Sym(V,V^*) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V^*) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^* \}$	symmetrische lineare Abbildungen	19
$Sym^+(V,V^*)$	symm. pos.-definite lin. Abbildungen	19
$t \in T$	Zeitpunkt	95
$\mathbf{T}_\xi \in Lin(V,V)$	(Kraft-) Spannungs-Tensor	162
$\mathbf{T}^{1PK} := det(\mathbf{F})\,\mathbf{T}\,\mathbf{F}^{-*} \in Lin(V,V)$	1. *Piola-Kirchhoff*-Tensor	173
$\mathbf{T}^{2PK} := det(\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}\,\mathbf{F}^{-*} = \mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}^{1PK}$	2. *Piola-Kirchhoff*-Tensor	173
T	Zeit	95
T_XB	Tangentialraum in X an B	45
$T_X{}^*B$	Kotangentialraum in X an B	46
TB	Tangentialbündel über B	51
$\mathbf{u} := \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$	Verschiebungsvektor	78
$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} \in Sym^+(V,V)$	rechter Streckungstensor	80, 81
$Unim(V) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V) \mid \lvert det\,\mathbf{A}\rvert = 1 \}$	unimodulare Gruppe	21
$Unim^+(V) := \{ \mathbf{A} \in Lin(V,V) \mid det\,\mathbf{A} = 1 \}$	spezielle unimodulare Gruppe	21
$\mathbf{v}_\xi := \mathbf{r}_\xi^{\cdot} \in V$	Geschwindigkeit bez. des Beobachters ξ	100
$\mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{B}} \in Sym^+(V,V)$	linker Streckungstensor	81
$\mathbf{w}_t := \frac{1}{2}\,axi\,(\mathbf{Q}_t^{\cdot}\,\mathbf{Q}_t^*) \in V$	rel. Winkelgeschwindigkeit der Beob.	104
$z \in B_t$	mat. Punkt in der Momentanplazierung	77
$X \in B$	materieller Punkt	67
$X_0 \in B_0$	mat. Punkt in der Bezugsplazierung	77
z	Zustands-Äquivalenzrelation	194
$Z := P/z$	Zustandsraum	194
$Z \in Z$	Zustand	194

griechische Formelsymbole:

$\alpha_t := \zeta_t\,\xi_t^{-1} : E^3 \to E^3$	momentaner Beobachterwechsel	101
$\beta : T \to C$	Bahn	97
$\gamma_A : Z_1 \to Z_2$	von $\mathbf{A}$ induzierte Zustandsraum-Bijektion	209
Γ	Geschichtsklasse	241
δl_ξ	spezifische virtuelle Leistung	154
$\delta L_\xi(\kappa, t, \cdot) : \delta V_\xi \to \mathbb{R}$	virtuelle Leistung	141
δv_ξ	virtuelle Geschwindigkeit	140
δV_ξ	Menge der virtuellen Geschwindigkeiten	140
$\eta : (Z, P_2) \to Z$	Zustandsübergangsfunktion	230
$\theta : P \to Z$	natürliche Abb. der Äquivalenzrelation z	196
Θ	Massenträgheitstensor	150
$\kappa : B \to E^3$	Plazierung	69
$\kappa_0 : B \to E^3$	Bezugsplazierung	77
$\kappa : T \times B \to C$	Bewegung des Körpers	107
$\kappa_\xi := \xi_t\,\kappa_t : B \to E^3$	Bewegung des Körpers für Beobachter ξ	107
$\lambda_i \in \mathbb{R}^+$	Eigenwerte von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$	80
$\Lambda^k(V)$	alternierende multilineare k-Formen	29
$\mu : Z \to P$	Auswahlfunktion	208
$\xi : C \to T \times E^3$	Beobachter	98
$\xi_t : E_t \to E^3$	Beobachterabbildung	99
$\Xi : Z \to M$	Bijektion	196
$\pi : C \to T$	Zeitpunktprojektion	97
Π	Bewegungklasse des Körpers	133
ρ_κ, ρ	Dichte in der Plazierung κ	71
ρ_0	Dichte in der Bezugsplazierung κ_0	78
$\chi := \kappa\,\kappa_0^{-1} : B_0 \to B_t$	Verrückung oder Deplazierung	77
$\omega_e(t,z) := \frac{1}{2}\,axi\,(\mathbf{L}) = -\frac{1}{2}\,rot\,\mathbf{v} \in V$	Wirbelvektor	113
$\Omega := \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^*) \in Skw(V,V)$	Wirbeltensor	113

andere Formelzeichen:

