

Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich

Jörg Raisch
Technische Universität Berlin
Fak.IV - Elektrotechnik und Informatik
Fachgebiet Regelungssysteme
Sekretariat EN11
Einsteinufer 17,
D-10587 Berlin, Germany
Tel.: +49-30-314-22945, Fax.: +49-30-314-21137
email: raisch@control.tu-berlin.de
web: <http://www.control.tu-berlin.de>

Dieser Text ist eine nahezu unveränderte Reproduktion eines 1994 im Oldenbourg Verlag erschienenen Lehrbuchs. Lediglich einige kleinere (Rechtschreib-) Fehler wurden korrigiert. Zweifellos verbleiben noch viele weitere. Falls dem Leser/ der Leserin solche Fehler auffallen, würde ich mich über eine kurze Rückmeldung freuen.

Jörg Raisch
Berlin, April 2010

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	15
Symbolverzeichnis	19
I Einleitung und Systembeschreibung	24
1 Einleitung	27
1.1 Warum Regelung?	27
1.2 Regelung und Modellkomplexität – oder: Warum lineare zeit- invariante Mehrgrößenregelung?	29
1.3 Warum Reglerentwurf im Frequenzbereich?	33
1.4 Zusammenfassung	35
1.5 Literaturhinweise	35
2 Modelle für lineare zeitinvariante Mehrgrößensysteme	37
2.1 Übertragungs- und Frequenzgangmatrizen	37
2.2 Polynomiale Modelle	41
2.2.1 Eigenschaften von Polynommatrizen	41
2.2.1.1 Bestimmung eines ggRt	47
2.2.2 Polynom-Matrizenbruchdarstellungen	56
2.2.3 Zustandsmodelle und Minimalrealisierungen	62
2.2.3.1 Berechnung einer Minimalrealisierung	69

2.2.3.2	Rechenregeln für Zustandsdarstellungen	72
2.2.4	System-Matrix und Rosenbrock-System-Matrix	73
2.3	Verallgemeinerte Polynome – Faktorisierung in \mathcal{RH}_∞	80
2.3.1	Normalisierte koprime Faktorisierungen	87
2.4	Zusammenfassung	88
2.5	Literaturhinweise	89
3	Pole und Nullstellen	91
3.1	Pole und Nullstellen einer Übertragungsmatrix	91
3.1.1	Skalare Systeme	91
3.1.2	Mehrgrößensysteme	94
3.2	Pole und Nullstellen interner Modelle	99
3.2.1	System-Pole	99
3.2.2	Eingangs-Entkopplungsnullstellen	102
3.2.3	Ausgangs-Entkopplungsnullstellen	104
3.2.4	Ein/Ausgangs-Entkopplungsnullstellen	107
3.2.5	System-Nullstellen	108
3.2.6	Invariante Nullstellen	110
3.3	Allpässe und minimalphasige Systeme	112
3.4	Zusammenfassung	120
3.5	Literaturhinweise	121
II	Regelungstechnische Ziele	122
4	Vorbemerkungen	125

5	Nominelle Ziele	131
5.1	Stabilität im nominellen Fall	131
5.1.1	Pole des geschlossenen Regelkreises	133
5.1.2	Zusammenhang zwischen charakteristischem Polynom des offenen und des geschlossenen Kreises	134
5.1.3	Graphische Stabilitätskriterien	136
5.1.3.1	Nyquist-Kriterium für Mehrgrößensysteme	136
5.1.4	Satz der kleinen Verstärkungen	140
5.1.5	Wurzelortskurven	141
5.1.5.1	Wurzelortskurven für Eingrößensysteme	142
5.1.5.2	Wurzelortskurven für Mehrgrößensysteme	145
5.1.6	Youla-Parametrierung	151
5.1.7	Stabilisierbarkeit und Stabilität verallgemeinerter Re- gelkreise	157
5.2	Quantitative Eigenschaften im nominellen Fall	162
5.2.1	Eingrößensysteme	163
5.2.2	Mehrgrößensysteme	165
5.2.2.1	Singulärwerte	165
5.2.2.2	Formulierung unstrukturierter Anforderungen mit Hilfe von Singulärwerten	169
5.2.2.3	Strukturierte Anforderungen	174
5.3	Zusammenfassung	175
5.4	Literaturhinweise	176
6	Robustheit	177
6.1	Modellfehler	177
6.1.1	Unstrukturierte Modellfehler	178
6.1.1.1	Additive Fehler	178
6.1.1.2	Multiplikative Fehler:	180

6.1.1.3	Faktorierte Modellfehler	181
6.1.1.4	Verallgemeinerte unstrukturierte Modellfehler	183
6.1.2	Strukturierte Modellfehler	185
6.1.2.1	Parameterfehler	185
6.1.2.2	Additive Fehler in den Elementen der Übertragungs- matrix	186
6.1.2.3	Verallgemeinerte strukturierte Modellfehler .	187
6.2	Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“	192
6.2.1	Unstrukturierte Modellfehler	192
6.2.2	Strukturierte Modellfehler	195
6.2.2.1	Nichtnegative Matrizen und Perron-Frobenius- Eigenwert	196
6.2.2.2	Stabilität bei additivem Fehler in den Elementen der Strecken-Übertragungsmatrix	197
6.2.2.3	Strukturierte Singulärwerte	198
6.2.2.4	Stabilität bei verallgemeinertem strukturier- tem Modellfehler	202
6.3	Robustheit quantitativer Eigenschaften	204
6.3.1	Robustheit quantitativer Eigenschaften – Fall 1	204
6.3.2	Robustheit quantitativer Eigenschaften – Fall 2	209
6.3.3	Robustheit quantitativer Eigenschaften – Fall 3	213
6.4	Zusammenfassung	215
6.5	Literaturhinweise	215
7	Grenzen quantitativer Regelkreiseigenschaften	217
7.1	Algebraische Einschränkungen	217
7.2	Analytische Einschränkungen	218
7.2.1	Bodesche Amplituden-Phasen-Beziehung	218
7.2.1.1	Der Eingrößenfall	218

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	11
7.2.1.2 Der Mehrgrößenfall	220
7.2.2 Wasserbett-Effekt	222
7.2.3 Sensitivitätsintegral	223
7.3 Zusammenfassung	226
7.4 Literaturhinweise	226
III Entwurfsverfahren	229
8 Einordnung von Entwurfsverfahren	231
9 Quasi-Klassische Verfahren	233
9.1 Das Direct Nyquist Array (DNA) Verfahren	233
9.1.1 Diagonaldominanz und verallgemeinerte Diagonaldomi- nanz	233
9.1.2 Entwurfsprinzip	237
9.1.3 Robuste Stabilität mit dem DNA-Verfahren	242
9.1.4 Quantitative Regelkreiseigenschaften	245
9.1.5 Entwurf von Kompensationsmatrizen	247
9.1.5.1 Umordnung von Stell- und Regelgrößen	247
9.1.5.2 Konstante Kompensation	248
9.1.5.3 Dynamische Kompensationsmatrix	251
9.1.6 Integrität	252
9.1.7 Die inverse Variante: Das INA-Verfahren	253
9.1.8 Beispiel: Entwurf eines Mehrgrößenreglers für eine Zwei- stoffdestillationskolonne	255
9.1.8.1 Die Regelstrecke	255
9.1.8.2 Wahl von Stell- und Regelgrößen	256
9.1.8.3 Lineares Modell	258
9.1.8.4 Fehlermodelle	259

9.1.8.5	Gewünschte Regelkreiseigenschaften	260
9.1.8.6	Der Entwurfsvorgang	267
9.1.9	Wertung	271
9.2	Das Verfahren der charakteristischen Ortskurven	273
9.2.1	Eigenwerte und Eigenvektoren von Übertragungsmat- zen	273
9.2.2	Charakteristische Ortskurven und der geschlossene Re- gelkreis	275
9.2.3	Manipulation charakteristischer Ortskurven	278
9.2.4	Der Entwurfsvorgang	279
9.2.4.1	Kompensation im Bereich „hoher“ Frequenzen	279
9.2.4.2	Kompensation im Bereich mittlerer Frequenzen	280
9.2.4.3	Kompensation im Bereich niedriger Frequenzen	281
9.2.5	Beispiel: Zweistoffdestillation	282
9.2.6	Wertung	285
9.3	Das Reversed Frame Normalizing (RFN) Verfahren	287
9.3.1	Approximation bei vorgegebener Nennermatrix	289
9.3.2	Anpassung von Zähler- und Nennermatrix	291
9.3.3	Beispiel: Zweistoffdestillation	292
9.3.4	Wertung	295
9.4	Zusammenfassung	295
9.5	Literaturhinweise	296
10	H_∞-Verfahren	299
10.1	Die H_∞ -Norm	299
10.2	Spezielle H_∞ -Kriterien und das H_∞ -Standard-Problem	301
10.2.1	Das gemischte Sensitivitäts- ($S/KS/T$ -) Problem	302
10.2.2	Der NLKF-Entwurf	305
10.2.3	Das H_∞ -Standard-Problem	308

10.3	Lösung des H_∞ -Standard-Problems	310
10.3.1	Stabilisierbarkeit	310
10.3.2	Minimierungsstrategie	310
10.3.3	Suboptimales Problem	311
10.3.3.1	„Einfache“ suboptimale H_∞ -Probleme	311
10.3.3.2	„Schwierige“ suboptimale H_∞ -Probleme	315
10.4	Lösung des $S/KS/T$ -Problems	317
10.4.1	Stabilisierbarkeit	317
10.4.2	Minimierungsstrategie	317
10.4.3	Suboptimales $S/KS/T$ -Problem	317
10.4.3.1	„Einfaches“ suboptimales Problem	317
10.4.3.2	„Schwieriges“ suboptimales Problem	318
10.4.4	Beispiel: $S/KS/T$ -Entwurf für ein Zweistoffdestillationsproblem	319
10.5	Lösung des NLKF-Problems	322
10.5.1	Stabilisierbarkeit	322
10.5.2	Minimierungsstrategie	323
10.5.3	Beispiel: NLKF-Entwurf für ein Zweistoffdestillationsproblem	324
10.6	Wertung und Zusammenfassung	326
10.7	Literaturhinweise	328
11	Sonstige Verfahren	331
11.1	μ -Synthese	331
11.1.1	$D - K$ -Iteration	333
11.1.2	Beispiel: Zweistoffdestillationsproblem	334
11.1.3	Wertung	340
11.2	H_2 -Minimierung	341
11.2.1	Die H_2 -Norm	341

11.2.2	H_2 -Norm und regelungstechnische Ziele	342
11.2.3	Lösung des H_2 -Minimierungsproblems	344
11.2.4	Ein Spezialfall: LQG-Regelung	349
11.2.5	Wertung	352
11.3	Zusammenfassung	352
11.4	Literaturhinweise	352
A	Matrizen und Determinanten	355
A.1	Rang einer Matrix	355
A.2	Formeln für Determinanten	355
A.3	Formeln für Inverse	356
A.4	Spur	357
B	Rechenregeln für Systeme in Zustandsdarstellung	359
B.1	Grundoperationen	359
B.2	Koprime Faktorisierungen	360
B.3	Normalisierte linkskoprime Faktorisierung einer Übertragungsmatrix	361
B.4	Unitäre, verlustfreie und J_γ -verlustfreie Übertragungsmatrizen	362
B.5	Verlustfreie und J_γ -verlustfreie Zerlegung	362
C	Algebraische Riccati-Gleichungen	365
C.1	Der Standard-Fall	365
C.1.1	Anwendungen	367
C.1.1.1	Normalisierte linkskoprime Faktorisierung	368
C.1.1.2	Spektralzerlegung	368
C.2	Der indefinite Fall	370
	Literaturverzeichnis	371
	Sachwortverzeichnis	380

Where to start is the problem, because nothing
begins when it begins and nothing's over when it's
over, and everything needs a preface.

– Margaret Atwood: *The Robber Bride*

Vorwort

Mit dem vorliegenden Buch wird der Versuch unternommen, die wichtigsten Frequenzbereichsmethoden zum Mehrgrößen-Reglerentwurf auf logisch kohärente Weise darzustellen.

Frequenzbereichsverfahren erlauben auf überaus anschauliche Weise, praxisrelevante Forderungen an den Regelkreis in Regelalgorithmen zu übersetzen. Dies erklärt die außerordentliche Popularität der klassischen, für den Entwurf von linearen zeitinvarianten Eingrößenreglern gedachten Frequenzbereichsmethoden. Der Einsatz solcher Frequenzbereichsverfahren erweist sich insbesondere dann als vorteilhaft, wenn das dem Reglerentwurf zugrundeliegende Modell der Regelstrecke experimentell – durch Auswertung von Strecken- Ein- und Ausgangssignalen – erstellt wurde. In solchen Fällen kommt modellinternen Variablen (wie Zustandsgrößen) keine eigene physikalische Bedeutung zu; regelungstechnische Ziele lassen sich daher sehr viel einfacher für die (physikalisch relevanten) Ein- und Ausgangssignale formulieren. Genau dies erfolgt beim Entwurf im Frequenzbereich. Weiterhin kann Robustheit (die Eigenschaft des Regelkreises, Modellfehler bis zu einem gewissen Maß zu tolerieren) bei Frequenzbereichsverfahren auf „natürliche Weise“ in den Entwurfsvorgang einbezogen werden.

An dieser Stelle sei betont, daß ein Verfahren in erster Linie dadurch charakterisiert wird, wie Zielvorstellungen in den Entwurf eingebracht werden. Die rechentechnische Umsetzung – die eigentliche Bestimmung des Regleralgorithmus – ist vom konzeptionellen Standpunkt aus zweitrangig: Sie braucht bei Frequenzbereichsverfahren *nicht* im Frequenzbereich zu erfolgen. In der Tat erweist es sich in den meisten Fällen als numerisch vorteilhaft, Berechnungen nicht mittels Übertragungsmatrizen, sondern anhand von punktweise abgespeicherten Frequenzgangmatrizen oder Zustandsdarstellungen durchzuführen.

Durch *Rosenbrock*, *MacFarlane* und ihre Mitarbeiter wurden in den 70er Jahren systematische Grundlagen für den Entwurf von Mehrgrößenreglern im Frequenzbereich geschaffen. Die von ihnen vorgeschlagenen Methoden führen das

Mehrgrößenproblem auf eine Reihe von Eingrößenproblemen zurück, die dann mit Hilfe der klassischen Verfahren angegangen werden können. Sie werden deshalb oft unter dem Oberbegriff „quasi-klassische Methoden“ zusammengefaßt. Während der letzten zehn Jahre hat sich ein weiterer Ansatz zum Entwurf von Mehrgrößen-Reglern herauskristallisiert: Regelungstechnische Ziele werden auf ein skalares, im Frequenzbereich formuliertes Kostenfunktional abgebildet, das über alle den Regelkreis stabilisierenden linearen zeitinvarianten Regler minimiert wird. Das wichtigste Beispiel für diesen Ansatz ist die viel diskutierte Familie der H_∞ -Verfahren, die auf Arbeiten von *Zames, Francis, Glover, Doyle, Kwakernaak* u.a. zurückgeht.

Das vorliegende Buch gliedert sich in drei Teile. In Teil I werden wir nach einer einführenden Schilderung der Grundkonzepte (Kapitel 1) verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung linearer (endlich-dimensionaler) zeitinvarianten Mehrgrößensysteme behandeln (Kapitel 2). Übertragungsmatrizen, Frequenzgangmatrizen, Zustandsdarstellungen, Polynom-Matrizenbruchdarstellungen, die (Rosenbrocksche) System-Matrix und kopprime Faktorisierungen in \mathcal{RH}_∞ kommen zur Sprache¹. Jede dieser Darstellungsmöglichkeiten wird sich im folgenden an der einen oder anderen Stelle als vorteilhaft erweisen. Pole und Nullstellen eines Mehrgrößensystems (Kapitel 3) lassen sich beispielsweise am leichtesten anhand von polynomialen Modellen (wie der Rosenbrockschen System-Matrix oder Polynom-Matrizenbruchdarstellungen) erklären. Im zweiten Teil des Buches werden wir in aller Ausführlichkeit die mathematische Formulierung regelungstechnischer Ziele besprechen (Kapitel 4 bis 6). Insbesondere Robustheitseigenschaften werden wir hohen Stellenwert beimessen. Dieser Themenkreis wird durch eine kurze Behandlung der Grenzen erreichbarer Regelkreiseigenschaften abgerundet (Kapitel 7). Teil II kann als gemeinsamer „Überbau“ für die im dritten Teil vorgestellten Verfahren zum Mehrgrößen-Reglerentwurf angesehen werden: Nach einer groben Einordnung der Verfahren (Kapitel 8) werden in Kapitel 9 quasi-klassische Methoden, in Kapitel 10 die Familie der H_∞ -Verfahren besprochen; auf μ - und H_2 -Entwurf wird am Schluß des Buches (Kapitel 11) eingegangen. Alle Konzepte werden anhand zahlreicher einfacher „akademischer“ Beispiele erläutert. Alle Entwurfsverfahren werden darüberhinaus auf dasselbe (reale) Beispiel, die Regelung einer Destillationskolonne, angewandt. Hierdurch wird eine vergleichende Einschätzung der Leistungsfähigkeit der verschiedenen Entwurfsansätze möglich. Im Anhang sind die einfachsten Formeln zur Manipulation von Matrizen und Determinanten, die wichtigsten „Rechenregeln“ für Zustandsdarstellungen linearer zeitinvarianter Übertragungssysteme, sowie einige Fakten über algebraische Riccati-Gleichungen zusammengefaßt.

Die Niederschrift dieses Buches begann ich während meiner Zeit als wissen-

¹Das in Abschnitt 2.3 eingeführte Symbol \mathcal{RH}_∞ steht für die Menge der realisierbaren asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen.

schaftlicher Mitarbeiter am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart. Der Großteil der Arbeit erfolgte während eines zweijährigen Aufenthalts am Department of Electrical and Computer Engineering der University of Toronto. Teile des vorliegenden Buches basieren auf einer an der Universität Stuttgart gehaltenen Vorlesung „Neue Methoden der Mehrgrößen-Regelung“ (zu der F. Allgöwer Zeitbereichsverfahren wie Polvorgabe und LQG-Entwurf beisteuerte) und einer zusammen mit Professor Francis an der University of Toronto gehaltenen Vorlesung „Linear Control Theory in the Frequency Domain“. Die Stuttgarter Vorlesung richtete sich an Studentinnen und Studenten der Technischen Kybernetik, der Verfahrenstechnik und des Maschinenbaus im 7. und 9. Semester; die Vorlesung in Toronto wurde von postgraduate students der Elektrotechnik, der Verfahrenstechnik und der Luft- und Raumfahrttechnik besucht.

Dieser Hintergrund definiert weitgehend die Ziele dieses Buches sowie die zur Lektüre notwendigen Vorkenntnisse: Es wird angestrebt, eine verständliche und einheitliche Darstellung der wichtigsten Frequenzbereichsverfahren zu geben. Dies soll durch die Betonung des allen Verfahren gemeinsamen ersten Schrittes, der mathematischen Formulierung regelungstechnischer Ziele, geschehen. Ein zweites Ziel besteht in der Vermittlung einiger systemtheoretischer Grundkonzepte, die für das eigenständige Studium der aktuellen Fachliteratur unerlässlich sind. Intention ist *nicht* in erster Linie mathematische Exaktheit. Die Strukturierung mit Hilfe von Definitionen, Sätzen und Beweisen soll kein hohes Abstraktionsniveau vortäuschen, sondern lediglich als Orientierungshilfe für den Leser bzw. die Leserin dienen: Kernpunkte sind in Form von Definitionen und Sätzen hervorgehoben; wer der Devise „too many proofs spoil the truth“ (P. Greenaway’s „The Baby of Mâcon“) huldigt, kann die (deutlich gekennzeichneten) Beweise bei der Lektüre übergehen, ohne deswegen im folgenden Verständnisprobleme befürchten zu müssen. Oft wird die Beweistechnik auch nur angedeutet bzw. der Beweis ganz weggelassen und auf die entsprechende Literaturstelle verwiesen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß dieses Buch keine bloße Sammlung von Rezepten darstellt – eine solche hätte sich (auf Kosten des Verständnisses) sicherlich sehr viel knapper fassen lassen. Genauso hätte man bei Beschränkung auf *ein* Entwurfsverfahren einen Teil des recht umfangreichen Überbaus „einsparen“ können. Dies aber wäre mit dem obengenannten Anspruch des Buches nicht zu vereinbaren gewesen.

Zur Lektüre notwendige Vorkenntnisse sind im wesentlichen die Inhalte eines Grundkurses der Regelungstechnik, der die klassischen Frequenzbereichsmethoden für Eingrößensysteme (Nyquist- und Frequenz-Kennlinien-Verfahren) behandelt. Ein gewisses Grundwissen über Zustandsraum-Konzepte ist hilfreich, aber nicht notwendig. Vorausgesetzt wird auch Vertrautheit mit den einfachsten Begriffen der Matrizenrechnung (Nichtsingula-

rität, Determinante, Rang, Eigenwerte einer Matrix). Die in Anhang A zusammengefaßten einfachen Regeln zur Manipulation von Matrizen und Determinanten sind lediglich als Gedächtnisstütze gedacht.

Schließlich noch eine Anmerkung zu der auf den folgenden Seiten aufgeführten Notation: Unterscheiden sich im angelsächsischen und im deutschen Schrifttum gebräuchliche Symbole, so wird immer erstere Version gewählt. Dies soll das „Umsteigen“ auf die – bis auf wenige Ausnahmen in englisch abgefaßte – aktuelle Fachliteratur erleichtern.