∇	Nabla	62
$\langle , \rangle$	duale Überschiebung, inneres Produkt	16
$\boxtimes$	Beweisende	14

×	zwischen Mengen: kartesisches Produkt	14
×	zwischen Vektoren: Kreuzprodukt	34, 35
⊗	Tensorprodukt	16
∧	äußeres Produkt	30
*	Stern- oder *Hodge*operator	33
*	hochgestellt: Dual oder Kodifferential	16, 18, 47
*	tiefgestellt: Differential	48
[·,·,·]	Spatprodukt	34
$\vdash x, y \dashrightarrow$	Translationsvektor von x nach y	37
∘	Hintereinanderschaltung von Prozessen	185
<	Herstellungsrelation	191

Register

A

Abstand, räumlicher		97
adjungiert		26
ähnliche Prozesse	D 13.2	195
Änderung		114
äußere Algebra		31
äußere Leistung	S 11.26	169
äußeres Produkt		30
*Almansi*scher Tensor		82
alternd	D13.14	200
alternierende Multilinearform		29
Anfangsbedingungen		256
Anfangsplazierung		132
Anfangszeitpunkt		132
Anfangszustand	D 13.1	194
antimetrischer Tensor		20
Arbeit	A 11.1	139
Atlas	D 4.2	43
Ausgabefunktion der Konfiguration	D 13.4	195
Ausgabefunktion der Spannung	D 13.4	195
Auswahlfunktion		208
Automorphismus		16
axialer Vektor		34
axiales Trägheitsmoment		150

B

Bahn	D 9.3	97
Basis-Raum	D 4.8	50
Beobachter	D 9.4	98
Beobachterraum	D 9.4	98
Beobachterwechsel	A 9.6	101
Beschleunigung	D 9.5	100, 105

Bewegung des Körpers	D 10.1	107
für einen Beobachter		108
Bewegungsfunktional		134
Bewegungklasse	D 10.4	133
für einen Beobachter		134
Bezugs-Konfiguration		83
Bezugsplazierung		77
Bezugspunkt		40
Bezugssystem		41, 95, 100
Bündel	D 4.8	50
*Euklid*isches		96

C

Cauchy-Filter	D 16.4	229
Cauchy-Green-Tensor		81
*Cauchy*sche Gleichung, 1.	S 11.23	167
2.	S 11.29	171
*Cauchy-Stokes*scher Zerlegungssatz		112
Cayley-Hamilton, Gleichung von		22
*Christoffel*symbole		63
*Coriolis*beschleunigung		105

D

d'Alembert, Prinzip von	S 11.10	147, 159
Dauer eines Prozesses	D 12.1	184
Deformationsgeschichte	D 17.1	241
Deformationsgradient		78
deformations-invariant		135
Deplazierung		77
Determinante		21
Determinanten-Regel		34
Determinismus	A 11.1, 12.7	139, 187
bei Zwangsbedingungen	A 18.2	250
Deviationsmoment		150
Dichte		71
Diffeomorphismus		44

Differential		46, 48
Differential-*k*-Form		52
Differentialtyp, materielle Systeme vom	D 12.10	188
differenzierbare Mannigfaltigkeit	D 4.2	44
differenzierbare Struktur	D 4.2	44
Dimension		259
Divergenz		62
Drall	D 10.3	120
Drallsatz, globaler	S 11.10, 24	147, 168
lokaler	S 11.18, 23	159, 167
Drehimpuls	D 10.3	120
Drehung des Beobachters		102
Drehung des Translationsraumes	S, D 3.4	41
Drehungs-Anteil		81
Druck		172, 227
Duale, duale Abbildung		18
Dualraum		16
dyadisches Produkt		16
dynamische Größen	D 11.7	144
dynamisch möglich	A 11.2	140

E

Eigenvektor		20
Eigenwert		20
Einbettung	D 7.1	69
einfache Scherung		89, 113
Einfrierung		185
Einheiten		259
Elastizität	D 12.8	188, 224, 247
Semi-	D 16.13	238, 247
Elimination der Spannungen		257
Endomorphismus		16
Energie, kinetische	S 11.26	169
des starren Körpers		151
entlang einer Bewegung		135
Ereignis	D 9.3	97
*Euklid*ische Bündel		96

*Euklid*ische Mannigfaltigkeiten		55
*Euklid*ischer Parallelismus		56
*Euklid*ischer Raum	D 3.3	40
*Euklid*ische Transformation		101
*Euklid*isch-invariant		126
*Euler*sche Darstellung		111
*Euler*sche Geschwindigkeitsformel		121
*Euler*sche Kreiselgleichung		151
Extra-Spannung		252