Die Anregung zur Niederschrift dieses Buches ging von Herrn Prof. Föllinger aus. Ihm und dem Oldenbourg-Verlag möchte ich für ihre Kooperation und ihre Nachsicht bei wiederholten Terminüberschreitungen danken. Mein Dank gilt weiterhin Herrn Prof. Gilles, der mich zu diesem Vorhaben ermutigte und immer unterstützte, sowie Herrn Prof. Francis, der sich als perfekter Gastgeber erwies und mir die Möglichkeit verschaffte, eine vorläufige Version in Vorlesungsform zu testen. Ihm und Herrn Dr. Maciejowski bin ich auch für ihre Bereitschaft zu inhaltlichen Diskussionen zu Dank verpflichtet. Weiterhin danke ich dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für die finanzielle Förderung, den Studentinnen und Studenten der Vorlesungen in Stuttgart und Toronto für ihr Interesse und ihre Mitarbeit, den Kolleginnen und Kollegen der Systems Control Group in Toronto für das anregende und produktive Arbeitsklima und der Belegschaft von The Butler's Pantry Cafe für Tee und „Schreibtisch“.

Jörg Raisch
Toronto, Dezember 1993

Symbolverzeichnis

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{R}^{p \times q}$	Menge der reellwertigen $p \times q$ -Matrizen	
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen (die komplexe Zahlenebene)	
$\mathbb{C}^{p \times q}$	Menge der komplexwertigen $p \times q$ -Matrizen	
\mathbb{C}^+	die offene rechte Halbebene: $\{c \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(c) > 0\}$	
$\overline{\mathbb{C}}^+$	die abgeschlossene rechte Halb- ebene: $\{c \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(c) \geq 0\}$	81
s	Laplace-Variable	37
ω	Frequenz	38
dB	Dezibel ($20 \lg \dots$)	39
\mathcal{N}	Nyquist-Kontur	136
\mathcal{N}_1	Teil der Nyquist-Kontur (Pos. imaginäre Achse mit eventuellen „Ausbuchtungen“)	136
Γ	Nyquist-Ortskurve	136
Γ_1	Teil der Nyquist-Ortskurve (für $s \in \mathcal{N}_1$)	136
\mathcal{RP}	Menge der Polynome in s mit reellen Koeffizienten	41
$\mathcal{RP}^{p \times q}$	Menge der $p \times q$ -Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RP}	41

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
\mathcal{RH}_∞	Menge der asymptotisch stabilen realisierbaren Übertragungsfunktionen	81
$\mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$	Menge der $p \times q$ -Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RH}_∞	81
$\mathcal{UH}_\infty^{p \times p}$	Menge der unimodularen Matrizen in $\mathcal{RH}_\infty^{p \times p}$	82
\mathcal{RL}_∞	Menge der realisierbaren Übertragungsfunktionen ohne Pole auf der imaginären Achse	299
$\mathcal{RL}_\infty^{p \times q}$	Menge der $p \times q$ -Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RL}_∞	299
\mathcal{RH}_2	Menge der asymptotisch stabilen Übertragungsfunktionen mit der Eigenschaft „streng proper“	341
$\mathcal{RH}_2^{p \times q}$	Menge der $p \times q$ -Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RH}_2	341
\mathcal{RL}_2	Menge der Übertragungsfunktionen ohne Pole auf der imaginären Achse und mit der Eigenschaft „streng proper“	341
$\mathcal{RL}_2^{p \times q}$	Menge der $p \times q$ -Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RL}_2	341
$S_P(s)$	Smith-Form einer Polynommatrix	53
$N_P(s)M_P^{-1}(s)$	Rechte Polynom- Matrizenbruchdarstellung	56
$\tilde{M}_P^{-1}(s)\tilde{N}_P(s)$	Linke Polynom- Matrizenbruchdarstellung	57
$G \cong \left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$	68
$\mathcal{C}(A, B)$	Steuerbarkeitsmatrix	64
$\mathcal{O}(C, A)$	Beobachtbarkeitsmatrix	66
P_C	Steuerbarkeits-Gramsche	116
P_O	Beobachtbarkeits-Gramsche	116
$P_P(s)$	System-Matrix	74
$P_{PR}(s)$	Rosenbrock-System-Matrix	75
$N(s)M^{-1}(s)$	Rechte Faktorisierung	84
$\tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$	Linke Faktorisierung	84

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
$S_M(s)$	Smith-McMillan-Form einer Übertragungsmatrix	94
$z_P(s)$	Nullstellen-Polynom einer Übertragungsmatrix	96
$p_P(s)$	Pol-Polynom einer Übertragungsmatrix	97
y	Meß- bzw. Regelgröße	37
u	Stellgröße	37
u'	Regler-Ausgangsgröße	126
x	Zustandsgröße	62
ξ	Innere Variable	61
η	Meßrauschen	126
d, d'	Störgrößen	126
r	Führungsgröße	126
e	Regeldifferenz	126
e'	Regler-Eingangsgröße	126
z	Externe Ausgangsgröße	127
w	Externe Eingangsgröße	127
$ \dots $	Betrag	39
\angle	Phase	39
λ_i	i-ter Eigenwert	139
ρ	Spektralradius	141
λ_{PF}	Perron-Frobenius-Eigenwert	196
σ_i	i-ter Singulärwert	168
$\bar{\sigma}$	größter Singulärwert	166
$\underline{\sigma}$	kleinster Singulärwert	168
κ	Konditionszahl	220
$\ \dots\ _\infty$	L_∞ - bzw. H_∞ -Norm	299
$\ \dots\ _2$	L_2 - bzw. H_2 -Norm	341
$\ \dots\ _H$	Hankel-Norm	305
$\ \dots\ _F$	Frobenius-Norm	249
$ \dots _e$	Aus den Beträgen der Einzelele- mente bestehende Matrix	175
C_V	Vergleichsmatrix	236
I_q	$q \times q$ -Einheitsmatrix	52
$J_{\gamma lp}$	$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix}$	118
$A \leq_e B$	$a_{ij} \leq b_{ij}$	175

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
$G(s)$	Modell der Regelstrecke	37
$K(s)$	Übertragungsmatrix des Reglers	126
$P(s)$	Verallgemeinerte Regelstrecke	127
(G, K)	Nomineller Standard-Regelkreis	131
$\mathcal{F}_L(P, K)$	„Lower linear fractional transformation“	128
$\mathcal{F}_U(\Theta, \Delta)$	„Upper linear fractional transformation“	183
$Q(j\omega)$	Frequenzgangmatrix des offenen Kreises	139
$S(j\omega)$	Sensitivitätsmatrix	163
$T(j\omega)$	Komplementäre Sensitivitäts- matrix	163
$\hat{Q}(s)$	Youla-Parameter	151
\mathcal{D}_A	Klasse additiver Fehler	178
\mathcal{D}_M	Klasse multiplikativer Fehler	180
\mathcal{D}_{MN}	Klasse faktorisierter Fehler	182
\mathcal{D}	Klasse verallgemeinerter unstrukturierter Fehler	184
\mathcal{D}_{Ae}	Klasse strukturierter additiver Fehler	187
\mathcal{D}_s	Klasse verallgemeinerter strukturierter Fehler	190
C^*	Konjugiert Transponierte der Matrix C	
C^T	Transponierte der Matrix C	
inf	Infimum (größte untere Schranke)	302
sup	Supremum (kleinste obere Schranke)	299
ggT	größter gemeinsamer Teiler	44
ggRt	größter gemeinsamer Rechtsteiler	44
ggLt	größter gemeinsamer Linksteiler	44
Mbd	Matrizenbruchdarstellung	56
PMbd	Polynom-Matrizenbruchdarstellung	56
EE-Nullstelle	Eingangs-Entkopplungsnullstelle	102
AE-Nullstelle	Ausgangs-Entkopplungsnullstelle	104
EAE-Nullstelle	Ein/Ausgangs-Entkopplungs- nullstelle	107

Symbol bzw. Abkürzung	Bedeutung	Erstes Auf- treten auf Seite
p_{PgK}	Charakteristisches (oder Pol-) Polynom des geschlossenen Kreises	135
p_{PoK}	Charakteristisches (oder Pol-) Polynom des offenen Kreises	135
DNA	Direct Nyquist Array	231
INA	Inverse Nyquist Array	231
CL	Characteristic Locus	231
RFN	Reversed Frame Normalizing	231
LQG	Linear Quadratisch Gaußsch	349

Polynome und Polynommatrizen werden mit dem Index „ P “ gekennzeichnet.

„Listen, just get through the seminar, and
we can go to the cinema“
– Johnny in D. Jarman's „Wittgenstein“

I Einleitung und Systembeschreibung

Kapitel 1

Einleitung

Vordringliches Anliegen einer jeden Einleitung ist, die Leserinnen und Leser davon abzuhalten, das ihnen vorliegende Buch sofort wieder aus der Hand zu legen – sie also von der Relevanz der in den folgenden Kapiteln behandelten Thematik zu überzeugen. Lautet der Buchtitel „Lohnsteuer '93“ oder „Straffrei Schwarzbrennen“, so läßt sich dies leicht erreichen. Im Zusammenhang mit „Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich“ ist die Frage nach dem Warum dagegen weniger leicht zu beantworten. Sie besteht – wenn wir sie genauer betrachten – aus einer ganzen Reihe von Fragen:

- Warum Regelung? Welche Vorteile besitzt eine Regelungsstruktur gegenüber einer Steuerungsstruktur?
- Welche Rolle spielt die Komplexität des Streckenmodells? Stellen endlich-dimensionale lineare zeitinvariante Modelle – wie wir sie für den Reglerentwurf im Frequenzbereich benötigen – nicht eine unzulässige Vereinfachung der Realität dar?
- Warum Frequenzbereichsverfahren ?

Wir wenden uns zunächst der einfachsten, fast schon rhetorisch zu nennenden, dieser Fragestellungen zu:

1.1 Warum Regelung?

Nehmen wir an, wir wollen über die Stellgrößen derart in einen technischen Prozeß¹ (Bild 1.1) eingreifen, daß die Ausgangsvariablen des Prozesses sich in

¹Die Begriffe „Prozeß“ und „Regelstrecke“ werden synonym gebraucht. Dasselbe gilt für die Begriffe „Prozeßmodell“ und „Streckenmodell“.

einer – noch zu definierenden – „gewünschten“ Weise verhalten.

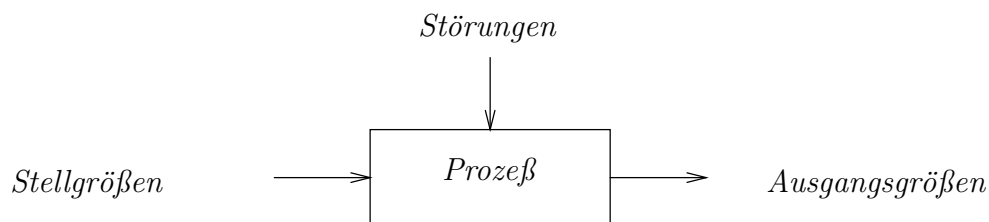


Bild 1.1: Schematische Darstellung eines (technischen) Prozesses.

Wäre keinerlei Prozeßunsicherheit vorhanden, würden wir also den funktionalen Zusammenhang zwischen Stell- und Störgrößen einerseits und Ausgangsvariablen andererseits genau kennen, und könnten wir weiterhin die Störgrößen exakt messen, so bestünde keinerlei Notwendigkeit für eine Regelung. Wir könnten unser Ziel durch eine offene Wirkungskette – eine Steuerung – erreichen (Bild 1.2). Messen und Überprüfen der Ausgangsgrößen wäre müßig, da

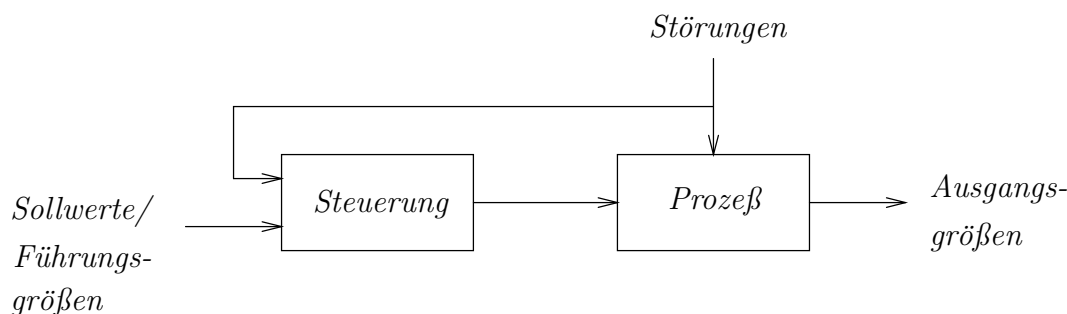


Bild 1.2: Steuerung.

die Auswirkung der Störungen und der von uns getätigten Stelleingriffe auf die Ausgangsgrößen *genau* bekannt wäre.

Derartige Voraussetzungen liegen in der Realität so gut wie nie vor: Nicht alle auftretenden Störungen sind meßbar (schon gar nicht exakt), unser Wissen über den Prozeß – das mathematische Prozeßmodell – gibt die Wirklichkeit nur vereinfacht und fehlerhaft wieder. Wir können demzufolge nicht genau vorhersagen, wie die Prozeß-Ausgangsgrößen auf Stelleingriffe reagieren. Es liegt deshalb nahe, diese Reaktion ständig durch Messungen zu überprüfen und die Meßinformation gegebenenfalls zu einer Korrektur der Stellgrößen zu verwenden: Die in Bild 1.3 dargestellte einfache Rückführungs- (oder Rückkopplungs- bzw. Regelungs-) Struktur stellt offenbar ein „natürliches“ Instrument zur Behandlung von Unsicherheit dar. Sie ermöglicht eine gewisse „Unempfindlich-

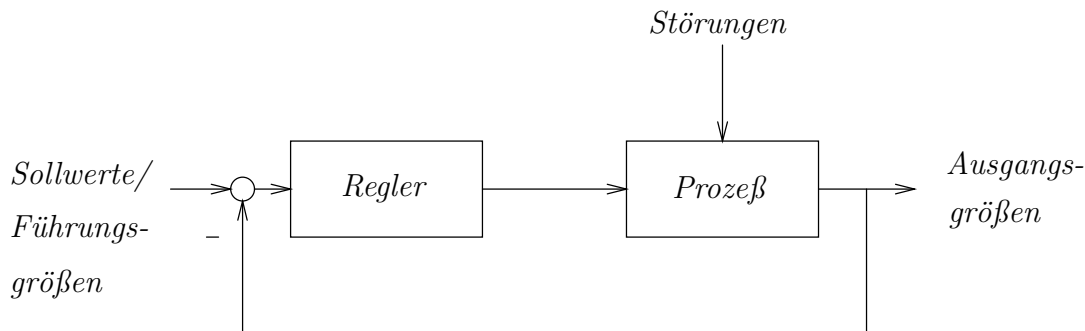


Bild 1.3: Einfache Regelungsstruktur.

keit“ bezüglich Modellfehlern und nicht meßbarer Störungen. Man sollte sich allerdings stets vor Augen halten, daß eine Rückkopplungsstruktur eine solche Unempfindlichkeit keinesfalls *garantiert*. Sie stellt eine *notwendige*, nicht aber *hinreichende* Bedingung dar. Wir werden uns in späteren Kapiteln ausführlich damit beschäftigen, wie ein Regler ausgelegt werden muß, damit er diese in der Praxis eminent wichtige Eigenschaft aufweist.

1.2 Regelung und Modellkomplexität – oder: Warum lineare zeitinvariante Mehrgrößenregelung?

Wir haben soeben festgestellt, daß sich mit Hilfe des Rückkopplungsprinzips eine gewisse Unempfindlichkeit bezüglich Modellfehlern erreichen läßt. Natürlich gilt auch die umgekehrte Argumentation: Für die Auslegung eines Reglers – einer geschlossenen Wirkungskette also – genügt i.a. ein sehr viel einfacheres (und damit ungenaueres) Prozeßmodell als in Anwendungsfällen, die auf einer offenen Wirkungskette basieren, wie z.B. Steuerung, Simulation oder Fehlererkennung.

Für die Verwendung eines *möglichst einfachen* Modells sprechen mehrere Gründe:

- Je einfacher ein Modell, desto geringer wird i.a. der zu seiner Erstellung notwendige Aufwand sein. Oft kann man gar auf eine theoretische, auf physikalischen Bilanzgleichungen beruhende Modellbildung völlig verzichten und sich auf die experimentelle Bestimmung (Identifikation) von Modellparametern beschränken.

- Bei Verwendung einfacher Modelle nimmt der Vorgang des Reglerentwurfs vergleichsweise wenig Zeit in Anspruch. Man vergleiche den Entwurf eines Reglers für ein einfaches Verzögerungsglied und für ein aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen bestehendes Modell.
- Bei Verwendung einfacher Modelle weist das Resultat des Entwurfsvorgangs – der eigentliche Regler – i.a. eine einfache Struktur und geringe Komplexität auf. Solche Regler lassen sich leicht implementieren; man kann ohne Schwierigkeiten nachvollziehen, wie sie in den Prozeß eingreifen; ihre Parameter lassen sich bei Bedarf im geschlossenen Kreis sinnvoll nachstellen („on-line tuning“). Dieser Eigenschaft wird in vielen Anwendungsbereichen große Bedeutung zugemessen.

Wie einfach können wir nun das dem Reglerentwurf zugrundeliegende Modell wählen? Dies hängt sicherlich von der Komplexität des Prozesses und den Anforderungen ab, die wir an den Regelkreis stellen. Der Einfluß beider Punkte auf die notwendige Mindestgenauigkeit des Modells läßt sich allerdings oft nur schwer abschätzen. In solchen Fällen stellt die Ermittlung eines geeigneten Modells einen meist sehr zeitaufwendigen iterativen Vorgang dar: Festlegung eines Modells und darauf basierender Reglerentwurf können dann selbst als Teil einer rückgekoppelten Vorgehensweise interpretiert werden (Bild 1.4). In dieser Sichtweise stellt die Modellkomplexität keine von außen vorgegebene feste „Größe“, sondern einen zusätzlichen „Entwurfsfreiheitsgrad“ dar [81].

Die eigentliche Modellbildung ist nicht Gegenstand dieses Buches. Trotzdem soll in aller Kürze angesprochen werden, welche möglichen Ausprägungen der Freiheitsgrad „Modellkomplexität“ für eine allgemeine Mehrgrößen-Regelstrecke annehmen kann. Die betrachtete Strecke besitze q Stellgrößen $u_k(t)$; $k = 1, \dots, q$, und $p \leq q$ zu regelnde Ausgangsgrößen $y_i(t)$; $i = 1, \dots, p$ (Bild 1.5). Eine Stellgröße wird i.a. nicht nur eine, sondern mehrere oder gar alle Ausgangsvariable beeinflussen. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von *streckeninternen Kopplungen*. In der „klassischen Regelungstechnik“ werden diese Kopplungen meist vernachlässigt²: Man wählt p Stellgrößen, ordnet jeder auf eineindeutige Weise ein y_j zu³ und beschreibt den Mehrgrößen-Prozeß durch p *Eingrößen-* oder *SISO* (*single-input single-output*)-Modelle. Die „klassische Regelungstechnik“ setzt weiterhin voraus, daß diese SISO-Modelle durch gewöhnliche lineare und zeitinvariante Differentialgleichungen beschrieben werden. Der im Rahmen dieser restriktiven Modellannahmen notwendige Genauigkeitsgrad hängt stark vom eingesetzten Regler-Entwurfverfahren ab: Für experimentelle Methoden wie die Ziegler-Nichols’schen Einstellregeln genügt als Modellinformation oft schon das Vorzeichen der stationären

²Eine Ausnahme stellen einige frühe Entkopplungskonzepte dar. Siehe z.B. [6] und [76].

³Eine weithin verbreitete Methode zur Zuordnung von Stell- und Regelgrößen ist das *Relative Gain Array (RGA)* [8].

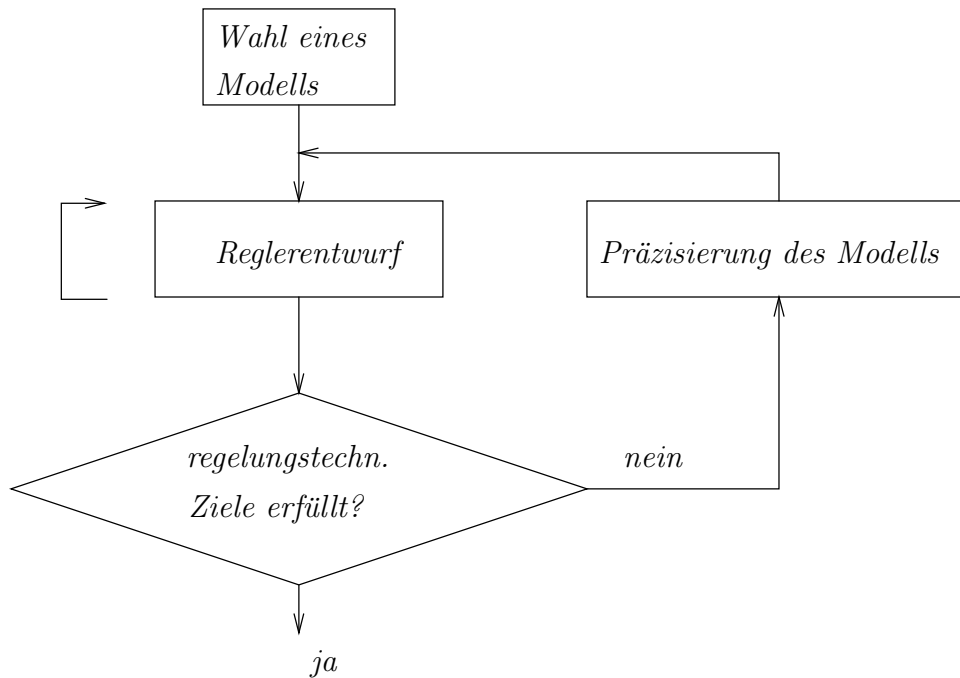


Bild 1.4: Wechselwirkung zwischen Modellbestimmung und Reglerentwurf.

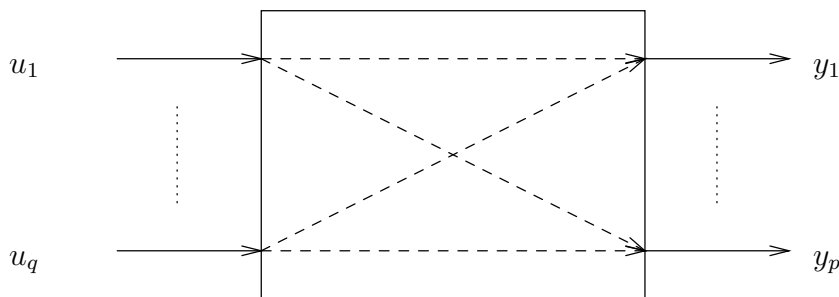


Bild 1.5: Mehrgrößen-Regelstrecke.

Verstärkung. Andere „klassische“ Vorgehensweisen – wie Wurzelortskurven- oder Frequenzkennlinienverfahren – setzen detailliertere, dynamische Modelle voraus.

Unter den vier Modellannahmen der „klassischen Regelungstechnik“ (SISO, gewöhnliche Differentialgleichungen, Linearität, Zeitinvarianz) erweist sich meist diejenige am realitätsfernsten, die eine Beschreibung des Prozesses durch mehrere unabhängige Eingrößenmodelle vorsieht. Ein solches Ignorieren der Kopplungen zwischen verschiedenen Stell- und Regelgrößen kann dazu führen, daß trotz hohem Einsatz von Stellenergie die gesteckten regelungstechnischen

Ziele nicht erreicht werden. In der Praxis spricht man oft von einem „Gegen-einanderarbeiten“ von Eingrößenreglern. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, kann die Vernachlässigung von Kopplungselementen sogar zur Instabilität des Gesamt-Regelkreises führen.

Beispiel: Wir betrachten das in Bild 1.6 gezeigte System mit jeweils zwei Stell- und Regelgrößen. Wir vernachlässigen diejenigen

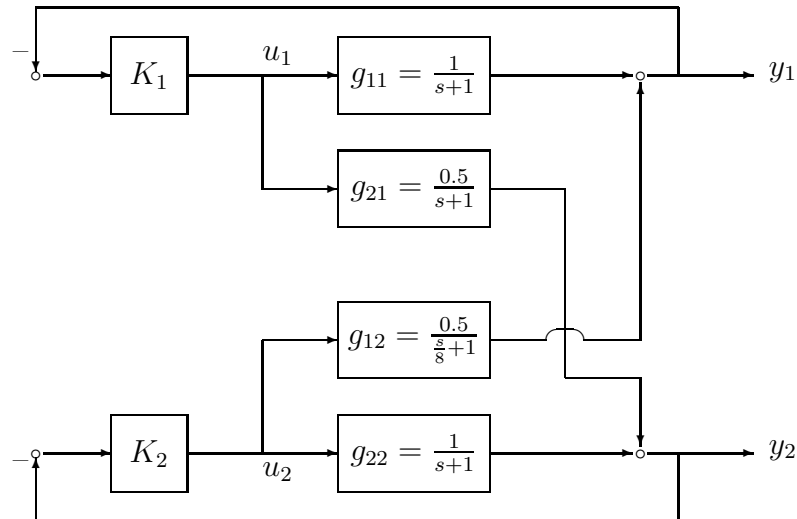


Bild 1.6: Beispiel für die Wichtigkeit der Berücksichtigung von streckeninternen Kopplungen.

Signalpfade mit den geringsten stationären Verstärkungsfaktoren (0.5); setzen also $g_{21}(s) = g_{12}(s) = 0$. In den beiden resultierenden (fiktiven) Einzelregelkreisen verwenden wir konstante Rückführungen $K_1 = 20$ und $K_2 = 20$. Jeder der beiden Kreise ist – für sich betrachtet — stabil. Wenden wir uns allerdings dem über $g_{21}(s)$ und $g_{12}(s)$ gekoppelten Gesamt-Regelkreis zu, so stellen wir Instabilität fest.

Anmerkung: Zum jetzigen Zeitpunkt soll obiges Beispiel lediglich als Motivation dienen. Wenn wir in Kapitel 3 *Übertragungs-Nullstellen* und *-Pole von Mehrgrößen-Systemen* einführen und in Abschnitt 5.1.5 Wurzelortskurven berechnen, werden wir in der Lage sein, dieses Ergebnis anschaulich zu deuten.

Selbst wenn wir in einem konkreten Anwendungsfall von der SISO-Modellannahme abgehen, also systeminterne Kopplungen berücksichtigen,

bleibt eine möglichst einfache Modellstruktur erstrebenswert. Es liegt deshalb nahe, die übrigen Modellrestriktionen der „klassischen Regelungstechnik“ zunächst beizubehalten und zu versuchen, mit aus gewöhnlichen Differentialgleichungen bestehenden⁴ linearen zeitinvarianten Modellen ans Ziel zu gelangen. Für solche Modelle steht eine Vielzahl von ausgereiften Regler-Entwurfsverfahren zur Verfügung: *Zustandsmethoden* wie *Polvorgabe* oder *LQG-Ansatz* gehören seit Jahren zum Standardrepertoire der Regelungstechnik. Mehrgrößen-Frequenzbereichsmethoden stellen eine im deutschsprachigen Raum noch weniger verbreitete, aber – wie im folgenden Abschnitt ausgeführt wird – oft leichter zu handhabende Alternative dar.

1.3 Warum Reglerentwurf im Frequenzbereich?

Welche Klasse von Verfahren sich in einem konkreten Anwendungsfall am besten zum Entwurf von linearen zeitinvarianten Mehrgrößen-Reglern eignet, hängt stark davon ab, auf welche Art und Weise das Prozeßmodell erstellt wurde:

Unter *Theoretischer Modellbildung* verstehen wir die Beschreibung der Regelstrecke durch physikalische Naturgesetze, insbesondere Bilanzgleichungen. Eine solche Vorgehensweise führt i.a. auf einen Satz von Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung und eine Reihe von algebraischen Beziehungen. Die Differentialgleichungen geben an, wie sich eine (vektorielle) *modellinterne Variable* $\xi(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t und der (vektoriellen) Eingangsgröße $u(t)$ verhält. Die innere Variable und die Eingangsgröße bestimmen den Ausgangsvektor $y(t)$. Ein solches Modell gibt offenbar nicht nur einen Zusammenhang zwischen System-Ein- und Ausgangsgröße an, es ermöglicht darüber hinaus eine Aussage über Vorgänge im Innern des Systems: Wir sprechen von einem *Internen Modell* (Bild 1.7). Zustandsmodelle stellen ein Beispiel für solche Internen Modelle dar.

Eine entgegengesetzte Möglichkeit der Modellbildung ist rein *experimenteller Art*. Sie beschränkt sich auf die Auswertung von Strecken-Ein- und Ausgangsgrößen (z.B. die Anpassung von Sprungantworten) und leitet hieraus einen funktionalen Zusammenhang zwischen $u(t)$ und $y(t)$ ab. Wir erhalten ein Modell, das keinerlei Aussage über die Vorgänge im Systeminnern versucht – ein

⁴Diese Eigenschaft werden wir in Zukunft stillschweigend voraussetzen. Wenn wir also von einem „linearen zeitinvarianten Modell“ sprechen, werden wir darunter – falls nicht explizit anders angekündigt – immer ein aus gewöhnlichen Differentialgleichungen bestehendes lineares zeitinvariantes Modell verstehen.

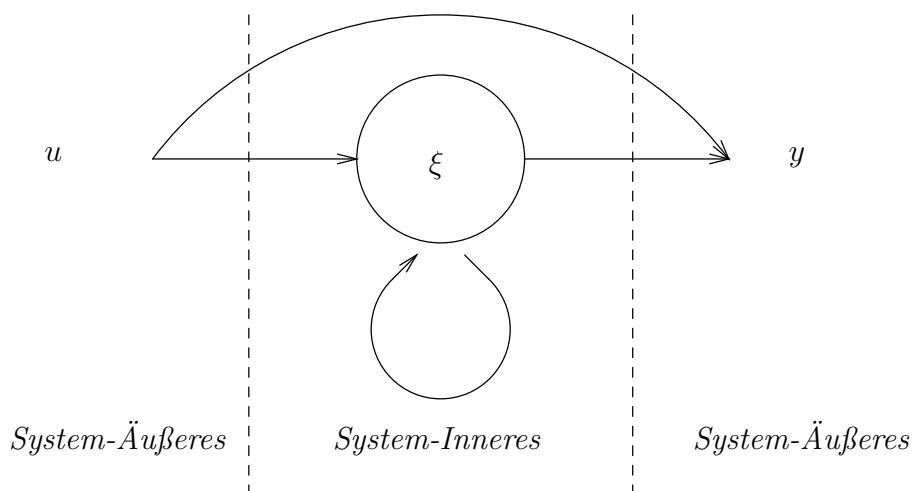


Bild 1.7: Internes Modell.

externes oder *Ein-/Ausgangs- (E/A-)Modell*. (Bild 1.8). Die Aussagekraft eines solchen Modells erreicht naturgemäß nicht die eines auf sorgfältigen physi-



Bild 1.8: E/A-Modell.

kalischen Überlegungen beruhenden internen Modells. Andererseits kann eine experimentelle Modellbildung i.a. mit geringerem zeitlichen Aufwand durchgeführt werden. Dies gilt umso mehr, je komplexer der zu modellierende Prozeß ist. In vielen Anwendungsbereichen beschränkt man sich deswegen fast ausschließlich auf experimentell gewonnene E/A-Modelle.

Zwar können Zustandsmodelle auch aus solchen E/A-Modellen abgeleitet werden, ihnen geht jedoch dann der Erklärungswert eines auf physikalischen Überlegungen basierenden Modells verloren: Die Zustände besitzen keine eigene, von Ein- und Ausgangsgrößen losgelöste Bedeutung.

Bei Vorliegen eines E/A-Modells liegt es deshalb nahe, regelungstechnische Ziele in Abhängigkeit von den physikalisch relevanten Ein- und Ausgangsgrößen und nicht über fiktive Zustandsvariable zu formulieren. Erstere Vorgehensweise charakterisiert die Klasse der *E/A-Entwurfsverfahren*. Alle in

Teil III behandelten Frequenzbereichsmethoden sind dieser Klasse zuzurechnen. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich in jüngster Zeit auch (auf der Minimierung von L_1 -Normen basierende) E/A-Zeitbereichsverfahren entwickelt haben. Diese muß man allerdings als noch im experimentellen Stadium befindlich ansehen. Methoden, bei denen regelungstechnische Ziele in Abhängigkeit von modellinternen Variablen ausgedrückt werden, bezeichnen wir als *Interne Entwurfsverfahren*. Zustandsansätze wie Pol-Vorgabe und LQG-Verfahren gehören zu dieser Klasse.

Wir wollen festhalten, daß Frequenzbereichs- (oder allgemeiner E/A-) Verfahren immer dann einen inhärenten Vorteil gegenüber Zustandsmethoden besitzen, wenn das Streckenmodell nur das Ein-/Ausgangsverhalten des zu regelnden Prozesses abbildet. Dieser Vorteil manifestiert sich in den meisten Fällen in einem Weniger an „Versuch und Irrtum“ beim Entwurfsvorgang. Ein weiterer Vorteil von Frequenzbereichsverfahren ist die konzeptionelle Nähe zu den Methoden der klassischen Regelungstechnik, mit denen die meisten Anwender vertraut sind.

Um Verwirrung zu vermeiden, sei an dieser Stelle nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir eine Entwurfsmethode immer dann der Klasse der E/A-Verfahren zuordnen, wenn interne Variable bei der Formulierung der Zielvorstellung keine Rolle spielen – ganz gleich, ob die tatsächliche Berechnung des Reglers im Frequenzbereich oder anhand von Zustandsdarstellungen (minimaler Ordnung) erfolgt.

1.4 Zusammenfassung

Wir haben der Verwendung des einfachsten, für eine gegebene Aufgabe geeigneten Modells das Wort geredet. Es wurde argumentiert, daß ein solches Modell in vielen Fällen zwar Mehrgrößencharakter besitzt, aber die vereinfachenden Modellannahmen der Linearität und Zeitinvarianz beinhaltet. Wenn ein solches Modell durch experimentelle Identifikation anstatt durch Erstellen physikalischer Bilanzgleichungen gefunden wurde, ist in aller Regel die Verwendung von Mehrgrößen-E/A-Verfahren anzuraten. Mit den in Teil III behandelten Frequenzbereichsmethoden stehen uns eine ganze Reihe solcher Verfahren zur Verfügung.

1.5 Literaturhinweise

„Klassische“ Entwurfs-Methoden für Eingrößensysteme (wie Nyquist- und Frequenz-Kennlinien-Verfahren, Ziegler-Nichols'sche Einstellregeln) werden in

allen guten einführenden Lehrbüchern der Regelungstechnik behandelt. Eine schöne Darstellung findet sich z.B. in *Föllinger* [25].

Die auf diesen Eingrößen-Methoden basierenden „Quasi-klassischen“ Entwurfsverfahren für Mehrgrößen-Systeme werden in einer Reihe von Lehrbüchern behandelt, die Ende der 70er oder Anfang der 80er Jahre erschienen. Hier sind in erster Linie die Bücher von *Owens* [82], *Patel* und *Munro* [87], *Tolle* [107] und insbesondere *Korn* und *Wilfert* [53] zu nennen. Die in letzter Zeit zu Popularität gelangten H_∞ - und μ -Methoden standen damals allerdings erst ganz am Anfang ihrer Entwicklung und können deshalb in diesen Abhandlungen nicht enthalten sein. Noch allgemeiner kann man sagen, daß zum damaligen Zeitpunkt die Untersuchung der Robustheit von mehrschleifigen Regelkreisen noch in den Kinderschuhen steckte, so daß eine einheitliche Behandlung von Entwurfs-Verfahren unter diesem Aspekt nicht möglich war. Eine ausführliche Besprechung des Themenkreises „Robustheit“ findet sich dagegen bei *Lunze* [61] sowie bei *Morari* und *Zafriou* [78]. Schließlich darf das – in meinen Augen hervorragende – Buch von *Maciejowski* [68] nicht unerwähnt bleiben. Dort wird ein ähnliches Ansinnen verfolgt wie im vorliegenden Buch, Schwerpunkte und Darstellung der Themen unterscheiden sich allerdings beträchtlich.

Kapitel 2

Modelle für lineare zeitinvariante Mehrgrößensysteme

Für verschiedene Analyse- und Entwurfsaufgaben benötigen wir verschiedene Modelldarstellungen der Regelstrecke. Im Frequenzbereich stehen uns im wesentlichen drei Möglichkeiten zur Beschreibung linearer zeitinvarianter Mehrgrößensysteme zur Verfügung – mit allen werden wir uns in den folgenden Abschnitten auseinandersetzen:

- Reell-rationale Matrizen (Übertragungsmatrix und Frequenzgangmatrix),
- Polynommatrizen (Polynom-Matrizenbruchdarstellung, Zustandsdarstellung und Rosenbrock-System-Matrix),
- „verallgemeinerte Polynommatrizen“.

2.1 Übertragungs- und Frequenzgangmatrizen

Wir betrachten das in Bild 1.5 gezeigte Mehrgrößensystem. $u(s)$ bzw. $y(s)$ seien die Laplace-Transformierten der vektoriellen Ein- und Ausgangsvariablen. Verschwinden sämtliche Anfangsbedingungen, so gibt die *Übertragungsmatrix* $G(s)$ einen algebraischen Zusammenhang zwischen $u(s)$ und $y(s)$ an:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(s) \\ \vdots \\ y_p(s) \end{bmatrix}}_{y(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1q}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(s) & \cdots & g_{pq}(s) \end{bmatrix}}_{G(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_q(s) \end{bmatrix}}_{u(s)}.$$

Die Übertragungsmatrix besteht also aus Übertragungsfunktionen $g_{ik}(s)$, $i = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, q$, die jeweils die Auswirkung der (skalaren) Eingangsgröße u_k auf die (skalare) Ausgangsvariable y_i beschreiben. $G(s)$ ist demzufolge eine reell-rationale Matrix in der Laplace-Variablen s .

Beispiel: Das in Bild 1.6 dargestellte Streckenmodell besitzt die Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{4}{s+8} \\ \frac{0.5}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Definition 2.1 (proper, streng proper)

Die Übertragungsmatrix $G(s)$ heißt proper, wenn

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \text{const.};$$

sie heißt streng proper, wenn gilt:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0.$$

Beispiel: Die Übertragungsmatrix $\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix}$ ist proper, aber nicht streng proper; (2.1) ist streng proper.

Die Übertragungsmatrix beschreibt das Ein-/Ausgangsverhalten eines linearen zeitinvarianten Systems eindeutig, versucht aber keinerlei Aussagen über die im Systeminnern ablaufenden Vorgänge. Es handelt sich also offenbar um ein „externes Modell“. Die Übertragungsmatrix stellt konzeptionell die für unsere Zwecke zentrale Beschreibungsform dar. Wir werden deswegen alle anderen Darstellungsmöglichkeiten auf sie zurückführen. Für numerische Berechnungen erweisen sich Übertragungsmatrizen allerdings als wenig geeignet. Zur Durchführung komplexer Rechenoperationen (wie Inversion, Multiplikation etc.) bedient man sich besser der in Abschnitt 2.2.3 behandelten *Minimalrealisierungen*.

Betrachten wir die Übertragungsmatrix auf der imaginären Achse $s = j\omega$, so erhalten wir die *Frequenzgangmatrix* $G(j\omega)$. Sie liegt allen grafikgestützten Analyse- und Entwurfsverfahren zugrunde und ermöglicht eine anschauliche Formulierung der an den Regelkreis gestellten Forderungen. Dies werden wir in Kapitel 5 und 6 ausführlich diskutieren. Wie im Eingrößenfall existieren prinzipiell zwei Möglichkeiten, die Matrix $G(j\omega)$ bildlich darzustellen: Wir

können jedes ihrer Elemente für alle (positiven) Frequenzen ω in der komplexen Ebene auftragen, erhalten somit ein Reihe von *Nyquist-Ortskurven* („Nyquist array“). Wir können andererseits jedes Element in Betrag $|g_{ik}(j\omega)|$ und Phase $\angle g_{ik}(j\omega)$ aufspalten,

$$g_{ik}(j\omega) = |g_{ik}(j\omega)|e^{j\angle g_{ik}(j\omega)},$$

und diese beiden reellen Größen jeweils getrennt über der Frequenz ω auftragen. Üblicherweise wählt man für die Frequenz einen logarithmischen, für die Phase einen linearen Maßstab. Der Betrag wird meist in dB (Dezibel) angegeben ($|g_{ik}|_{dB} = 20 \lg |g_{ik}|$). Auf diese Weise erhalten wir für die Frequenzgangmatrix $G(j\omega)$ ein aus den *Bode Diagrammen* ihrer Elemente bestehendes „Bode array“.

Beispiel: $G(j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega+1} & \frac{j\omega}{j\omega+2} \end{bmatrix}$. Bild 2.1 zeigt das zugehörige „Nyquist array“, Bild 2.2 das „Bode array“.

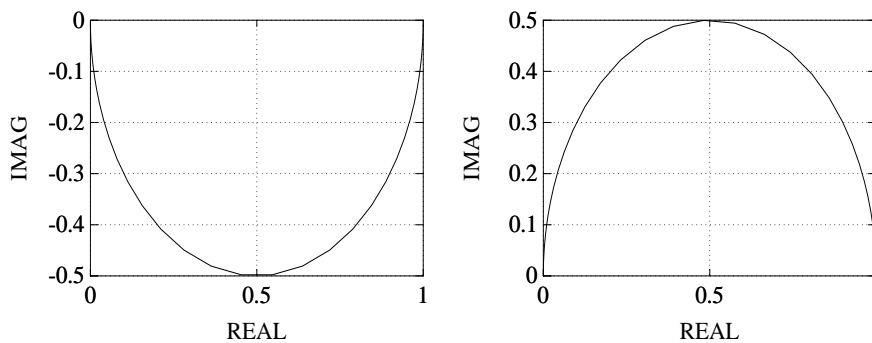


Bild 2.1: „Nyquist array“.

Die Frequenzgangmatrix stellt offenbar die natürliche Verallgemeinerung des aus der „klassischen Regelungstechnik“ bekannten skalaren Frequenzganges dar. Die Elemente der Matrix $G(j\omega)$ können deshalb in gewohnt anschaulicher Weise interpretiert werden: Wir betrachten eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$, deren Elemente asymptotisch stabil sind¹. Regen wir dieses System durch Aufgeben einer harmonischen Schwingung

$$u(t) = [0 \quad \dots \quad 0 \quad (\hat{u}_k \sin \omega t) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

auf die k te Eingangsgröße an und warten das Abklingen von Einschwingvorgängen ab, so werden wir feststellen, daß an den Systemausgängen wiederum harmonische Schwingungen anliegen – allerdings phasenverschoben und

¹Die Frequenzgangmatrix ist natürlich auch für grenz- oder instabile Systeme definiert. Lediglich die dargestellte Interpretationsmöglichkeit geht in diesem Fall verloren.