F

Faser	D 4.8	50
Fernwirkung		161
Filter	D 16.1	228
Nachbarschafts-	D 16.2	228
Flächenkonfigurations-Tensor		82, 172
Fluid	D 15.15	221, 226
Forminvarianz, Prinzip der	S 11.22	166
Fortsetzung eines Prozesses		185
Funktional-Matrix		49
Funktionskeime		44
Fußpunkt-Projektion	D 4.8	50

G

Galilei-Transformation	D 9.8	106
Gase	D 15.15	221, 226
*Gauß*sche Basis	S, D 4.6	46
*Gauß*scher Satz	S 5.2	65
Geschehensfunktion , lokale		111
globale		118
Geschichte, Deformations-	D 17.1	241
Geschichtsfunktional	D 17.3	242
Geschichtsklasse	D 17.2	241
Geschwindigkeit	D 9.5	100, 104
virtuelle		141
Geschwindigkeitsgradient		112

geschwindigkeitsunabhängig	D 13.3	195, 246
gleichmäßig stetig	D 16.3	229
globale Geschehensfunktion		118
Gradient		59
Gradientenbasis	S, D 4.6	46
Gradientenfeld		61
Gradientenvektorbasis		57
Grassmann-Algebra		31
Gravitation		162, 180
*Green*scher Tensor		82
linearisierter		87
Gruppe	D 15.1	210
spezielle lineare		21
spezielle orthogonale		26
Symmetrie-	D 15.5	214
orthogonale		26
unimodulare		21

H

Halbgruppe	D 15.1	210
Symmetrie-	D 15.2	211
Hauptinvariante		21
Hauptspannung		171
Hauptträgheitsachse		150
Hauptträgheitsmoment		150
*Henck*yscher Tensor		82
herstellbar	D14.10, 12	207, 208
Herstellung	S 12.12, S, D 17.4	190, 243
Herstellungsprozeß	S 12.12	190
Herstellungssatz	S 12.12, S, D 17.4	190, 243
*Hodge*operator		33
homogene Bewegung		258
Homöomorphismus		43
*Hooke*sches Gesetz		226
hydrostatischer Druck		172

I

Impuls	D 10.2	119
Impulssatz, globaler	S 11.10, 24	147, 168
lokaler	S 11.18, 23	159, 167
induzierte Bijektion der Zustandsräume	D 14.13	209
induzierte Zustandsraum-Bijektion	D, S 15.4	213
Inkompressibilität		252
inneres Produkt		23, 25
innere Variable		247
innere Zwangsbedingung	D 18.1	250
Integraltyp, materielles System vom	D 12.11	189
intrinsisch		74, 111, 116
isochor		90
Isometrie		36
isomorph, materiell	D14.3	203
Isomorphismus		15
materieller	D 14.3	203
isotrop	D 15.13	220, 224
isotrope Tensorfunktion		225

J

Jacobi-Matrix		49

K

Karte	D 4.1	43
Kartenwechsel		43
kinetischen Energie	S 11.26	169
des starren Körpers		151
kleine Verformungen		87
Kodifferential		47
Körper	A,D 6.1	67
Konfiguration	D 7.3, 4	72
konjugiert		174
Kontinuums-Hypothese		67
konvektive Änderung		114
Koordinaten	D 4.1	43

Koordinaten, materielle		74
mitgeschleppte		86
Kotangentialraum	D 4.4	46
kovariante Ableitung		64
kovariante Basis		57
Kovektorfeld		52
Kraft	D 11.7	144, 157
spezifische		157
spezifische verlorene		155
verlorene		157
Kraft-Spannungs-Tensor		162
intrinsischer		164
Kraftspannungsvektor		170
Kreiselgleichung		151
Kreisprozeß	D 13.1	194
Kreuzprodukt		34

L

*Lagrange*sche Darstellung		111
*Lamé*sche Konstante		226
Leistung	A 11.1	139, 157
äußere	S 11.26	169, 173
innere	S 11.26	169, 173, 174
Spannungs-	S 11.26	169, 173, 174
spezifische		154
spezifische virtuelle		154
virtuelle	D 11.3	141, 156
Leistungsbilanz	S 11.18, 26	159, 169
lineare Abbildung		15
linearer Raum		15
linearisierter *Green*scher Verzerrungstensor		87
linker *Cauchy-Green*-Tensor		81
linker Streckungstensor		81
lokale Änderung		114
lokale Geschehensfunktion		111
lokale Massenbilanz		117
lokale Wirkung	S 11.14	155