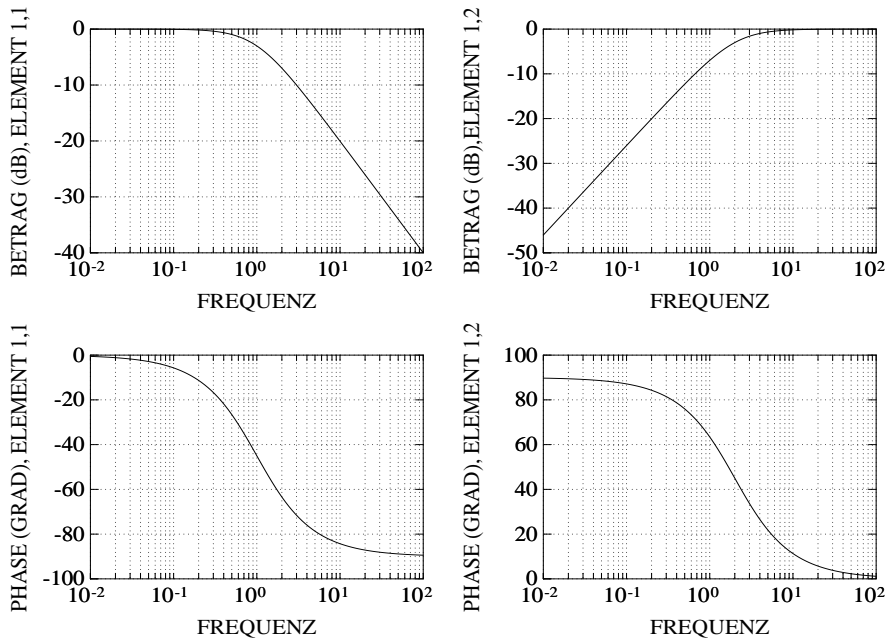


Bild 2.2: „Bode array“.

mit anderen Amplituden:

$$y(t) = \left[\hat{y}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \dots \quad \hat{y}_p \sin(\omega t + \varphi_p) \right]^T.$$

Betrag und Phase des Elementes $g_{ik}(j\omega)$ können dann direkt als Amplitudenverhältnis bzw. Phasenverschiebung der entsprechenden Ein- und Ausgangssignale gedeutet werden:

$$\begin{aligned} |g_{ik}(j\omega)| &= \frac{\hat{y}_i}{\hat{u}_k}, \\ \angle g_{ik}(j\omega) &= \varphi_i. \end{aligned}$$

Darüberhinaus bietet die Frequenzgangmatrix ein einfaches, aber oft adäquates Mittel zur näherungsweise numerischen Behandlung verschiedener Systemoperationen: Ein geeignetes Datenformat besteht aus einer *Frequenzliste* $[\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N]$ und den dazugehörigen Funktionswerten $G(j\omega_i)$. Im Rahmen dieser Darstellung werden Inversion, Multiplikation etc. von Frequenzgangmatrizen auf entsprechende Operationen mit komplexwertigen Konstanten zurückgeführt. Der numerische Aufwand hängt damit nur von der Länge der Frequenzliste und der Anzahl der Ein- und Ausgangsgrößen, nicht aber von der inneren Komplexität des Systems ab.

2.2 Polynomiale Modelle

Lineare zeitinvariante Übertragungssysteme lassen sich auch durch Polynommatrizen darstellen. Dies liegt auf der Hand, wenn wir ein Eingrößen-System betrachten: Die Übertragungsfunktion besteht aus zwei Polynomen in der Laplace-Variablen s – Zähler- und Nennerpolynom. Analog können wir eine Übertragungsmatrix als Bruch zweier Polynommatrizen schreiben. Neben solchen *Matrizenbruchdarstellungen* existieren noch weitere Möglichkeiten, das Verhalten linearer zeitinvarianter Systeme durch Polynommatrizen zu charakterisieren. Bevor wir uns Details zuwenden, müssen wir uns allerdings mit einigen wichtigen Eigenschaften von Polynommatrizen vertraut machen.

2.2.1 Eigenschaften von Polynommatrizen

Polynommatrizen lassen sich auf zweierlei Weise erklären: Wir können vom „Allgemeinen“ zum „Speziellen“ gehen und uns zunutze machen, daß Polynome eine besondere algebraischen Struktur aufweisen – sie bilden einen sogenannten Hauptidealring². Alle Eigenschaften von Matrizen über Hauptidealringen gelten deshalb auch für Polynommatrizen. Dieses Vorgehen besäße den Vorteil, daß die „verallgemeinerten Polynommatrizen“ – die wir für eine andere Möglichkeit der Systembeschreibung benötigen (s. Abschnitt 2.3) – als weiterer Spezialfall gleich mit abgehandelt wären. Wir beschreiten hier den umgekehrten, für den Nicht-Mathematiker anschaulicheren Weg: Für skalare Polynome erweisen sich die benötigten Begriffe als intuitiv verständlich; wir führen deshalb sämtliche Begriffe zuerst für diesen Spezialfall ein und zeigen, wie man sie auf Polynommatrizen erweitern kann. Der besseren Übersichtlichkeit halber werden Skalar- und Matrizen-Version in Form einer Tabelle gegenübergestellt.

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Definition 2.2 (Polynome) _____ <i>Die Menge aller Polynome in s mit reellen Koeffizienten bezeichnen wir mit \mathcal{RP}. Der Begriff „Polynom“ wird im folgenden als Abkürzung im Sinne von „Element aus \mathcal{RP}“ gebraucht. —</i></p>	<p>Definition 2.3 (Polynommatrizen) _____ <i>Die Menge aller $p \times q$-Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RP} („Polynommatrizen“) bezeichnen wir mit $\mathcal{RP}^{p \times q}$. _____</i></p>

²Mathematische Details solcher Hauptidealringe werden im folgenden nicht benötigt; deshalb begnügen wir uns mit einem Verweis auf entsprechende Literaturstellen: Eine ausführliche Darstellung findet man z.B. in [108], eine knappe Zusammenfassung in [110].

Für skalare Größen sind die Begriffe „Nichtsingularität“ und „Rang“ trivial. Wir betrachten deswegen nur den Matrizen-Fall:

Definition 2.4 (Nichtsinguläre Polynommatrizen) _____

Eine quadratische Polynommatrix $N_P(s)$ heißt nichtsingulär, wenn ihre Determinante für fast alle (alle bis auf endlich viele) s von Null verschieden ist. _____

Beispiel:

$$N_P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ s^2+s & s \end{bmatrix}$$

ist nichtsingulär, da

$$\det N_P(s) = -(s^2 + s)$$

nur für $s = 0$ und $s = -1$ verschwindet.

Definition 2.5 (Normalrang) _____

Besitzt eine Polynommatrix $N_P(s)$ für fast alle s Rang r , so wird r als Normalrang dieser Matrix bezeichnet. _____

Beispiel: Die Matrix aus vorigem Beispiel besitzt Normalrang 2,

$$N_P(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ s^2+s & s \end{bmatrix}$$

hingegen hat Normalrang 1, da $\det N_P(s) = 0$, aber nicht alle Elemente identisch verschwinden.

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Definition 2.6 (Grad eines Polynoms) _____</p> <p>Als Grad des Polynoms</p> $n_P(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots$ <p>bezeichnet man die größte Zahl k, für die $a_k \neq 0$. a_k heißt Anfangskoeffizient oder höchster Koeffizient des Polynoms $n_P(s)$. _____</p>	<p>Definition 2.7 (Spalten- und Zeilengrade einer Polynommatrix) _____</p> <p>Der höchste Grad k_i (\tilde{k}_i) aller Elemente der i-ten Spalte (Zeile) einer Polynommatrix $N_P(s)$ heißt i-ter Spaltengrad (Zeilengrad) dieser Matrix. _____</p>

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Beispiel: Das Polynom</p> $1 + s^2 + 1.5s^3$ <p>besitzt Grad 3.</p>	<p>Beispiel: Die Polynommatrix</p> $N_P(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 3s & s + 1 \\ 2s^2 + 1 & 2s \end{bmatrix}$ <p>besitzt Spaltengrade $k_1 = 2, k_2 = 1$ und Zeilengrade $\tilde{k}_1 = 2, \tilde{k}_2 = 2$.</p>

Mit Hilfe der Spalten- und Zeilengrade kann jede Polynommatrix $N_P(s)$ in folgender Form dargestellt werden:

$$N_P(s) = N_{hs} \text{diag}\{s^{k_i}\} + L_P(s) \quad (2.2)$$

oder

$$N_P(s) = \text{diag}\{s^{\tilde{k}_i}\} N_{hz} + \tilde{L}_P(s). \quad (2.3)$$

Die i te Spalte (Zeile) der konstanten Matrix N_{hs} (N_{hz}) enthält die Koeffizienten von s^{k_i} ($s^{\tilde{k}_i}$). Sämtliche Elemente der i ten Spalte (Zeile) von $L_P(s)$ ($\tilde{L}_P(s)$) besitzen höchstens Grad $k_i - 1$ ($\tilde{k}_i - 1$).

Definition 2.8 (Spalten- und zeilenreduzierte Polynommatrizen) —
Eine quadratische Polynommatrix $N_P(s)$ heißt spaltenreduziert, wenn $\det\{N_{hs}\} \neq 0$. Sie heißt zeilenreduziert, wenn $\det\{N_{hz}\} \neq 0$. —————

Beispiel: Die Polynommatrix

$$\begin{aligned} N_P(s) &= \begin{bmatrix} s^2 + 3s & s + 1 \\ 2s^2 + 1 & 2s \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_{N_{hs}} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{L_P(s)} \end{aligned}$$

ist nicht spaltenreduziert, da $\det\{N_{hs}\} = 0$.

Anmerkung: Das Konzept einer spalten- oder zeilenreduzierten Polynommatrix entartet im skalaren Fall zu der Aussage, daß der Anfangskoeffizient nicht verschwindet. Dies ist für skalare, von Null verschiedene Polynome per Definition erfüllt.

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Definition 2.9 (Teiler) _____ <i>Ein Polynom $r_P(s)$ heißt Teiler eines Polynoms $n_P(s)$, wenn ein Polynom $n'_P(s)$ existiert, so daß</i></p> $n_P(s) = n'_P(s)r_P(s).$ <hr/> <p>Beispiel: $c(s+1)$ und $c(s-1)$ sind für beliebige reelle Konstanten $c \neq 0$ Teiler des Polynoms s^2-1, da gilt:</p> $\begin{aligned} s^2 - 1 &= \frac{1}{c}(s-1)c(s+1) \\ &= \frac{1}{c}(s+1)c(s-1). \end{aligned}$	<p>Da Matrizen i.a. nicht kommutieren, müssen wir Rechts- und Linksteiler unterscheiden:</p> <p>Definition 2.10 (Rechts- u. Linksteiler) _____ <i>Eine Matrix $R_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ heißt Rechtsteiler einer Matrix $N_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q}$, wenn $N'_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q}$ existiert, so daß</i></p> $N_P(s) = N'_P(s)R_P(s).$ <p>$L_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times p}$ heißt Linksteiler von $N_P(s)$, wenn $N''_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q}$ existiert, so daß</p> $N_P(s) = L_P(s)N''_P(s).$ <hr/>
<p>Definition 2.11 (ggT) _____ <i>Ein Polynom $r_P(s)$ heißt größter gemeinsamer Teiler (ggT) zweier Polynome $n_P(s)$ und $m_P(s)$, wenn gilt:</i></p> <p>1. $r_P(s)$ ist gemeinsamer Teiler von $n_P(s)$ und $m_P(s)$, d.h.:</p> $\begin{aligned} n_P(s) &= n'_P(s)r_P(s), \\ n'_P &\in \mathcal{RP}, \\ m_P(s) &= m'_P(s)r_P(s), \\ m'_P &\in \mathcal{RP}, \end{aligned}$	<p>Definition 2.12 (ggRt und ggLt) _____ <i>Eine Polynommatrix $R_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ heißt größter gemeinsamer Rechtsteiler (ggRt) der Matrizen $N_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_n \times q}$ und $M_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_m \times q}$, wenn gilt:</i></p> <p>1. $R_P(s)$ ist gemeinsamer Rechtsteiler von $N_P(s)$ und $M_P(s)$, d.h.:</p> $N_P(s) = N'_P(s)R_P(s), \quad (2.4)$ $N'_P \in \mathcal{RP}^{p_n \times q},$ $M_P(s) = M'_P(s)R_P(s), \quad (2.5)$ $M'_P \in \mathcal{RP}^{p_m \times q},$ <hr/>

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>2. jeder andere gemeinsame Teiler $t_P(s)$ von $n_P(s)$ und $m_P(s)$ teilt auch $r_P(s)$, d.h.:</p> $r_P(s) = r'_P(s)t_P(s),$ $r'_P(s) \in \mathcal{RP}.$	<p>2. jeder andere gemeinsame Rechtsteiler $T_P(s)$ von $N_P(s)$ und $M_P(s)$ ist auch Rechtsteiler von $R_P(s)$, d.h.:</p> $R_P(s) = R'_P(s)T_P(s),$ $R'_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}.$
<p>Beispiel: $r_P(s) = 0.1(s + 1)$ ist ein größter gemeinsamer Teiler der Polynome $s^2 + 2s + 1$ und $s^2 - 1$.</p>	<p>Analog heißt eine Polynommatrix $L_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times p}$ größter gemeinsamer Linksteiler (ggLt) zweier Matrizen $\tilde{N}_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q_n}$ und $\tilde{M}_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q_m}$, wenn sie Linksteiler von $\tilde{N}_P(s)$ und $\tilde{M}_P(s)$ ist und von allen anderen Linksteilern dieser Matrizen (von links) geteilt wird. _____</p>
<p>ggT zweier Polynome sind nicht eindeutig bestimmt. Ist nämlich $r_P(s)$ ein ggT, so bildet für jede reelle Konstante $c \neq 0$ auch $c r_P(s)$ einen ggT. Haben wir andererseits <i>irgendeinen</i> ggT gefunden, so erhalten wir durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten <i>jeden</i> ggT zweier Polynome.</p>	<p>Im Matrizen-Fall gilt eine äquivalente Aussage: Sowohl ggRt als auch ggLt zweier Polynommatrizen sind nicht eindeutig; kennt man <i>einen</i> nichtsingulären ggRt (oder ggLt), so kann man hieraus – wie im folgenden erläutert – <i>alle</i> nichtsingulären ggRt (bzw. ggLt) erzeugen.</p>

$R_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ sei ein ggRt zweier Polynommatrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$. Dann ist für jede Polynommatrix $U_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$, deren Determinante eine von Null verschiedene reelle Konstante darstellt,

$$R_{PU}(s) := U_P(s)R_P(s) \tag{2.6}$$

wiederum ein ggRt. Solche Matrizen $U_P(s)$ heißen *unimodular*. Sie spielen im Matrizenfall offenbar dieselbe Rolle wie reelle Konstanten im skalaren Fall. Setzen wir Nichtsingularität der ggRt voraus (vgl. die Bemerkung auf Seite 52), so gilt auch: aus *irgendeinem* ggRt $R_P(s)$ können wir durch Linksmultiplikation mit einer geeigneten unimodularen Matrix *jeden* ggRt zweier

Polynommatrizen erzeugen. Wenn wir „Linksmultiplikation“ durch „Rechtsmultiplikation“ ersetzen, erhalten wir eine entsprechende Aussage für ggLt. Die Richtigkeit dieser Aussage kann man leicht zeigen (z.B. [47]):

Beweis: $R_P(s)$ sei ein ggRt der Matrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$. $U_P(s)$ sei eine beliebige unimodulare $q \times q$ -Polynommatrix. Die Inverse einer solchen Matrix ist wiederum polynomial; dies ist leicht zu sehen, wenn wir die Inverse mittels Adjunkte und Determinante der Matrix U_P ausdrücken:

$$\begin{aligned} U_P^{-1}(s) &= \frac{\text{adj } U_P(s)}{\det U_P(s)} \\ &= \text{const. adj } U_P(s) \\ &:= V_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

(Für „gewöhnliche“ Polynommatrizen gilt dies natürlich nicht; ihre Inversen enthalten im allgemeinen rationale Funktionen in s : Man betrachte z.B. die „Matrix“ $(s + 1)$.)

Wir multiplizieren (2.6) von links mit $U_P^{-1}(s)$, beachten (2.7) und erhalten:

$$R_P(s) = V_P(s)R_{PU}(s).$$

Durch Einsetzen in (2.4) und (2.5) ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_P(s) &= \underbrace{N'_P(s)V_P(s)}_{:=N''_P} R_{PU}(s), \\ M_P(s) &= \underbrace{M'_P(s)V_P(s)}_{:=M''_P} R_{PU}(s), \end{aligned}$$

d.h. $R_{PU}(s)$ ist Rechtsteiler von $N_P(s)$ und $M_P(s)$. Wegen (2.6) wird $R_{PU}(s)$ von $R_P(s)$ und damit (R_P ist voraussetzungsgemäß ein ggRt!) von allen anderen Rechtsteilern der Matrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$ geteilt. Laut Definition 2.12 ist $R_{PU}(s)$ damit selbst ein ggRt.

Nun zeigen wir, daß alle ggRt durch unimodulare Matrizen verknüpft sind: $R_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ und $T_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ seien zwei ggRt zweier gegebener Polynommatrizen. Definitionsgemäß teilen alle gemeinsamen Rechtsteiler (also auch T_P) $R_P(s)$ von rechts. Es existiert also eine Polynommatrix $R'_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$, so daß

$$R_P(s) = R'_P(s)T_P(s). \quad (2.8)$$

Desgleichen wird $T_P(s)$ von allen gemeinsamen Rechtsteilern (und damit auch von R_P) von rechts geteilt; es gibt also eine Polynommatrix $T'_P \in \mathcal{RP}^{q \times q}$, so daß

$$T_P(s) = T'_P(s)R_P(s). \tag{2.9}$$

Da wir Nichtsingularität von R_P und T_P vorausgesetzt haben, erhalten wir aus (2.8) und (2.9):

$$T'_P(s) = R'_P(s)^{-1}.$$

Da sowohl $R'_P(s)$ als auch $T'_P(s)$ Polynommatrizen sind, müssen sie unimodular sein. Ein entsprechender Beweis läßt sich für ggLt führen. \square

Nun können wir definieren, was man unter *teilerfremden* Polynomen und *rechts-* bzw. *linkskoprimen* Polynommatrizen versteht:

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Definition 2.13 (Kopprime Polynome) <hr/>Zwei Polynome $n_P(s)$ und $m_P(s)$ heißen <i>koprim</i> oder <i>teilerfremd</i>, wenn ihre ggT reelle Konstanten sind. <hr/></p> <p>Beispiel: $(s^2 + 2s + 1)$ und $(s^2 - 1)$ sind nicht koprim, da $c(s + 1)$ für jedes reellwertige $c \neq 0$ einen ggT beider Polynome darstellt.</p>	<p>Definition 2.14 (Rechts- und linkskopprime Polynommatrizen) <hr/>Zwei Polynommatrizen $N_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_n \times q}$ und $M_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_m \times q}$ heißen <i>rechtskoprim</i>, wenn ihre ggRt unimodulare Matrizen sind. $\tilde{N}_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q_n}$ und $\tilde{M}_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q_m}$ werden <i>linkskoprim</i> genannt, wenn ihre ggLt unimodular sind. <hr/></p>

Wir haben zwar eine Reihe von nützlichen Begriffen von skalaren auf Matrizen-Polynome erweitert, noch fehlen uns aber konstruktive Methoden, um die Gültigkeit dieser Begriffe im Matrizenfall zu überprüfen. Weder können wir im Moment entscheiden, ob zwei gegebene Polynommatrizen rechts- (bzw. links-) koprim sind, noch wissen wir, wie man einen ggRt (bzw. ggLt) findet. Wir beginnen mit der zweiten Fragestellung – der Bestimmung eines ggRt.

2.2.1.1 Bestimmung eines ggRt

Wir benötigen zunächst ein Ergebnis aus der Matrizen-theorie:

Tatsache: Durch *elementare Zeilenoperationen* kann man jede $p \times q$ ($p > q$) Polynommatrix „komprimieren“, so daß die letzten $p - q$ Zeilen verschwinden (s. Bild 2.3). Unter „elementaren Zeilenoperationen“ verstehen wir:

1. Vertauschen von Zeilen,
2. Hinzuaddieren des polynomialen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile,
3. Skalieren einer Zeile mit einer reellen, von Null verschiedenen Konstanten.

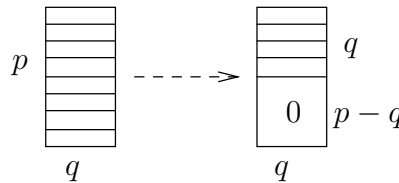


Bild 2.3: „Komprimieren“ einer Polynommatrix.

Folgendes Beispiel zeigt, daß jede dieser Operationen – und damit auch jede beliebige Kombination solcher Operationen – der Multiplikation von links mit einer unimodularen Matrix entspricht.

Beispiel: $a_P(s)^T$, $b_P(s)^T$ und $c_P(s)^T$ bezeichnen die Zeilen einer Polynommatrix. Beispiele für elementare Zeilenoperationen sind:

1. Vertauschen der ersten beiden Zeilen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P1}} \begin{bmatrix} a_P(s)^T \\ b_P(s)^T \\ c_P(s)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_P(s)^T \\ a_P(s)^T \\ c_P(s)^T \end{bmatrix},$$

2. Hinzuaddieren des $\alpha_P(s)$ -fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile ($\alpha_P(s) \in \mathcal{RP}$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_P(s) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P2}} \begin{bmatrix} a_P(s)^T \\ b_P(s)^T \\ c_P(s)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_P(s)^T \\ \alpha_P(s)a_P(s)^T + b_P(s)^T \\ c_P(s)^T \end{bmatrix},$$

3. Skalieren der zweiten Zeile mit reellwertigem $\gamma \neq 0$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P3}} \begin{bmatrix} a_P(s)^T \\ b_P(s)^T \\ c_P(s)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_P(s)^T \\ \gamma b_P(s)^T \\ c_P(s)^T \end{bmatrix}.$$

Die Determinanten aller U_{P_i} , $i = 1, \dots, 3$, sind von Null verschiedene reelle Konstanten; diese Matrizen sind also unimodular.

Geeignete elementare Zeilenoperationen zur Komprimierung einer $p \times q$ ($p > q$) Polynommatrix liefert z.B. das [98] entnommene Rezept:

Falls in der ersten Spalte nicht alle Elemente verschwinden, bringe man durch Vertauschen von Zeilen ein von Null verschiedenes Element niedrigsten Grades an die Position $(1, 1)$. Nun addiere man geeignete (polynomiale) Vielfache der ersten Zeile zu allen anderen Zeilen, so daß die $(2, 1)$ -, $(3, 1)$ -, \dots , $(p, 1)$ -Elemente niedrigeren Grad aufweisen als das $(1, 1)$ -Element. Verschwinden nicht alle diese $p - 1$ Elemente, so bringe man durch ein erneutes Vertauschen von Zeilen wiederum ein von Null verschiedenes Element niedrigsten Grades in die Position $(1, 1)$ und wiederhole die ganze Prozedur. Schließlich werden die $(2, 1)$ -, $(3, 1)$ -, \dots , $(p, 1)$ -Elemente alle zu Null. Im nächsten Schritt greifen wir die „süd-östliche“ $(p - 1) \times (q - 1)$ -Untermatrix heraus und verfahren mit dieser analog. Diese Vorgehensweise führt offenbar auf eine „obere Dreiecks-Matrix“ und damit auf die gewünschte Komprimierung.

Beispiel: Wir betrachten die Matrix

$$P_P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s^2 + 1 \\ s & -2 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Folgende Schritte sind durchzuführen:

1. Vertauschen von erster und zweiter Zeile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P_1}} P_P(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & -2 \\ s^2 & s^2 + 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{P_{P_1}(s)},$$

2. Hinzuaddieren des $-s$ -fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P_2}} P_{P_1}(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & s^2 + 2s + 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{P_{P_2}(s)},$$

3. Vertauschen von zweiter und dritter Zeile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{U_{P_3}} P_{P_2}(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & s \\ 0 & s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix}}_{P_{P_3}(s)},$$

4. Hinzuaddieren des $-(s+2)$ -fachen der zweiten Zeile zur dritten Zeile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(s+2) & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P4}} P_{P3}(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_{P4}(s)},$$

5. Vertauschen von zweiter und dritter Zeile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{U_{P5}} P_{P4}(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{P_{P5}(s)},$$

6. Subtrahieren des s -fachen der zweiten Zeile von der dritten Zeile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{bmatrix}}_{U_{P6}} P_{P5}(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_{P6}(s)}.$$

Mit

$$\begin{aligned} U_P(s) &:= U_{P6}U_{P5}U_{P4}U_{P3}U_{P2}U_{P1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -s & -(s+2) \\ -s & s^2 & s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich zusammengefaßt:

$$U_P(s)P_P(s) = P_{P6}(s).$$

Satz 2.1 (Bestimmung eines ggRt)

Gegeben seien zwei Polynommatrizen $N_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_n \times q}$ und $M_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_m \times q}$ mit $p_n + p_m > q$. Man komprimiere die Matrix

$$\begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix}$$

durch elementare Zeilenoperationen (i.e durch Vorschalten einer unimodularen Matrix $U_P(s)$), so daß die letzten $p_n + p_m - q$ Zeilen verschwinden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{P11}(s) & U_{P12}(s) \\ U_{P21}(s) & U_{P22}(s) \end{bmatrix}}_{=U_P(s)} \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_P(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

$R_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ ist dann ein ggRt der Matrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$.

Beweis: Inversion einer unimodularen Polynommatrix ergibt – laut Definition – wiederum eine Polynommatrix:

$$U_P(s)^{-1} := \underbrace{\begin{bmatrix} V_{P11}(s) & V_{P12}(s) \\ V_{P21}(s) & V_{P22}(s) \end{bmatrix}}_q \in \mathcal{RP}^{(p_n+p_m) \times (p_n+p_m)}. \quad (2.11)$$

Aus (2.10) und (2.11) folgt unmittelbar:

$$N_P(s) = V_{P11}(s)R_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_n \times q},$$

$$M_P(s) = V_{P21}(s)R_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_m \times q}.$$

$R_P(s)$ ist also gemeinsamer Rechtsteiler der Matrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$. Nehmen wir an, die Polynommatrix $T_P(s)$ sei ein weiterer gemeinsamer Rechtsteiler von $N_P(s)$ und $M_P(s)$. Gl. (2.10) entnehmen wir dann:

$$\begin{aligned} R_P(s) &= U_{P11}(s)N_P(s) + U_{P12}(s)M_P(s) \\ &= U_{P11}(s)N'_P(s)T_P(s) + U_{P12}(s)M'_P(s)T_P(s) \\ &= \underbrace{(U_{P11}(s)N'_P(s) + U_{P12}(s)M'_P(s))}_{:=R'_P(s)} T_P(s), \end{aligned}$$

d.h. jeder gemeinsame Rechtsteiler von $N_P(s)$ und $M_P(s)$ ist auch Rechtsteiler von $R_P(s)$. \square

Beispiel: Wir betrachten

$$N_P(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$M_P(s) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Wie im letzten Beispiel ausgeführt, können wir durch elementare Zeilenoperationen

$$\begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} \quad \text{auf} \quad \begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

komprimieren.

$$R_P(s) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist deshalb ein ggRt der Matrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$.

Multiplikation mit einer unimodularen Matrix verändert den Normalrang einer Polynommatrix offensichtlich nicht. Aus Satz 2.1 folgt deshalb unmittelbar, daß die ggRt R_P der Matrizen N_P und M_P genau dann nichtsingulär sind, wenn

$$\text{Normalrang} \left\{ \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} \right\} = q. \quad (2.12)$$

Da q auch die Zahl der Spalten dieser Matrix angibt, sagt man, daß sie für fast alle s vollen Spaltenrang aufweisen muß. Dies wollen wir im folgenden immer voraussetzen. Im Eingrößenfall ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt: Der Normalrang des Spaltenvektors

$$\begin{bmatrix} n_P(s) \\ m_P(s) \end{bmatrix}$$

kann nur dann kleiner als $q = 1$ sein, wenn sowohl $n_P(s)$ als auch $m_P(s)$ verschwinden.

Aus Satz 2.1 läßt sich leicht folgender Sachverhalt ableiten:

Satz 2.2 (Einfache Bezout-Identität) _____

Die Matrizen $N_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_n \times q}$ und $M_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_m \times q}$ ($p_n + p_m > q$) sind genau dann rechtskoprim, wenn zwei Polynommatrizen $X_P(s)$ und $Y_P(s)$ existieren, so daß

$$\begin{bmatrix} X_P(s) & Y_P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} = I_q. \quad (2.13)$$

Beweis:³ (\implies) $N_P(s)$ und $M_P(s)$ seien rechtskoprim; jeder ggRt $R_P(s)$ beider Matrizen ist also unimodular, $R_P^{-1}(s)$ somit eine Polynommatrix. Multiplizieren wir (2.10) von links mit $\begin{bmatrix} R_P^{-1}(s) & 0 \end{bmatrix}$, so erhalten wir

$$\underbrace{R_P(s)^{-1} U_{P11}(s)}_{:= X_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times p_n}} N_P + \underbrace{R_P(s)^{-1} U_{P12}(s)}_{:= Y_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times p_m}} M_P = I_q$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} X_P(s) & Y_P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} = I_q.$$

³Beim Beweis einer notwendigen und hinreichenden Aussage („ A genau dann, wenn B “) folgt dem Symbol (\implies) der Beweis der Notwendigkeit von B für A („ A nur dann, wenn B “ bzw. „aus A folgt B “), dem Symbol (\impliedby) der Beweis, daß B hinreichend für A ist („ A wenn B “ bzw. „aus B folgt A “).

(\Leftarrow) Gegeben seien zwei Polynommatrizen $X_P(s)$ und $Y_P(s)$, die (2.13) erfüllen. $R_P(s)$ sei ein beliebiger ggRt der Matrizen $N_P(s)$ und $M_P(s)$. Dann existieren offenbar Polynommatrizen $N'_P(s)$ und $M'_P(s)$, so daß

$$[X_P(s)N'_P(s) + Y_P(s)M'_P(s)] R_P(s) = I_q;$$

die Inverse von $R_P(s)$ ist also eine Polynommatrix, R_P somit unimodular. Laut Definition 2.14 sind $N_P(s)$ und $M_P(s)$ deshalb rechtskoprim. \square

Ganz analog kann man untersuchen, ob zwei gegebene Polynommatrizen linkskoprim sind: Durch *elementare Spaltenoperationen* (i.e. Multiplikation von rechts mittels einer unimodularen Polynommatrix) kann $\begin{bmatrix} \tilde{N}_P(s) & \tilde{M}_P(s) \end{bmatrix}$ in die Form $\begin{bmatrix} \tilde{R}_P(s) & 0 \end{bmatrix}$ gebracht werden. Die $p \times p$ -Polynommatrix $\tilde{R}_P(s)$ stellt dann einen ggLt der Matrizen $\tilde{N}_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q_n}$ und $\tilde{M}_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times q_m}$ dar. \tilde{R}_P ist genau dann unimodular (d.h. $\tilde{N}_P(s)$ und \tilde{M}_P sind linkskoprim), wenn zwei Polynommatrizen $\tilde{X}_P(s)$ und $\tilde{Y}_P(s)$ existieren, so daß

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_P(s) & \tilde{M}_P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_P(s) \\ \tilde{Y}_P(s) \end{bmatrix} = I_p. \quad (2.14)$$

Das „Rezept“ auf Seite 49 zeigt, wie man eine Polynommatrix durch elementare Zeilenoperationen (d.h. Linksmultiplikation mit einer unimodularen Matrix) auf obere Dreiecksform reduzieren kann. Lassen wir sowohl elementare Zeilen- als auch Spaltenoperationen zu, so können wir eine Polynommatrix auf Diagonalform, die sogenannte *Smith-Form*, transformieren:

Satz 2.3 (Smith-Form)

Für jede $p \times q$ -Polynommatrix $N_P(s)$ mit Normalrang r existieren unimodulare Matrizen $U_P(s)$ und $V_P(s)$, so daß

$$\begin{aligned} U_P(s)N_P(s)V_P(s) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_P(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_r \underbrace{\quad}_{q-r} \begin{matrix} \}r \\ \}p-r \end{matrix} \\ &:= S_P(s) \end{aligned}$$

und

$$\Lambda_P(s) = \text{diag} \{ \lambda_{P1}(s), \lambda_{P2}(s), \dots, \lambda_{Pr}(s) \}.$$

Die Polynome $\lambda_{Pi}(s)$ teilen in Richtung „wachsender Indizes“ ($\lambda_{Pi}(s)$ teilt $\lambda_{P(i+1)}(s)$), ihre Anfangskoeffizienten sind auf 1 normiert. Die $\lambda_{Pi}(s)$ heißen invariante Polynome, $S_P(s)$ Smith-Form der Matrix $N_P(s)$.

Nun betrachten wir die größten gemeinsamen Teiler aller $i \times i$ -Minoren⁴ der Matrix $N_P(s)$, normieren ihre Anfangskoeffizienten auf 1 und bezeichnen das Resultat mit $\Delta_{P_i}(s)$. Dann lassen sich die Elemente $\lambda_{P_i}(s)$ der Smith-Form $S_P(s)$ aus

$$\begin{aligned}\lambda_{P_1}(s) &= \Delta_{P_1}(s) \\ \lambda_{P_i}(s) &= \frac{\Delta_{P_i}(s)}{\Delta_{P_{(i-1)}}(s)} \quad i = 2, \dots, r,\end{aligned}$$

berechnen.

Beweis: s. z.B. [101]

Anmerkung: Die invarianten Polynome und die Smith-Form einer Matrix sind *eindeutig* bestimmt. Dies gilt jedoch *nicht* für die Transformationsmatrizen $U_P(s)$ und $V_P(s)$.

Beispiel: ([87]) Wir betrachten die Matrix

$$N_P(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 2(s+1) \\ s+3 & s+3 \end{bmatrix}.$$

Ihr Normalrang beträgt 2. Als größte gemeinsame Teiler aller Elemente (und somit aller 1×1 -Minoren) von $N_P(s)$ erhalten wir sämtliche von Null verschiedene reelle Zahlen. Die geforderte Normierung führt auf $\Delta_{P_1} = 1$. $\Delta_{P_2}(s)$ stimmt bis auf den Normierungsfaktor mit $\det\{N_P(s)\}$ überein:

$$\Delta_{P_2}(s) = (s+3)(s-1).$$

Die invarianten Polynome und die Smith-Form der Matrix N_P ergeben sich somit zu:

$$\begin{aligned}\lambda_{P_1} &= 1 \\ \lambda_{P_2}(s) &= (s+3)(s-1) \\ S_P(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+3)(s-1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

⁴Die $i \times i$ -Minoren einer $p \times q$ -Matrix sind die Determinanten aller Matrizen, die man durch „Herausstreichen“ einer beliebigen Kombination von $p-i$ Zeilen und $q-i$ Spalten dieser Matrix erhält.

Der Definition der Smith-Form entnehmen wir, daß die Determinante einer nichtsingulären quadratischen Polynommatrix $N_P(s)$ bis auf eine multiplikative reelle Konstante mit dem Produkt der invarianten Polynome übereinstimmt:

$$\det N_P(s) = c \prod_{i=1}^r \lambda_{P_i}(s).$$

Demzufolge sind sämtliche invarianten Polynome einer unimodularen Matrix 1, die Smith-Form einer solchen Matrix ist die Einheitsmatrix.

Die Smith-Form kann auch herangezogen werden, um zu überprüfen, ob zwei gegebene Polynommatrizen rechts- bzw. linkskoprim sind:

Satz 2.4 (Smith-Form-Kriterium)

Zwei Polynommatrizen $N_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_n \times q}$ und $M_P(s) \in \mathcal{RP}^{p_m \times q}$ ($p_n + p_m > q$) sind genau dann rechtskoprim, wenn gilt

$$\text{Smith-Form} \left\{ \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Beweis: (\implies) Laut Satz 2.1 können wir eine unimodulare Matrix $U_P(s)$ finden, so daß

$$U_P(s) \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_P(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$R_P(s) \in \mathcal{RP}^{q \times q}$ ist ein größter gemeinsamer Rechtsteiler der beiden Matrizen N_P und M_P . Sind diese Matrizen rechtskoprim, so ist R_P unimodular; wir können mit der Inversen R_P^{-1} von rechts durchmultiplizieren und erhalten

$$U_P(s) \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} \underbrace{R_P^{-1}(s)}_{:=V_P(s)} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(\impliedby) Gilt (2.15), so existieren zwei unimodulare Matrizen U_P und V_P , so daß

$$U_P(s) \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} V_P(s) = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.16)$$

wir multiplizieren von rechts mit der (unimodularen) Polynommatrix $R_P := V_P^{-1}$ und erhalten

$$U_P(s) \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_P(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gemäß Satz 2.1 stellt R_P einen ggRt dar. Aufgrund der Unimodularität von R_P sind N_P und M_P rechtskoprim. \square

Ausführlich geschrieben lautet Bedingung (2.15): Es existieren zwei unimodulare Matrizen U_P und V_P , so daß (2.16) gilt. Da die Determinanten unimodularer Matrizen für *alle* s von Null verschieden sind, folgt aus (2.16), daß

$$\text{Rang} \left\{ \begin{bmatrix} N_P(s) \\ M_P(s) \end{bmatrix} \right\} = q \quad \text{für alle } s, \quad (2.17)$$

die fragliche Matrix also für *jeden* Wert von s vollen Spaltenrang q besitzt. Dieses *Rang-Kriterium* (das sich übrigens auch unmittelbar aus Satz 2.2 ableiten läßt) stellt also ebenfalls eine notwendige und hinreichende Bedingung dar, anhand derer wir überprüfen können, ob zwei gegebene Polynommatrizen N_P und M_P rechtskoprim sind. Man vergleiche die Bedingungen (2.12) und (2.17): voller Spaltenrang für *fast alle* s bedeutet Nichtsingularität der ggRt, voller Spaltenrang für *alle* s Unimodularität der ggRt und damit Rechts-Koprimheit der Polynommatrizen N_P und M_P .

Analoge Resultate gelten für Links-Koprimheit zweier Matrizen.

2.2.2 Polynom-Matrizenbruchdarstellungen

Das Ein-/Ausgangsverhalten eines linearen zeitinvarianten Systems läßt sich durch Polynome beschreiben. Für Eingößensysteme liegt die Richtigkeit dieser Aussage auf der Hand: die Übertragungsfunktion eines solchen Systems besteht aus Zähler- und Nennerpolynom. Ganz analog lassen sich Übertragungsmatrizen durch zwei Polynommatrizen darstellen. Hiermit wollen wir uns auf den folgenden Seiten befassen. Um das Verständnis der Zusammenhänge im Mehrgrößenfall zu erleichtern, stellen wir wieder skalare und Matrizen-Version gegenüber:

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Definition 2.15 (Polynom-Bruchdarstellung) _____ Ein Paar von Polynomen $\{n_P(s), m_P(s)\}$ heißt Polynom-Bruchdarstellung eines Systems mit Übertragungsfunktion $g(s)$, wenn gilt.</p> $g(s) = \frac{n_P(s)}{m_P(s)}.$	<p>Definition 2.16 (Rechte und linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung) _____ Ein Paar von Polynommatrizen $\{N_P(s), M_P(s)\}$ heißt rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung (PMbd) eines Systems mit $p \times q$-Übertragungsmatrix $G(s)$, wenn</p> $G(s) = N_P(s)M_P^{-1}(s).$

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>$n_P(s)$ wird als Zähler-, $m_P(s)$ als Nennerpolynom bezeichnet.</p>	<p>Analog spricht man von einer linken Polynom-Matrizenbruchdarstellung $\{\tilde{N}_P(s), \tilde{M}_P(s)\}$, wenn</p> $G(s) = \tilde{M}_P^{-1}(s)\tilde{N}_P(s).$ <p>$N_P(s)$ und $\tilde{N}_P(s)$ werden als Zähler-, $M_P(s)$ und $\tilde{M}_P(s)$ als Nennermatrizen bezeichnet. Die Dimensionen der Zählermatrizen stimmen mit denen der Übertragungsmatrix $G(s)$ überein. $M_P(s)$ und $\tilde{M}_P(s)$ sind nicht-singuläre $q \times q$ bzw. $p \times p$-Matrizen (vgl. Bild 2.4).</p>
<p>Polynom-Bruchdarstellungen sind nicht eindeutig: Beispiel: Sowohl $\{1, s + 1\}$ als auch $\{3.14(s+2), 3.14(s+1)(s+2)\}$ sind Polynom-Bruchdarstellungen des Verzögerungsgliedes $g(s) = \frac{1}{s+1}$.</p>	<p>Genau wie im Eingrößenfall sind Polynom-Bruchdarstellungen auch im Mehrgrößenfall nicht eindeutig: $R_P(s)$ sei eine beliebige nichtsinguläre $q \times q$-Polynommatrix. Ist $\{N_P(s), M_P(s)\}$ eine rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung einer gegebenen Übertragungsmatrix $G(s)$, so trifft dies natürlich auch auf $\{N_P(s)R_P(s), M_P(s)R_P(s)\}$ zu:</p> $\begin{aligned} G(s) &= N_P(s)M_P^{-1}(s) \\ &= N_P(s) \underbrace{R_P(s)R_P^{-1}(s)}_{I_q} M_P^{-1}(s). \end{aligned}$

$$\begin{array}{c} p \\ \boxed{G} \\ q \end{array} = \begin{array}{c} p \\ \boxed{N_P} \\ q \end{array} \begin{array}{c} q \\ \boxed{M_P^{-1}} \\ h \quad q \end{array} = \begin{array}{c} p \\ \boxed{\tilde{M}_P^{-1}} \\ p \end{array} \begin{array}{c} p \\ \boxed{\tilde{N}_P} \\ q \end{array}$$

Bild 2.4: Dimensionen von Zähler- und Nennermatrizen.