M

m-Äquivalenz	D 14.7	205
Mannigfaltigkeit	D 4.1	43
differenzierbare		44
Euklidische		55
Masse	A,D 6.1	67
Massenbilanz		117
Massenelement	A,D 6.1	67
Massenmittelpunkt		149
Massenstrom		119
Massenträgheitstensor		150
Material	D 14.7	205
mit Geschichtsfunktional	D 17.3	242
Materialfunktional	A 12.7	187
materiell isomorph	D14.3	203
materielle Koordinaten		74
materieller Isomorphismus	D14.3	203
materieller Körper	A,D 6.1	67
materieller Punkt	A,D 6.1	67
materielles System	D 12.8	188
Metrik	D 16.7	230
Metrikkoeffizient		24
mitgeschleppte Koordinaten		86
Moment	D 11.7	144, 157
spezifisches freies		155
verlorenes		157
Momenten-Spannungs-Tensor		162
intrinsischer		164
Momentenspannungen		170
Motor		122
multilinear		29

N

Nabla		62
Nachbarschaft	D 16.2	229
Nahwirkung		161
natürliche Basis	S, D 4.6	46

natürliche Uniformität, Topologie	D 16.9	231
Navier-Stokes-Fluid		189, 227
*Newton*sches Beobachtersystem	D 9.10	106
non-polar	D 11.28	171
Norm		25
normales Gebiet		64
Normalspannung		171
Nullprozeß		185

O

Oberflächenelement		65
objektiv		126
Objektivitätshypothese	A 11.2	140
Objektivität, Prinzip der materiellen	S 11.20	163
Orientierung von $\Lambda^n(V)$		32
einer Mannigfaltigkeit		52
orthogonal		26
Orthonormalbasis		25
Ortsvektor		40

P

Parallelismus		56
Piola-Kirchhoff-Tensor		173
Plastizität		198, 246
Plazierung	D 7.2	70
Plazierungsklasse	D 7.2	70
polare Zerlegung	S 8.1	79
positiv-definiter Tensor		19
Prinzip der Forminvarianz	S 11.22	166
der lokalen Wirkung	S 11.14	155
der materiellen Objektivität	S 11.20	163
der virtuellen Leistung	S 11.5, 25	143, 169
des Determinismus	A 11.1, 12.7	139, 187
bei Zwangsbedingungen	A 18.2	250
Reaktions-	S 11.27	170
Relativitäts-		165

Prinzip von *d'Alembert*	S 11.10	147, 159
in der *Lagrange*schen Fassung	S 11.10	148
Produktbündel		51
Prozeß	D 12.1	184
-Fortsetzung		185
-Segment		185
Prozeßklasse	D 12.2	186

Q

Quasimetrik	D 16.7	230

R

räumlicher Abstand		97
Randbedingungen		256
Rand einer Mannigfaltigkeit	D 4.1	43
Rand- und Anfangswertproblem		256
Raum, dualer		16
*Euklid*ischer	D 3.3	40
linearer		15
uniformer	D 16.2	229
Zustands-	D 13.1	194
raumfest		99
Raum-Zeit-Kontinuum	D 9.3	97
Reaktionsprinzip	S 11.27	170
Reaktionsspannungen	A 18.2	250
rechter *Cauchy-Green*-Tensor		81
rechter Streckungstensor		81
Reiner-Rivlin-Fluid		189
Relativbeschleunigung		105
Relativitätsprinzip		165
Relaxation	D 16.13	235, 238
revertierbarer Prozeß	D 13.7	198
revertierbares materielles System	D 13.12	200
*Reynolds*sche Transporgleichung		114, 119
Rotation		62

S

Scherung, einfache		89, 113, 258
Schnitt eines Bündels	D 4.8	50
Schnittprinzip		68
Schubspannung		171
semi-elastisch	D 16.13	238
simultan		97
Skalarfeld		51, 60
Spannungsdeviator		172
Spannungs-Tensor		162
intrinsischer		164
Spannungs-Leistung	S 11.26	169
Spatprodukt		34
Spektral-Satz		27
spezielle lineare Gruppe		21
spezielle orthogonale Gruppe		26
Spur		18
Stabilität		258
starrer Körper	D 11.11	149, 254
Starrkörperbewegungen		120, 149
Starrkörpermodifikationen		123
invariant gegen		135
stationär		114
Sternoperator		33
Streckungstensor		81
substantielle Änderung		114
Symmetriegruppe	D 15.5	214
des Zustandes	D 15.12	219
Symmetrie-Halbgruppe	D 15.2	211
Symmetrie-Transformation	D 15.2	211, 242
symmetrischer Tensor		19
System, materielles	D 12.8	188