Skalarer Fall	Matrizen-Fall
<p>Wenn wir nur das Ein-/Ausgangsverhalten eines Systems modellieren wollen, macht es natürlich keinen Sinn, nichtkopprime Polynome zu verwenden – bei der Bildung der Übertragungsfunktion werden gemeinsame Faktoren ohnehin gekürzt. Sind Zähler- und Nennerpolynom teilerfremd, so sprechen wir von einer <i>koprime Polynom-Bruchdarstellung</i>.</p>	<p>Auch im Mehrgrößenfall erweist es sich oft als sinnvoll, sich auf rechts- bzw. linkskopprime Matrizen-Paare zu beschränken. Gilt</p> $G(s) = N_P(s)M_P^{-1}(s),$ <p>$N_P(s), M_P(s) \dots$ rechtskoprim ,</p> <p>so spricht man von einer <i>rechtskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung</i>; der „duale“ Fall</p> $G(s) = \widetilde{M}_P^{-1}(s)\widetilde{N}_P(s),$ <p>$\widetilde{N}_P(s), \widetilde{M}_P(s) \dots$ linkskoprim ,</p> <p>wird als <i>linkskopprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung</i> bezeichnet.</p>
<p>Auch die Beschränkung auf kopprime Polynome führt natürlich nicht zu Eindeutigkeit: Größte gemeinsame Teiler zweier Polynome sind nur bis auf eine beliebige (von Null verschiedene) reelle Konstante bestimmt; wir können deswegen Zähler- und Nennerpolynom mit einer solchen Konstanten erweitern, ohne die Eigenschaft der Teilerfremdheit zu zerstören.</p> <p>Beispiel: Sowohl</p> $\{1, s + 1\}$ <p>als auch</p> $\{3.14, 3.14(s + 1)\}$ <p>sind kopprime Polynom-Bruchdarstellungen des Systems $g(s) = \frac{1}{s+1}$.</p>	<p>Auch die Verwendung rechts- bzw. linkskopprimer Matrizen-Paare erzwingt keineswegs Eindeutigkeit: Wir können zwei rechts- (links-) kopprime Polynommatrizen von rechts (links) mit jeder unimodularen Matrix U_P „passender“ Dimension multiplizieren, ohne diese Eigenschaft zu zerstören. Es gilt deshalb:</p> $\{N_P, M_P\} \text{ ist eine rechtskopprime PMbd von } G \implies \{N_P U_P, M_P U_P\} \text{ ist eine rechtskopprime PMbd von } G$ $\{\widetilde{N}_P, \widetilde{M}_P\} \text{ ist eine linkskopprime PMbd von } G \implies \{U_P \widetilde{N}_P, U_P \widetilde{M}_P\} \text{ ist eine linkskopprime PMbd von } G$

Wir können also eine gegebene Übertragungsmatrix $G(s)$ sowohl als rechts- wie auch als linkskoprieme Matrizenbruchdarstellung schreiben:

$$G(s) = N_P(s)M_P^{-1}(s) \quad (2.18)$$

$$= \widetilde{M}_P^{-1}(s)\widetilde{N}_P(s). \quad (2.19)$$

Aus Abschnitt 2.2.1 wissen wir, daß sich Polynommatrizen $X_P(s)$, $Y_P(s)$ und $\widetilde{X}_P(s)$, $\widetilde{Y}_P(s)$ finden lassen, die die *einfachen Bezout-Beziehungen* (2.13) und (2.14) erfüllen. Diese Matrizen können nun so gewählt werden, daß darüberhinaus die *verallgemeinerte Bezout-Identität*

$$\begin{bmatrix} X_P(s) & Y_P(s) \\ \widetilde{M}_P(s) & -\widetilde{N}_P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_P(s) & \widetilde{Y}_P(s) \\ M_P(s) & -\widetilde{X}_P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

gilt.

Beweis: Wir beginnen mit einer rechts- und einer linkskopriemen Matrizenbruchdarstellung von $G(s)$ (Gln. (2.18) und (2.19)). $\{X_P, Y_P\}$ und $\{\hat{X}_P, \hat{Y}_P\}$ seien irgendwelche Paare von Polynommatrizen, die den einfachen Bezout-Beziehungen (2.13) und (2.14) genügen. Dann gilt sicherlich

$$\begin{bmatrix} X_P(s) & Y_P(s) \\ \widetilde{M}_P(s) & -\widetilde{N}_P(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_P(s) & \hat{Y}_P(s) \\ M_P(s) & -\hat{X}_P(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & Q_P(s) \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

wobei

$$Q_P(s) := X_P(s)\hat{Y}_P(s) - Y_P(s)\hat{X}_P(s).$$

Q_P wird i.a. nicht verschwinden. In diesem Fall multiplizieren wir Gl. (2.21) (von rechts) mit der Inversen ihrer rechten Seite, erhalten

$$\begin{bmatrix} X_P & Y_P \\ \widetilde{M}_P & -\widetilde{N}_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_P & -N_P Q_P + \hat{Y}_P \\ M_P & -M_P Q_P - \hat{X}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

und definieren

$$\widetilde{Y}_P := -N_P Q_P + \hat{Y}_P$$

$$\widetilde{X}_P := M_P Q_P + \hat{X}_P.$$

□

Mit Hilfe von Satz 2.2 bzw. 2.4 läßt sich entscheiden, ob zwei Polynommatrizen geeigneter Dimension eine koprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung bilden. Ist die resultierende Übertragungsmatrix aber auch proper oder gar streng proper? Bei Eingrößensystemen läßt sich diese Frage leicht beantworten: Eine Übertragungsfunktion besitzt genau dann die Eigenschaft „streng proper“ („proper“), wenn der Nennergrad größer (nicht kleiner) als der zugehörige Zählergrad ist. Für spalten- bzw. zeilenreduzierte Nennermatrizen läßt sich im Mehrgrößenfall ein ähnlich einfacher Zusammenhang angeben:

Satz 2.5 (Wann ist $G(s) = N_P(s)M_P^{-1}(s)$ (streng) proper?) _____
 $M_P(s)$ sei nichtsingulär und spaltenreduziert. Die Übertragungsmatrix $G(s) = N_P(s)M_P^{-1}(s)$ besitzt genau dann die Eigenschaft „streng proper“ („proper“), wenn jeder Spaltengrad der Nennermatrix $M_P(s)$ größer (nicht kleiner) als der zugehörige Spaltengrad der Zählermatrix $N_P(s)$ ist.

Eine analoge Aussage gilt für linke Polynom-Matrizenbruchdarstellungen mit zeilenreduzierten Nennermatrizen. _____

Beweis: z.B. [47].

Anmerkung: Treffen die genannten Voraussetzungen nicht zu, so sind die „Gradbedingungen“ für Zähler- und Nennermatrix lediglich notwendig, nicht aber hinreichend.

Nehmen wir an, es liege eine rechtskopprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung $N_P(s)M_P^{-1}(s)$ einer Übertragungsmatrix $G(s)$ vor, die Nennermatrix sei aber nicht spaltenreduziert. Wir wissen, daß wir Zähler- und Nennermatrix von rechts mit einer beliebigen unimodularen Matrix $U_P(s)$ multiplizieren können, ohne die Teilerfremdheit zu zerstören. Können wir $U_P(s)$ nun so wählen, daß $M'_P(s) := M_P(s)U_P(s)$ spaltenreduziert ist? Dies läßt sich tatsächlich leicht erreichen: Durch elementare Spaltenoperationen (d.h. durch Rechtsmultiplikation mittels einer unimodularen Matrix) kann jede Polynommatrix in spaltenreduzierte Form überführt werden. Das folgende Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise:

Beispiel:

$$\begin{aligned} M_P(s) &= \begin{bmatrix} s^2 + 3s & s + 1 \\ 2s^2 + 1 & 2s \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_{M_{hs}} \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{L_P(s)} \end{aligned}$$

ist nicht spaltenreduziert, da die beiden Spalten der Matrix M_{hs} übereinstimmen. Dem können wir abhelfen, indem wir die zweite Spalte von $M_P(s)$ mit $(-s)$ multiplizieren und zur ersten Spalte addieren. Durch Multiplikation von rechts mit der unimodularen Matrix

$$U_P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} M'_P(s) &= M_P(s)U_P(s) \\ &= \begin{bmatrix} 2s & s+1 \\ 1 & 2s \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{M'_{hs}} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{L'_P(s)}. \end{aligned}$$

Da $\det\{M'_{hs}\} \neq 0$, ist $M'_P(s)$ spaltenreduziert.

Durch eine rechtskopprime Matrizenbruchdarstellung $\{N_P(s), M_P(s)\}$ wird ein internes Modell mit Ein-/Ausgangsverhalten $G(s) = N_P(s)M_P^{-1}(s)$ beschrieben: Über

$$y(s) = N_P(s) \underbrace{M_P^{-1}(s)u(s)}_{:=\xi(s)}$$

können wir uns nämlich eine (vektorielle) innere Variable ξ definiert denken (vgl. Bild 2.5). Eine Änderung der Polynom-Matrizenbruchdarstellung

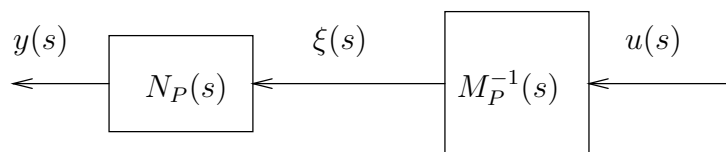


Bild 2.5: Rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung.

durch Rechtsmultiplikation von Zähler- und Nennerterm mittels eines unimodularen $U_P(s)$ bewirkt eine Transformation der inneren Variable ξ , läßt das Ein-/Ausgangsverhalten (die Übertragungsmatrix) des Systems aber natürlich unberührt:

$$y = [N_P U_P] \underbrace{[M_P U_P]^{-1} u}_{:=\xi' = U_P^{-1} \xi}.$$

Was geschieht, wenn wir statt mit einer unimodularen mit einer „gewöhnlichen“ nichtsingulären Matrix R_P erweitern? Offensichtlich vergrößern wir die Komplexität des Modells ohne seine Übertragungsmatrix zu verändern: Anschaulich gesprochen geht ein „Teil“ der in der neuen „internen“ Variablen $\xi'' := R_P \xi$ enthaltenen Information nicht in das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems ein. Dieses Thema werden wir in Abschnitt 3.2 genauer besprechen.

Anmerkung: Analoge Aussagen gelten für linkskopprime Matrizenbruchdarstellungen .

2.2.3 Zustandsmodelle und Minimalrealisierungen

Zustandsmodelle geben wir üblicherweise im Zeitbereich an; sie bestehen aus zwei zusammenwirkenden (vektoriellen) Gleichungen: der *Zustandsdifferential-* und der *Ausgangsgleichung*; im linearen zeitinvarianten Fall besitzen sie folgendes Aussehen:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.22)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (2.23)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ wird *Zustandsvariable* genannt, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ und $y(t) \in \mathbb{R}^p$ stellen wiederum die Ein- und Ausgangsgrößen des betrachteten Systems dar. *Dynamikmatrix* A , *Eingangsmatrix* B , *Ausgangsmatrix* C und *Durchgriffsmatrix* D besitzen passende Dimension. n wird als *Ordnung* des Zustandsmodells (2.22)-(2.23) bezeichnet. Eine Zustandsdarstellung vermittelt offenbar nicht nur einen Zusammenhang zwischen den System-Ein- und Ausgangsgrößen, sondern ermöglicht darüberhinaus eine Aussage über Vorgänge im Systeminneren – die zeitliche Entwicklung des Zustands x . Ein Zustandsmodell bildet demzufolge eine innere Systembeschreibung. (vgl. Kap. 1).

Oft erweist es sich als sinnvoll, den Zustandsvektor x in einem anderen Koordinatensystem darzustellen. Dies erreicht man durch Einführen einer *Ähnlichkeitstransformation*

$$x := Tx'. \quad (2.24)$$

T ist eine nichtsinguläre reelle $n \times n$ -Matrix; x' beschreibt den Zustand im neuen Koordinatensystem.

Beispiel: Der Zustand im „alten“ Koordinatensystem laute:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

In einem neuen, über die Ähnlichkeitstransformation

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

definierten Koordinatensystem erhält man für diesen Zustand (vgl. Bild 2.6):

$$x' = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

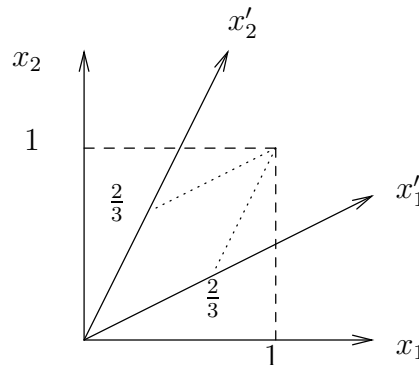


Bild 2.6: Zustand im alten und neuen Koordinatensystem.

Durch Einsetzen von (2.24) in (2.22) und (2.23) erhält man Zustandsdifferential- und Ausgangsgleichung im neuen Koordinatensystem:

$$\frac{d}{dt}x'(t) = \underbrace{T^{-1}AT}_{:=A'}x'(t) + \underbrace{T^{-1}B}_{:=B'}u(t), \quad x'_0 = T^{-1}x_0, \quad (2.26)$$

$$y(t) = \underbrace{CT}_{:=C'}x'(t) + Du(t). \quad (2.27)$$

Nun liegt die Frage nahe, ob für eine gegebene Zustandsdifferentialgleichung (2.22) eine Transformationsmatrix T existiert, so daß A' und B' für eine ganze Zahl r , $0 \leq r < n$ folgende Form besitzen:

$$A' = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix}}_r \right]_{n-r} \quad B' = \left[\underbrace{\begin{bmatrix} B'_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_q \right]_{n-r}. \quad (2.28)$$

In diesem Fall zerfällt die Zustandsdifferentialgleichung (2.26) in zwei Teile:

$$\frac{d}{dt}x'_1(t) = A'_{11}x'_1(t) + A'_{12}x'_2(t) + B'_1u(t), \quad x'_1(0) = x'_{1_0},$$

$$\frac{d}{dt}x'_2(t) = A'_{22}x'_2(t), \quad x'_2(0) = x'_{2_0}.$$

Die letzten $n - r$ Elemente von x' können offenbar nicht über die Stellgröße u beeinflußt werden. Ihre zeitliche Entwicklung wird ausschließlich von Anfangsbedingungen und Eigendynamik in Teilsystem 2 – der Matrix A'_{22} – bestimmt. Der Zustand des Gesamtsystems kann deshalb – unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem – nicht von einer willkürlich vorgegebenen Anfangsbedingung in einen beliebigen Punkt des Zustandsraumes \mathbb{R}^n „gesteuert“ werden. Die Zustandsdifferentialgleichung (bzw. das Matrizenpaar (A, B)) heißt demzufolge *nicht steuerbar*.

Beispiel: Die Dynamik- und Eingangsmatrix eines Zustandsmodells lauten:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Nach Anwendung der Transformation (2.25) ergibt sich:

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Befindet sich der Anfangszustand auf der x'_1 -Achse (i.e. $x'_{20} = 0$), so bleibt der Zustandsvektor für alle Zeit an diese Achse gefesselt (vgl. Bild 2.6); er kann nur auf dieser Geraden „hin- und herbewegt“ werden.

Existiert *keine* solche Ähnlichkeitstransformation, so wird (A, B) als *steuerbar* bezeichnet. Steuerbarkeit einer Zustandsdifferentialgleichung kann anhand des folgenden (notwendigen und hinreichenden) Kriteriums überprüft werden:

Satz 2.6 (Steuerbarkeits-Test) _____

Das Paar (A, B) ist genau dann steuerbar, wenn

$$\text{Rang} \underbrace{[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]}_{:=\mathcal{C}(A,B)} = n.$$

$\mathcal{C}(A, B)$ heißt Steuerbarkeitsmatrix. Ist ihr Rang $r < n$, so existiert eine Transformationsmatrix T , so daß $A' = T^{-1}AT$ und $B' = T^{-1}B$ die Form (2.28) besitzen und (A'_{11}, B'_1) steuerbar ist. _____

Beweis: z.B. [47]

Anmerkung: Eine geeignete Transformationsmatrix T findet man folgendermaßen: Als erste r Spalten von T wähle man r linear unabhängige Spalten der Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{C}(A, B)$. Die restlichen $n - r$ Spalten wähle man so, daß T nichtsingulär wird. Eine numerisch stabile Möglichkeit zur Berechnung eines geeigneten T bietet der sogenannte *Staircase-Algorithmus* [13].

Ganz analog können wir untersuchen, ob sich eine Transformationsmatrix T finden läßt, die die Dynamik- und die Ausgangsmatrix eines Zustandsmodells auf folgende Form bringt:

$$A' = \left[\begin{array}{cc|c} A'_{11} & 0 & \\ \hline A'_{21} & A'_{22} & \end{array} \right] \begin{array}{l} \} r \\ \} n - r \end{array}, \quad C' = \left[\begin{array}{cc|c} C_1 & 0 & \end{array} \right] p. \quad (2.29)$$

In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x'_1(t) &= A'_{11} x'_1(t) + B'_1 u(t), \quad x'_1(0) = x'_{1_0}, \\ \frac{d}{dt} x'_2(t) &= A'_{21} x'_1(t) + A'_{22} x'_2(t) + B'_2 u(t), \quad x'_2(0) = x'_{2_0}, \\ y(t) &= C'_1 x'_1(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Die letzten $n - r$ Elemente des Vektors x' gehen nicht in die Ausgangsvariable y ein; da sie sich auch nicht auf x'_1 auswirken, enthält y keinerlei Information über diese Komponenten des Zustands; der Zustand kann sich also in einem $n - r$ -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^n bewegen, ohne daß sich die Ausgangsvariable verändert. Das Zustandsmodell (2.22), (2.23) (bzw. das Matrizenpaar (C, A)) heißt in diesem Fall *nicht beobachtbar*. Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

Beispiel: Die Ausgangs- und Dynamikmatrix eines Zustandsmodells lauten:

$$C = \left[\begin{array}{cc} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right]; \quad A = \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{array} \right].$$

Nach Anwendung der Transformation (2.25) erhält man:

$$C' = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right]; \quad A' = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{array} \right].$$

Eine beliebige Bewegung des Zustands in Richtung der x'_2 -Achse (vgl. Bild 2.6) wirkt sich nicht auf die Ausgangsgröße y aus.

Existiert *keine* derartige Transformationsmatrix T , so heißt das Zustandsmodell (2.22), (2.23) *beobachtbar*. Auch diese Eigenschaft kann leicht mittels einer einfachen Rang-Untersuchung überprüft werden:

Satz 2.7 (Beobachtbarkeits-Test) _____

Das Paar (C, A) ist genau dann beobachtbar, wenn

$$\text{Rang} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{:=\mathcal{O}(C,A)} = n.$$

$\mathcal{O}(C, A)$ heißt Beobachtbarkeitsmatrix. Ist ihr Rang $r < n$, so existiert eine Transformationsmatrix T , so daß $A' = T^{-1}AT$ und $C' = CT$ die Form (2.29) besitzen und (C'_1, A'_{11}) beobachtbar ist. _____

Beweis: z.B. [47]

Anmerkung: Eine geeignete Transformationsmatrix T findet man folgendermaßen: Als erste r Zeilen von T^{-1} wähle man r linear unabhängige Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(C, A)$. Die restlichen $n - r$ Zeilen wähle man so, daß T^{-1} nichtsingulär wird. Eine numerisch stabile Möglichkeit zur Berechnung eines geeigneten T^{-1} stellt wiederum der Staircase-Algorithmus [13] dar.

Anmerkung: Mittels Satz 2.6 und 2.7 läßt sich zunächst nur feststellen, *ob* ein Zustandsmodell steuerbar bzw. beobachtbar ist und *welche Dimension* die eventuell vorhandenen nicht steuer- bzw. beobachtbaren Teilsysteme besitzen. Um anzugeben, *welcher Teil* eines Systems nicht steuerbar bzw. nicht beobachtbar ist (welche Eigenbewegungen also nicht angeregt bzw. nicht beobachtet werden können), müssen wir uns geeignete Transformationsmatrizen T beschaffen. In Abschnitt 3.2 werden wir alternative Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeits-Kriterien (die sogenannten PBH-Tests) besprechen, mit denen sich *direkt* auf Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit einzelner Moden schließen läßt.

Sowohl die Zustandsdifferential- als auch die Ausgangsgleichung können wir ohne Schwierigkeiten in den Frequenz- (Laplace-) Bereich transformieren, wo die Beziehung zwischen Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsvariable durch Polynommatrizen angegeben wird; wir können Zustandsmodelle also der Klasse

der polynomialen Modelle zuordnen. Verschwindet die Anfangsbedingung x_0 , so ergibt sich:

$$(sI_n - A)x(s) = Bu(s) \quad (2.30)$$

$$y(s) = Cx(s) + Du(s). \quad (2.31)$$

Zustandsmodelle spielen für den Reglerentwurf im Frequenzbereich in zweifacher Hinsicht eine wichtige Rolle:

- Die Beschreibung der Regelstrecke kann durch physikalische Modellbildung erfolgt sein; das „Original-Streckenmodell“ wird dann in aller Regel in Zustandsform vorliegen. In diesem Fall müssen wir in der Lage sein, einen Zusammenhang zwischen (2.22)-(2.23) bzw. (2.30)-(2.31) und der „zentralen“ Frequenzbereichs-Darstellung, der Übertragungsmatrix, herzustellen. Formal gesehen ist dies sehr einfach: Elimination des Zustandsvektors x aus (2.30)-(2.31) führt auf die gesuchte algebraische Beziehung zwischen $u(s)$ und $y(s)$:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D. \quad (2.32)$$

Da die Übertragungsmatrix nur das Ein-/Ausgangsverhalten eines Systems wiedergibt, hängt sie natürlich nicht vom Koordinatensystem ab, in dem wir den Zustand darstellen; $G(s)$ ist invariant bezüglich Ähnlichkeitstransformationen (2.24):

$$\underbrace{CT}_{C'}(sI_n - \underbrace{T^{-1}AT}_{A'})^{-1} \underbrace{T^{-1}B}_{B'} + D = C(sI_n - A)^{-1}B + D.$$

Weiterhin ist leicht zu sehen, daß nicht steuerbare bzw. nicht beobachtbare Modell-Anteile nicht in die Übertragungsmatrix eingehen: Für ein nicht steuerbares System ergibt sich z.B.:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} C'_1 & C'_2 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B'_1 \\ 0 \end{bmatrix} + D \\ &= C'_1(sI_r - A'_{11})^{-1}B'_1 + D. \end{aligned}$$

Im allgemeinen wird sich also nur ein Teil der in der Zustandsdarstellung (2.22)-(2.23) enthaltenen Information in der Übertragungsmatrix wiederfinden.

- Auch dem umgekehrten Schritt (von der Übertragungsmatrix zu einer Zustandsdarstellung) kommt große Bedeutung zu: Zustandsmodelle eines gegebenen Übertragungsverhaltens stellen ein leicht zu handhabendes Werkzeug zur numerisch zuverlässigen Behandlung verschiedener

Systemoperationen dar. Dies erklärt das scheinbare Paradoxon, daß Zustandsdarstellungen in der Theorie moderner Frequenzbereichsverfahren immer wichtiger werden. Die H_∞ -Regelungstheorie (eines der wichtigsten Entwurfsverfahren für lineare zeitinvariante Regler) basiert z.B. auf einer Formulierung der Entwurfsziele im Frequenzbereich; die numerische Lösung erfolgt aber zumeist im Zustandsraum. Wir verwenden die weithin übliche Schreibweise

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (2.33)$$

um darzustellen, daß die (reellen) Matrizen A , B , C und D Gleichung (2.32) erfüllen. Man sagt, das Matrizenquadrupel (A, B, C, D) *realisiert* die Übertragungsmatrix $G(s)$, da sich eine Zustandsdarstellung direkt in die Realität umsetzen läßt – physikalisch (durch eine Analogrechenschaltung) oder numerisch (durch Anwendung von Standard-Integrationsroutinen). Wollen wir also einen komplexen Mehrgrößenregler mit gegebener Übertragungsmatrix im Regelkreis implementieren, so werden wir ihn i.a. in eine Zustandsdarstellung überführen, ihn realisieren müssen.

Die Realisierung eines vorgegebenen Übertragungsverhaltens ist natürlich nicht eindeutig: Wir haben bereits festgestellt, daß Ähnlichkeitstransformationen (2.24) zwar Dynamik-, Eingangs-, und Ausgangsmatrix, nicht aber das Ein-/Ausgangsverhalten eines Zustandsmodells verändern. Stellt also (A, B, C, D) eine Realisierung der Übertragungsmatrix $G(s)$ dar, so gilt dies auch für $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$:

$$\begin{aligned} G(s) &\cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \\ &\cong \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Auch die Ordnung einer Realisierung liegt nicht fest: Kennen wir ein Zustandsmodell einer Übertragungsmatrix, so können wir ihm ein nicht steuerbares und/oder nicht beobachtbares Teilsystem „anfügen“, ohne das Ein-/Ausgangsverhalten und damit die Übertragungsmatrix zu verändern. Im Regelfall werden wir allerdings *Zustandsdarstellungen minimaler Ordnung*, sogenannte *Minimalrealisierungen* anstreben. Aus dem bisher Gesagten folgt unmittelbar, daß jede Minimalrealisierung einer Übertragungsmatrix sowohl steuerbar als auch beobachtbar ist – einen nicht steuerbaren und/oder nicht beobachtbaren Systemanteil können wir entfernen (und damit die Ordnung der Zustandsdarstellung verringern), ohne die zugehörige Übertragungsmatrix zu verändern.

Gl. (2.32) entnehmen wir, daß eine (Minimal-)Realisierung nur für Übertragungsmatrizen mit der Eigenschaft „proper“ existiert. Die Begriffe „proper“ und „realisierbar“ werden deshalb synonym gebraucht. Aus (2.32) folgt weiterhin, daß eine realisierbare Übertragungsmatrix genau dann „streng proper“ ist, wenn die Durchgriffsmatrix D ihrer Realisierungen verschwindet.

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Minimalrealisierung einer gegebenen Übertragungsmatrix zu berechnen. Wir könnten uns z.B. zuerst eine links- oder rechts-kopprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung mit zeilen- oder spaltenreduziertem Nenner beschaffen; aus Zähler- und Nennermatrix lassen sich dann direkt die Parameter einer Minimalrealisierung bestimmen. Numerisch ist es aber i.a. geschickter, mit möglichst geringem Aufwand zu *irgendeiner* (nicht notwendigerweise minimalen) Zustandsdarstellung überzugehen und anschließend mittels Zustandsraummethoden nicht steuerbare und/oder nicht beobachtbare Systemanteile zu eliminieren. Genau dies sieht die im folgenden behandelte Vorgehensweise vor:

2.2.3.1 Berechnung einer Minimalrealisierung

Um die Darstellung zu vereinfachen, spalten wir zunächst die Durchgriffsmatrix $D = G(s = \infty)$ ab: Die Übertragungsmatrix

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &:= G - G(s = \infty) \\ &= \begin{bmatrix} g_1(s) & \dots & g_q(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{n_{P1}(s)}{m_{P1}(s)} & \dots & \frac{n_{Pq}(s)}{m_{Pq}(s)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ist dann streng proper; $g_i(s)$ bezeichnet die i -te Spalte von $\tilde{G}(s)$, $m_{Pi}(s)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nennerpolynome aller Elemente dieser Spalte. $m_{Pi}(s)$, $i = 1, \dots, q$, ist also ein skalares Polynom, $n_{Pi}(s)$ ein Polynomvektor mit p Elementen:

$$\begin{aligned}m_{Pi}(s) &= s^{n_i} + m_{Pi}^{n_i-1} s^{n_i-1} + \dots + m_{Pi}^0, \\ n_{Pi}(s) &= \begin{bmatrix} n_{P1i}^{n_i-1} s^{n_i-1} + \dots + n_{P1i}^0 \\ \vdots \\ n_{Ppi}^{n_i-1} s^{n_i-1} + \dots + n_{Ppi}^0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Die Superskripte der Koeffizienten stellen natürlich Indizes, nicht Potenzen, dar. Die i -te Spalte der Übertragungsmatrix gibt einen Zusammenhang zwischen der i -ten Eingangsgröße u_i und dem Ausgangsvektor y an; für $u_j = 0$,

$j \neq i$, erhält man:

$$y = n_{P_i}(s) \underbrace{\frac{1}{m_{P_i}(s)}}_{:=\xi_i} u_i. \quad (2.34)$$

Man beachte, daß $\{n_{P_i}, m_{P_i}\}$ eine rechtskopprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung der Spalte $g_i(s)$ bildet. Für den Zusammenhang zwischen u_i und der neu eingeführten internen Variablen ξ_i läßt sich sofort eine Realisierung angeben: Wir müssen lediglich die Beziehung

$$m_{P_i}(s)\xi_i = u_i$$

nach der höchsten Potenz von s auflösen und in den Zeitbereich zurücktransformieren:

$$\begin{aligned} s^{n_i}\xi_i &= -m_{P_i}^{n_i-1}s^{n_i-1}\xi_i - \dots - m_{P_i}^0\xi_i + u_i \\ \xi_i^{(n_i)} &= -m_{P_i}^{n_i-1}\xi_i^{(n_i-1)} - \dots - m_{P_i}^0\xi_i + u_i. \end{aligned} \quad (2.35)$$

$\xi_i^{(n_i)}$ steht hierbei für die n_i -te zeitliche Ableitung der Größe $\xi(t)$. Gleichung (2.35) kann man offenbar als Kette von Integratoren darstellen (vgl. Bild 2.7). Nun bleibt nur noch, geeignete Zustandsvariable einzuführen, z.B. über

$$\begin{aligned} x_{i1} &:= \xi_i \\ x_{i2} &:= \xi_i^{(1)} \\ &\vdots \\ x_{in_i} &:= \xi_i^{(n_i-1)}. \end{aligned}$$

Aus Bild 2.7 kann man dann sofort die zugehörige Zustandsdifferentialgleichung ablesen:

$$\dot{x}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -m_{P_i}^0 & -m_{P_i}^1 & & \dots & -m_{P_i}^{n_i-1} \end{bmatrix}}_{:=A_i} x_i + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{:=b_i} u_i.$$

Die Verbindung zum Ausgangsvektor ist leicht herzustellen: Im Zeitbereich lautet (2.34):

$$y = \begin{bmatrix} n_{P_{1i}}^{n_i-1}\xi_i^{(n_i-1)} + \dots + n_{P_{1i}}^0\xi_i \\ \vdots \\ n_{P_{pi}}^{n_i-1}\xi_i^{(n_i-1)} + \dots + n_{P_{pi}}^0\xi_i \end{bmatrix}$$

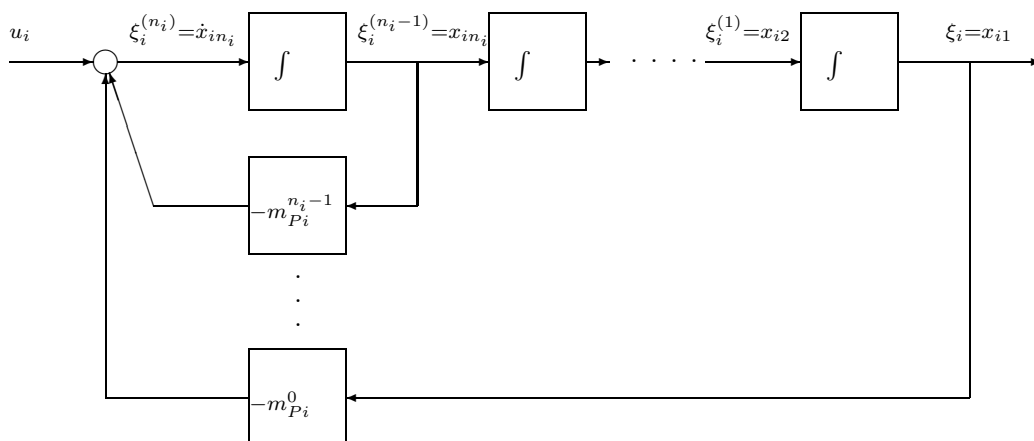


Bild 2.7: Realisierung für $m_{P_i}(s)\xi_i = u_i$.

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} n_{P_{1i}}^0 & \dots & n_{P_{1i}}^{n_i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{P_{pi}}^0 & \dots & n_{P_{pi}}^{n_i-1} \end{bmatrix}}_{:=C_i} x_i.$$

Es ergibt sich also:

$$g_i(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A_i & b_i \\ \hline C_i & 0 \end{array} \right].$$

Nun müssen wir noch die Zustandsdarstellungen der Spalten $g_i(s)$ „aneinanderreihen“. Hierzu verwenden wir die Rechenregel auf Seite 73:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(s) &= \left[g_1(s) \quad \dots \quad g_q(s) \right] \\ &\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & \dots & 0 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_q & 0 & \dots & b_q \\ \hline C_1 & \dots & C_q & & & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} G(s) &= \tilde{G}(s) + D \\ &\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & \dots & 0 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_q & 0 & \dots & b_q \\ \hline C_1 & \dots & C_q & & & D \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, ist diese Realisierung immer steuerbar; sie braucht aber nicht beobachtbar zu sein. Im nächsten Schritt muß man also durch Berechnen einer geeigneten Transformationsmatrix (z.B. durch Anwendung des Staircase-Algorithmus) den nicht beobachtbaren Systemanteil isolieren und eliminieren.

2.2.3.2 Rechenregeln für Zustandsdarstellungen

Wie bereits angedeutet, lassen sich viele Systemoperationen bequem mittels Zustandsdarstellungen durchführen. Im Moment begnügen wir uns mit einigen einfachen „Rechenregeln“ für Realisierungen

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right];$$

komplexere Operationen werden wir „bei Bedarf“ einführen.

Transponieren:

$$G^T(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right] \quad (2.36)$$

Konjugiert Transponieren: ⁵

$$G^T(-s) \cong \left[\begin{array}{c|c} -A^T & C^T \\ \hline -B^T & D^T \end{array} \right] \quad (2.37)$$

Negieren:

$$-G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -C & -D \end{array} \right] \quad (2.38)$$

⁵Zur Erklärung der Bezeichnung betrachte man die entsprechende Beziehung für rein imaginäre Argumente:

$$\begin{aligned} G^T(-j\omega) = G^T(j\bar{\omega}) &= \begin{bmatrix} g_{11}(j\bar{\omega}) & \dots & g_{p1}(j\bar{\omega}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1q}(j\bar{\omega}) & \dots & g_{pq}(j\bar{\omega}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{g}_{11}(j\omega) & \dots & \bar{g}_{p1}(j\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{g}_{1q}(j\omega) & \dots & \bar{g}_{pq}(j\omega) \end{bmatrix} = (G(j\omega))^*. \end{aligned}$$

Invertieren: $G(s)$ sei eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix mit $p \leq q$ ($p \geq q$), die Durchgriffsmatrix D besitze vollen Zeilen- (Spalten-)Rang. Die Rechts- (Links-)Inverse von $G(s)$ kann dann mit Hilfe der Rechts- (Links-)Inversen D^\dagger von D dargestellt werden als:

$$G^\dagger(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A - BD^\dagger C & & -BD^\dagger \\ \hline & D^\dagger C & D^\dagger \end{array} \right]. \quad (2.39)$$

Addition:

$$G_1(s) + G_2(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right] \quad (2.40)$$

Multiplikation:

$$G_1(s)G_2(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array} \right] \quad (2.41)$$

„Stapeln“:

$$\begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix} \cong \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \end{array} \right] \quad (2.42)$$

„Aneinanderreihen“:

$$(G_1(s) \ G_2(s)) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 & D_2 \end{array} \right] \quad (2.43)$$

2.2.4 System-Matrix und Rosenbrock-System-Matrix

Die System-Matrix stellt ein sehr allgemeines polynomiales Modell dar. Sowohl linke und rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen als auch Zustandsmodelle können als Spezialfälle interpretiert werden. Weiterhin läßt sich jedes lineare zeitinvariante System gewöhnlicher Differentialgleichungen direkt in Form einer System-Matrix schreiben. Wir betrachten zunächst ein einfaches Beispiel:

Beispiel:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2 &= -\xi_1 \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_2 + u \\ y_1 &= \xi_1 + \dot{\xi}_2 \\ y_2 &= \xi_2 \end{aligned}$$

ξ_1, ξ_2 sind *interne Variable*, y_1, y_2 die Ausgangsgrößen, u die Eingangsgröße. Wir nehmen an, daß sämtliche Anfangsbedingungen unseres Beispiels verschwinden. Nach Laplace-Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned}(s+1)\xi_1 + s^2\xi_2 &= 0 \\ (s+1)\xi_2 &= u \\ y_1 &= \xi_1 + s\xi_2 \\ y_2 &= \xi_2,\end{aligned}$$

oder – in Matrizen-Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s+1 & s^2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}}_{:=\alpha_P(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}}_{:=\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{:=\beta_P(s)} u \quad (2.44)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{:=y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{:=\gamma_P(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}}_{\xi} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{:=\delta_P(s)} u. \quad (2.45)$$

(2.44) und (2.45) können wir noch kompakter zusammenfassen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_P(s) & \beta_P(s) \\ -\gamma_P(s) & \delta_P(s) \end{bmatrix}}_{:=P_P(s)} \begin{bmatrix} \xi \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

$P_P(s)$ wird als *System-Matrix* bezeichnet. Sie beinhaltet – bis auf die Anfangsbedingungen – die *gesamte System-Information*. Die Dimensionen der Polynommatrizen $\alpha_P(s)$, $\beta_P(s)$, $\gamma_P(s)$, $\delta_P(s)$ und $P_P(s)$ werden durch die Zahl der Ein- und Ausgangsgrößen und der internen Variablen bestimmt.

Es ist leicht zu sehen, daß wir die zu einer gegebenen System-Matrix gehörige Übertragungsmatrix aus

$$G(s) = \gamma_P(s)\alpha_P^{-1}(s)\beta_P(s) + \delta_P(s)$$

berechnen können – wir müssen nur den Vektor der internen Variablen aus (2.44) und (2.45) eliminieren.

Nun liegt es nahe, zu fragen, unter welchen Bedingungen wir zwei durch verschiedene System-Matrizen beschriebene Modelle als äquivalent ansehen wollen. Ein geeigneter Äquivalenzbegriff läßt sich leichter definieren, wenn wir eine kleine Modifikation der System-Matrix vornehmen: Wir erweitern die $m \times m$ -Matrix $\alpha_P(s)$, so daß die Zahl der Zeilen- und Spalten mit dem Grad n des Polynoms $\det\{\alpha_P(s)\}$ übereinstimmt und nennen das Resultat α_{PR} :

$$\alpha_{PR}(s) := \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & \alpha_P(s) \end{bmatrix}.$$

n können wir – wie in den nächsten Abschnitten klar werden wird – als *Maß der Komplexität* des betrachteten Systems interpretieren. Die erweiterte System-Matrix

$$P_{PR}(s) := \begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \\ -\gamma_{PR}(s) & \delta_{PR}(s) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$:= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & \alpha_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_P(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_P(s) \end{bmatrix} & \delta_P(s) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

wird oft als *Rosenbrock-System-Matrix* bezeichnet (deswegen der Index „R“). Wir werden im folgenden ausschließlich mit solchen Rosenbrock-System-Matrizen arbeiten, der Einfachheit halber aber oft weiterhin von „System-Matrizen“ sprechen.

Bevor wir uns der Frage der Äquivalenz verschiedener System-Matrizen zuwenden, wollen wir uns damit beschäftigen, wie Zustandsmodelle, linke und rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen in Form solcher System-Matrizen geschrieben werden können.

Rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung : Wir definieren den Vektor der internen Variablen ξ über

$$y = N_P \underbrace{M_P^{-1}u}_{:=\xi}$$

und erhalten hieraus:

$$\begin{aligned} M_P \xi &= u, \\ y &= N_P \xi. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (2.44) und (2.45) können wir unmittelbar ablesen, daß $\alpha_P = M_P$, $\beta_P = I_q$, $\gamma_P = N_P$ und $\delta_P = 0$. System-Matrix und

Rosenbrock-System-Matrix lauten also

$$\begin{aligned}
 P_P &= \begin{bmatrix} M_P & I_q \\ -N_P & 0 \end{bmatrix}, \\
 P_{PR} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & M_P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -N_P \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung : In diesem Fall definieren wir die vektorielle innere Variable als:

$$\begin{aligned}
 y &= \widetilde{M}_P^{-1} \widetilde{N}_P u \\
 &:= \xi.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 \widetilde{M}_P \xi &= \widetilde{N}_P u, \\
 y &= \xi.
 \end{aligned}$$

Für System-Matrix und Rosenbrock-System-Matrix ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 P_P &= \begin{bmatrix} \widetilde{M}_P & \widetilde{N}_P \\ -I_p & 0 \end{bmatrix}, \\
 P_{PR} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & \widetilde{M}_P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \widetilde{N}_P \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -I_p \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

Zustandsmodelle : Wir setzen Zustand x und innere Variable ξ gleich und erhalten demzufolge:

$$\begin{aligned}
 P_P &= \begin{bmatrix} (sI_n - A) & B \\ -C & D \end{bmatrix} \\
 &= P_{PR}. \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

In diesem Fall kann die Dimensionserweiterung der Matrix $\alpha_P(s)$ offenbar entfallen: Der Grad der Determinante von $\alpha_P(s) = (sI_n - A)$ stimmt bereits mit der Zahl der Zeilen und Spalten dieser Matrix überein.

Mit Hilfe der erweiterten System-Matrix läßt sich ein sinnvoller Äquivalenzbegriff wie folgt definieren [98]:

Definition 2.17 (System-Äquivalenz)

Zwei System-Matrizen P_{PR_1} , P_{PR_2} sind äquivalent (im Rosenbrockschen Sinne), wenn

- unimodulare Polynommatrizen U_P und V_P , sowie
- Polynommatrizen X_P und Y_P

existieren, so daß

$$\begin{bmatrix} U_P & 0 \\ X_P & I_p \end{bmatrix} P_{PR_1} \begin{bmatrix} V_P & Y_P \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = P_{PR_2}. \quad (2.52)$$

Anmerkung: Man beachte, daß die quadratischen Matrizen, die P_{PR_1} und P_{PR_2} in (2.52) verknüpfen, unimodular sind und deshalb der Anwendung elementarer Zeilen- und Spaltenoperationen auf P_{PR_1} entsprechen.

Man kann leicht zeigen, daß zwei äquivalente Systeme P_{PR_1} und P_{PR_2} folgende Eigenschaften teilen:

1. P_{PR_1} und P_{PR_2} besitzen identisches Ein-/Ausgangsverhalten:

$$\begin{aligned} & \gamma_{PR_2} \alpha_{PR_2}^{-1} \beta_{PR_2} + \delta_{PR_2} = \\ & = [(-X_P \alpha_{PR_1} + \gamma_{PR_1}) V_P] [U_P \alpha_{PR_1} V_P]^{-1} [U_P (\alpha_{PR_1} Y_P + \beta_{PR_1})] + \\ & \quad + [(X_P \alpha_{PR_1} - \gamma_{PR_1}) Y_P + X_P \beta_{PR_1} + \delta_{PR_1}] \\ & = (-X_P \alpha_{PR_1} + \gamma_{PR_1}) \alpha_{PR_1}^{-1} (\alpha_{PR_1} Y_P + \beta_{PR_1}) + \\ & \quad + (X_P \alpha_{PR_1} - \gamma_{PR_1}) Y_P + X_P \beta_{PR_1} + \delta_{PR_1} \\ & = \gamma_{PR_1} \alpha_{PR_1}^{-1} \beta_{PR_1} + \delta_{PR_1}. \end{aligned}$$

2. P_{PR_1} und P_{PR_2} weisen dieselbe „Komplexität“ auf:

$$\begin{aligned} \text{Grad } \{\det \alpha_{PR_2}(s)\} &= \text{Grad } \{\det \{U_P(s) \alpha_{PR_1}(s) V_P(s)\}\} \\ &= \text{Grad } \underbrace{\{\det U_P(s)\}}_{\text{const.}} \det \alpha_{PR_1}(s) \underbrace{\{\det V_P(s)\}}_{\text{const.}} \\ &= \text{Grad } \{\det \alpha_{PR_1}(s)\}. \end{aligned}$$

3. (a) P_{PR1} und P_{PR2} besitzen dieselbe Smith-Form: S_P sei die Smith-Form der System-Matrix P_{PR2} . Dann existieren zwei unimodulare Polynommatrizen U_{P2} und V_{P2} , so daß $U_{P2}P_{PR2}V_{P2} = S_P$. Durch Einsetzen von (2.52) erhält man hieraus

$$\underbrace{U_{P2} \begin{bmatrix} U_P & 0 \\ X_P & I_p \end{bmatrix}}_{:=U_{P1}} P_{PR1} \underbrace{\begin{bmatrix} V_P & Y_P \\ 0 & I_q \end{bmatrix} V_{P2}}_{:=V_{P1}} = S_P.$$

Als Produkte unimodularer Polynommatrizen sind U_{P1} und V_{P1} selbst unimodular; S_P ist somit die Smith-Form der System-Matrix P_{PR1} .