T

Tangentenbasis	S, D 4.6	46
Tangentenvektor	D 4.3	45, 57

Tangentenvektorbasis		57
Tangentialbündel		51
Tangentialraum	D 4.3	45
Teilgeschichte	D 17.1	241
Teilkörper	A,D 6.1	67
Teilprozeß		185
Tensor		15
Tensorfeld		52
Tensorprodukt		16
Tensor vom (p,q)-Typ		22
Tetrade		23
Thermodynamik		247
Trägheitsmoment		150
Translationsbeschleunigung		105
Translationsgruppe	D 3.1	37
transponierter Tensor		27
Transportgleichung		114, 119
Tribologie		257
typische Faser		51

U

überall		118
Uhr	D 9.2	95
Undehnbarkeit		253
uniformer Raum	D 16.2	229
Uniformität	D 16.2	228
unimodular		21
unimodulare Gruppe		21

V

Varignons Momentenprinzip	S 11.8	145
Vektorbündel		51
Vektorfeld		52, 61
Vektorraum		15

Verfestigung		198
Verformungen, kleine		87
verlorene Kraft	D 11.7	144
verlorenes Moment	D 11.7	144
Verrückung		77
virtuelle		141
Verschiebungsgradient		79
Verschiebungsvektor		78
Verzerrungsgeschwindigkeitstensor		113
intrinsischer		116
Viskoelastizität		246
Viskoplastizität		246
Viskositätskonstante		227
vollständig	D 16.6	229

W

Wechsel der Bezugsplazierung		84
Winkelbeschleunigung		105
Wirbeltensor		113
Wirbelvektor		113

Z

z-Äquivalenz	D 13.1	194
Zeit	D 9.1	95
Zeitdifferenz		97
Zentripetalbeschleunigung		105
Zustand	D 13.1	194
Anfangs-	D 13.1	194
Zustandsraum	D 13.1	194
Zustandsübergangsfunktion	D 16.8	230
Zwangsbedingung	D 18.1	248, 250

Zum Thema Ingenieurwissenschaften im B. I.-Wissenschaftsverlag

Eschenauer, H./W. Schnell
Elastizitätstheorie I
Grundlagen, Scheiben und Platten
Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie, Lösungsmethoden für Scheibe und Platte.
277 Seiten. 2., überarbeitete Auflage 1986. Kartoniert.

Schnell, W./H. Eschenauer
Elastizitätstheorie II
Grundgleichungen der linearen Schalentheorie, verschiedene Näherungstheorien, Membrantheorie, Biegetheorie der Kreiszylinderschale und Theorie der flachen Schalen.
269 Seiten. 1984. Kartoniert.

Klefenz, G.
Die Regelung von Dampfkraftwerken
Überblick über den derzeitigen Stand der Kraftwerksregelung an Hand von Regel- und Signalflußplänen
240 Seiten. 3., überarbeitete Auflage. 1983.

Pestel, E.
Technische Mechanik
Band 1: Statik
Eine anschauliche Darstellung der Statik mit zahlreichen durchgerechneten Beispielen sowie Übungsaufgaben mit Lösungen.
234 Seiten. 3., von Dr.-Ing. B. Dirr überarbeitete Auflage 1988.
Band 3: Kinematik und Kinetik
Mathematisch transparente Darstellung der Bewegungen von Körpern in der Ebene und im Raum.
411 Seiten. 2., völlig neu bearbeitete Auflage 1988 (überarbeitet von Dr.-Ing. B. Dirr).

Pestel, E./J. Wittenburg
Technische Mechanik
Band 2: Festigkeitslehre
Anschauliche und mathematisch einfache Darstellung mit zahlreichen ausführlichen Rechenbeispielen und Aufgaben mit Lösungen.
441 Seiten mit über 350 Abbildungen. 1981.

B·I·
Wissenschaftsverlag
Mannheim/Wien/Zürich

-10 20 5
36,-

Nach einer Auflistung der benötigten mathematischen Begriffe werden auf axiomatische Weise die Grundlagen der Kontinuumsmechanik (Deformationsgeometrie, Kinematik, Dynamik, Spannungsanalyse) dargestellt.
Nach den universellen Aussagen wird eine allgemeine Materialtheorie entwickelt, die den Zugang zu einem wichtigen und modernen Forschungsgebiet bereiten soll. Für Leser mit mathematischen Vorkenntnissen in Linearer Algebra, Analysis und Differentialgeometrie.

ISBN 3-411-14031-3