Mit derselben Argumentation läßt sich zeigen:

- (b) $\begin{bmatrix} \alpha_{PR1}(s) & \beta_{PR1}(s) \\ \gamma_{PR1}(s) & \delta_{PR1}(s) \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \alpha_{PR2}(s) & \beta_{PR2}(s) \\ \gamma_{PR2}(s) & \delta_{PR2}(s) \end{bmatrix}$ besitzen dieselbe Smith-Form,
(c) $\begin{bmatrix} \alpha_{PR1}(s) \\ -\gamma_{PR1}(s) \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \alpha_{PR2}(s) \\ -\gamma_{PR2}(s) \end{bmatrix}$ besitzen dieselbe Smith-Form,
(d) α_{PR1} und α_{PR2} besitzen dieselbe Smith-Form.

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, folgt aus 3. (a)-(d), daß sowohl die Pole zweier äquivalenter Systeme als auch ihre Nullstellen übereinstimmen. Darüberhinaus sind in beiden Systemen dieselben Pole nicht von außen wahrnehmbar (beobachtbar) und/oder nicht von außen anregbar (steuerbar): Sowohl die *interne Dynamik* beider Systeme als auch ihre Anbindung an die Außenwelt ist dieselbe.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß Modelle, die wir intuitiv als „äquivalent“ einstufen, tatsächlich von obiger Definition erfaßt werden:

Beispiel: Zwei sich nur durch eine Ähnlichkeitstransformation unterscheidende Zustandsmodelle

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad \text{und} \quad \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ \hline CT & D \end{array} \right]$$

sind äquivalent: für ihre System-Matrizen gilt:

$$\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI_n - A) & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (sI_n - T^{-1}AT) & T^{-1}B \\ -CT & D \end{bmatrix};$$

die nichtsinguläre reelle Transformationsmatrix T ist natürlich eine (spezielle) unimodulare Polynommatrix,⁶ Gleichung (2.52) also mit $U_P(s) = T^{-1}$, $V_P(s) = T$ und $X_P(s) = Y_P(s) = 0$ erfüllt.

⁶ $T, T^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathcal{RP}^{n \times n}$.

Beispiel: Zwei über eine unimodulare Matrix $\bar{V}_P(s)$ verknüpfte rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen

$$\{N_P(s), M_P(s)\} \quad \text{und} \quad \{N_P(s)\bar{V}_P(s), M_P(s)\bar{V}_P(s)\}$$

sind äquivalent: Ihre System-Matrizen genügen der Beziehung:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & M_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -N_P(s) \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & \bar{V}_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & I_q \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & M_P(s)\bar{V}_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -N_P(s)\bar{V}_P(s) \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

die Definitionsgleichung (2.52) ist mit $X_P(s) = Y_P(s) = 0$, $U_P(s) = I_n$ und

$$V_P(s) = \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & \bar{V}_P(s) \end{bmatrix}$$

erfüllt.

Beispiel: Zwei über eine unimodulare Matrix $\bar{U}_P(s)$ verknüpfte linke Polynom-Matrizenbruchdarstellungen

$$\{\tilde{N}_P(s), \tilde{M}_P(s)\} \quad \text{und} \quad \{\bar{U}_P(s)\tilde{N}_P(s), \bar{U}_P(s)\tilde{M}_P(s)\}$$

sind äquivalent: für ihre System-Matrizen gilt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & \bar{U}_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & \tilde{M}_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{N}_P(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -I_p \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & \bar{U}_P(s)\tilde{M}_P(s) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{U}_P(s)\tilde{N}_P(s) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -I_p \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Definitionsgleichung (2.52) ist mit $X_P(s) = 0$, $Y_P(s) = 0$, $V_P(s) = I_n$ und

$$U_P(s) = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & \bar{U}_P(s) \end{bmatrix}$$

erfüllt.

Definition 2.18 (Nicht reduzierbare System-Matrizen) _____

Eine (Rosenbrock-) System-Matrix $P_{PR}(s)$ heißt nicht reduzierbar, wenn die Polynommatrizen $\alpha_{PR}(s)$ und $\beta_{PR}(s)$ linkskoprim, die Matrizen $\alpha_{PR}(s)$ und $\gamma_{PR}(s)$ rechtskoprim sind. _____

Anmerkung: Definition 2.18 impliziert, daß in einer nicht reduzierbaren System-Matrix sämtliche ggLt von $\alpha_{PR}(s)$, $\beta_{PR}(s)$ und alle ggRt von $\alpha_{PR}(s)$, $\gamma_{PR}(s)$ unimodular sind. Bei der Bildung der Übertragungsmatrix

$$G(s) = \gamma_{PR}(s)\alpha_{PR}(s)^{-1}\beta_{PR}(s) + \delta_{PR}(s)$$

können deswegen nur unimodulare Polynommatrizen gekürzt werden, die gesamte in der System-Matrix enthaltene relevante Information bleibt erhalten.

Beispiel: Die zu einer rechts- bzw. linkskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung gehörenden System-Matrizen sind nicht reduzierbar.

Beispiel: Die System-Matrix einer Minimalrealisierung ist nicht reduzierbar; nichtminimale Zustandsmodelle besitzen reduzierbare System-Matrizen .

Satz 2.8 (Äquivalenz nicht reduzierbarer System-Matrizen) _____

Besitzen zwei nicht reduzierbare System-Matrizen dieselbe Übertragungsmatrix, so sind sie äquivalent. _____

Beweis: z.B. [47]

Alle koprimen Matrizenbruchdarstellungen und Minimalrealisierungen einer gegebenen Übertragungsmatrix sind demzufolge äquivalent im Sinne von Definition 2.17.

2.3 Verallgemeinerte Polynome – Faktorisierung in \mathcal{RH}_∞

Unter einem *verallgemeinerten Polynom* verstehen wir eine reell-rationale Funktion $n(s)$ (i.e. eine rationale Funktion in s mit reellen Koeffizienten), die in einem vorgegebenen Gebiet der komplexen Ebene keine Pole aufweisen darf.

Beispiel: Das „verbotene Gebiet“ sei $\overline{\mathbb{C}}^+ \cup \infty$. Kein Pol der Funktion $n(s)$ liegt somit auf oder rechts der imaginären Achse (das verallgemeinerte Polynom $n(s)$ ist eine asymptotisch stabile Übertragungsfunktion) oder im Unendlichen ($n(s)$ ist proper bzw. realisierbar).

Solche Funktionen werden „verallgemeinerte Polynome“ genannt, weil sie dieselben algebraischen Eigenschaften besitzen wie „gewöhnliche“ Polynome – genau wie diese bilden sie einen *Hauptidealring*. Mathematische Details solcher Hauptidealringe benötigen wir allerdings für die folgenden Ausführungen nicht. Für unsere Zwecke genügt es völlig, die Parallelen zwischen verallgemeinerten und „gewöhnlichen“ Polynomen zu akzeptieren. Darüberhinaus können wir uns auf die im obigen Beispiel eingeführte spezielle Menge verallgemeinerter Polynome beschränken – nur sie werden wir benötigen. Folgende Bezeichnung hat sich eingebürgert:

Definition 2.19 ($\mathcal{RH}_\infty, \mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$)

Die Menge aller asymptotisch stabilen realisierbaren Übertragungsfunktionen bezeichnet man mit \mathcal{RH}_∞ . Die Menge aller $p \times q$ -Matrizen mit Elementen $g_{ik}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ nennen wir $\mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$.

Beispiel: $\left[\begin{array}{cc} 1 & s \\ s+1 & s+2 \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty^{1 \times 2}$.

Anmerkung: Die Bezeichnung \mathcal{RH}_∞ erklärt sich folgendermaßen: Der *Hardy-Raum* H_∞ besteht aus allen komplexwertigen Funktionen einer komplexwertigen Variablen s , die für $s > 0$ analytisch und beschränkt sind (z.B. [26]). Alle reell-rationalen Funktionen dieses Raumes bilden eine Teilmenge, die man üblicherweise mit \mathcal{RH}_∞ bezeichnet. Diese stimmt – wie man leicht sieht – mit der Menge aller asymptotisch stabilen realisierbaren Übertragungsfunktionen überein.

Anmerkung: $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$, wenn $G(s)$ realisierbar ist, und alle Eigenwerte der Dynamikmatrix einer Minimalrealisierung links der imaginären Achse liegen. Die Eigenwerte sind invariant bezüglich einer Ähnlichkeitstransformation ($\{\lambda_i[A]\} = \{\lambda_i[T^{-1}AT]\}$) und stimmen mit den Übertragungspolen (s. Abschnitt 3.1) der Übertragungsmatrix $G(s)$ überein.

Alle Definitionen und Sätze, die wir für „gewöhnliche“ Polynome und Polynommatrizen diskutiert haben, können unmittelbar auf Elemente bzw. Matrizen mit Elementen aus \mathcal{RH}_∞ übertragen werden; wir müssen lediglich einige

im polynomialen Fall zentrale Begriffe (wie *reelle nichtverschwindende Konstanten* und *unimodulare Polynommatrizen*) dem neuen Sachverhalt „anpassen“:

Definition 2.20 (Einheit in \mathcal{RH}_∞)_____

Ein Element $u(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ heißt Einheit, wenn sein Inverses wiederum in \mathcal{RH}_∞ enthalten ist. Die Menge aller Einheiten nennen wir \mathcal{UH}_∞ . _____

Eine Einheit $u(s)$ in \mathcal{RH}_∞ ist also eine durch zwei Eigenschaften ausgezeichnete Übertragungsfunktion:

1. Zähler- und Nennergrad stimmen überein,
2. sämtliche Wurzeln des Zähler- und des Nennerpolynoms liegen links der imaginären Achse – im Sprachgebrauch der klassischen Regelungstechnik ist $u(s)$ eine asymptotisch stabile minimalphasige Übertragungsfunktion ohne Nullstellen auf der imaginären Achse.

Beispiel: $\frac{s+2}{s+1}$ ist eine Einheit in \mathcal{RH}_∞ , $\frac{s-2}{s+1}$ und $\frac{2}{s+1}$ dagegen nicht.

Anmerkung: Im „gewöhnlich“ polynomialen Fall spielen reelle nichtverschwindende Konstanten c die Rolle der Einheiten. Sie sind die einzigen Polynome, deren Inverse wiederum Polynome sind.

Nun betrachten wir den Matrizen-Fall:

Definition 2.21 (Unimodulare Matrizen in \mathcal{RH}_∞)_____

Eine (quadratische) Matrix $U(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times p}$ heißt unimodular, wenn sämtliche Elemente ihrer Inversen wiederum in \mathcal{RH}_∞ enthalten sind. Die Menge aller solcher Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{UH}_\infty^{p \times p}$. _____

Laut Definition ist eine Übertragungsmatrix $U(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times p}$ also genau dann unimodular, wenn die Matrix *und* ihre Inverse asymptotisch stabil und proper sind. Kennen wir eine Minimalrealisierung von $U(s)$,

$$U(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

so lassen sich diese Bedingungen folgendermaßen ausdrücken (vgl. die „Rechenregeln“ für Inversion eines Zustandsmodells auf S. 73):

1. die Durchgriffsmatrix D ist nichtsingulär,

2. alle Eigenwerte der Dynamikmatrix A liegen links der imaginären Achse,
3. alle Eigenwerte von $A - BD^{-1}C$ (der Dynamikmatrix der Inversen von $U(s)$) liegen links der imaginären Achse.

Anmerkung: Für „gewöhnliche“ Polynommatrizen definierten wir diesen Begriff ganz analog: Eine Matrix $U_P(s) \in \mathcal{RP}^{p \times p}$ wurde als unimodular (in \mathcal{RP}) bezeichnet, wenn ihre Inverse nur Elemente aus \mathcal{RP} enthielt.

Wie bereits erwähnt, können wir alle Definitionen und Sätze, die wir in Abschnitt 2.2.1 für Polynome und Polynommatrizen eingeführt haben, auf Matrizen mit Elementen in \mathcal{RH}_∞ übertragen – wir müssen lediglich reelle nichtverschwindende Konstanten durch Einheiten in \mathcal{RH}_∞ und unimodulare Polynommatrizen durch unimodulare Matrizen in \mathcal{RH}_∞ ersetzen: So nennen wir zwei Elemente $n(s)$ und $m(s)$ aus \mathcal{RH}_∞ koprim, wenn ihre ggT Einheiten sind; die Übertragungsmatrizen $N(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p_n \times q}$ und $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p_m \times q}$ ($p_n + p_m \geq q$) heißen rechtskoprim, wenn für ihre ggRt gilt: $R(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{q \times q}$. $N(s)$ und $M(s)$ sind genau dann rechtskoprim, wenn zwei Matrizen $X(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p_n}$ und $Y(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p_m}$ existieren, so daß

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} = I_q, \quad (2.53)$$

die aus N und M zusammengesetzte Matrix also eine asymptotisch stabile realisierbare Linksinverse besitzt. Zwei Matrizen (passender Dimension) \tilde{N} und \tilde{M} sind genau dann linkskoprim, wenn ihre ggLt unimodulare Matrizen in \mathcal{RH}_∞ sind bzw. wenn geeignete asymptotisch stabile \tilde{X} und \tilde{Y} existieren, so daß

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} = I_p. \quad (2.54)$$

Wie im Falle „gewöhnlicher“ Polynommatrizen bezeichnet man (2.53) und (2.54) als (einfache) Bezout-Identitäten.

Beispiel: Die Übertragungsfunktionen

$$\begin{aligned} n(s) &= \frac{s+1}{s+4} \quad \text{und} \\ m(s) &= \frac{(s-1)(s+1)}{(s+3)(s+4)} \end{aligned}$$

sind koprim in \mathcal{RH}_∞ , da

$$\frac{4(s+4)}{(s+1)(s+3)} n(s) + \frac{s+4}{s+1} m(s) = 1.$$

In Abschnitt 2.2.2 beschrieben wir Übertragungsmatrizen als Quotienten zweier Polynommatrizen. Ganz analog können wir jede gegebene $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ als Bruch zweier *verallgemeinerter* Polynommatrizen darstellen:

Definition 2.22 (Rechts- und linkskopprime Faktorisierungen in \mathcal{RH}_∞)_____

Ein Matrizenpaar $N(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$ und $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q}$ heißt *rechtskopprime Faktorisierung* einer Übertragungsmatrix $G(s)$, wenn

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) \quad (2.55)$$

$N(s), M(s) \dots$ rechtskoprim in \mathcal{RH}_∞ .

$\tilde{N}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$ und $\tilde{M}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times p}$ stellen eine *linkskopprime Faktorisierung* einer Übertragungsmatrix $G(s)$ dar, wenn

$$G(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.56)$$

$\tilde{N}(s), \tilde{M}(s) \dots$ linkskoprim in \mathcal{RH}_∞ .

In Abschnitt 2.2.2 haben wir festgestellt, daß Nenner- und Zählerterm einer links- bzw. rechtskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung nur bis auf Multiplikation mit einer unimodularen Polynommatrix bestimmt sind. Analoges gilt für kopprime Faktorisierungen in \mathcal{RH}_∞ – Zähler und Nenner können mit unimodularen Matrizen in \mathcal{RH}_∞ erweitert werden:

$$\begin{aligned} \{N(s), M(s)\} \text{ ist eine rechtskopprime Faktorisierung von } G(s) &\implies \{N(s)U(s), M(s)U(s)\} \text{ ist für alle unimodularen } U(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times q} \text{ eine rechtskopprime Faktorisierung von } G \\ \{\tilde{N}(s), \tilde{M}(s)\} \text{ ist eine linkskopprime Faktorisierung von } G(s) &\implies \{U(s)\tilde{N}(s), U(s)\tilde{M}(s)\} \text{ ist für alle unimodularen } U(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times p} \text{ eine linkskopprime Faktorisierung von } G \end{aligned}$$

Ein weiteres Analogon zu koprimen Matrizenbruchdarstellungen bildet die *verallgemeinerte Bezout-Identität* für \mathcal{RH}_∞ -Matrizen: Für eine gegebene Übertragungsmatrix $G(s)$ lassen sich außer koprimen Faktorisierungen (2.55) und (2.56) vier weitere \mathcal{RH}_∞ -Matrizen (passender Dimension) finden, so daß

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{M}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ M(s) & -\tilde{X}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Acht Matrizen, die (2.55) bzw. (2.56) und (2.57) genügen, bezeichnet man als *doppelt kopprime Faktorisierung* der Übertragungsmatrix $G(s)$.

Bisher haben wir noch nicht diskutiert, warum es sinnvoll sein kann, von der recht anschaulichen Systemdarstellung durch Polynommatrizen abzugehen und das Übertragungsverhalten durch koprime Faktorisierungen in \mathcal{RH}_∞ zu beschreiben. Zwei Gründe lassen sich nennen:

1. Matrizen in \mathcal{RH}_∞ besitzen eine Zustandsdarstellung und können deswegen numerisch sehr geschickt und zuverlässig verarbeitet werden.
2. Mittels Matrizen in \mathcal{RH}_∞ läßt sich das wichtigste Ziel jedes Reglerentwurfs – asymptotische Stabilität des Regelkreises – ganz einfach ausdrücken: Jedes Element einer den geschlossenen Regelkreis beschreibenden Übertragungsmatrix muß aus \mathcal{RH}_∞ sein.

Die im folgenden aufgeführte Prozedur zur Bestimmung von koprime Faktorisierungen zeigt die Relevanz des erstgenannten Punktes. Die Übertragungsmatrix $G(s)$ sei proper. Wir beginnen mit einer Minimalrealisierung von $G(s)$:

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]. \quad (2.58)$$

Minimalrealisierungen sind steuerbar und beobachtbar. Deshalb existieren reelle Matrizen F und H , so daß sämtliche Eigenwerte von $A + BF$ und $A + HC$ links der imaginären Achse liegen [113]. Ξ und $\tilde{\Xi}$ seien beliebige nichtsinguläre reelle Matrizen⁷ „passender“ Dimension ($q \times q$ bzw. $p \times p$). Eine Zustandsdarstellung für eine doppelt koprime Faktorisierung lautet dann:

$$\left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline \tilde{M} & -\tilde{N} \end{array} \right] \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & -H & B + HD \\ \hline -\Xi^{-1}F & 0 & \Xi^{-1} \\ -\tilde{\Xi}C & \tilde{\Xi} & -\tilde{\Xi}D \end{array} \right] \quad (2.59)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} N & \tilde{Y} \\ \hline M & -\tilde{X} \end{array} \right] \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + BF & B\Xi & -H\tilde{\Xi}^{-1} \\ \hline C + DF & D\Xi & \tilde{\Xi}^{-1} \\ F & \Xi & 0 \end{array} \right]. \quad (2.60)$$

Für Zähler- und Nennermatrizen rechts- bzw. linkskoprimer Faktorisierungen können wir hieraus ablesen:

$$\left[\begin{array}{c} N(s) \\ M(s) \end{array} \right] \cong \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B\Xi \\ \hline C + DF & D\Xi \\ F & \Xi \end{array} \right] \quad (2.61)$$

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{N}(s) \\ \tilde{M}(s) \end{array} \right] \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & B + HD & H \\ \hline \tilde{\Xi}C & \tilde{\Xi}D & \tilde{\Xi} \end{array} \right]. \quad (2.62)$$

⁷„ Ξ “ ist ein großes Xi; alle gebräuchlicheren Symbole waren leider bereits „anderweitig belegt“.

Beweis: Um die Richtigkeit von (2.59) und (2.60) zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß $G = NM^{-1}$ und die verallgemeinerte Bezout-Identität (2.57) erfüllt ist: Den „Rechenregeln“ für Zustandsmodelle auf Seite 73 entnehmen wir

$$N(s)M^{-1}(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A + BF & BF & B \\ 0 & A & -B \\ \hline C + DF & DF & D \end{array} \right].$$

Nach Einführung einer Ähnlichkeitstransformation

$$T = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}$$

ergibt sich als Realisierung für NM^{-1} :

$$N(s)M^{-1}(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A + BF & 0 & 0 \\ 0 & A & B \\ \hline C + DF & C & D \end{array} \right].$$

Diese Zustandsdarstellung zerfällt in zwei voneinander unabhängige Teilsysteme; das gesamte erste Teilsystem ist nicht steuerbar, tritt also in der zugehörigen Übertragungsmatrix nicht in Erscheinung:

$$\begin{aligned} N(s)M^{-1}(s) &= (C + DF)(sI_n - A - BF)^{-1}0 + C(sI_n - A)^{-1}B + D \\ &= G(s). \end{aligned}$$

Nun bleibt noch zu zeigen, daß die Realisierungen (2.59) und (2.60) die verallgemeinerte Bezout-Identität erfüllen: Durch erneutes Anwenden der „Rechenregeln“ auf S. 73 erhalten wir als Zustandsdarstellung der linken Seite von (2.57)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A + HC & -HC + BF & B\Xi & -H\tilde{\Xi}^{-1} \\ 0 & A + BF & B\Xi & -H\tilde{\Xi}^{-1} \\ \hline -\Xi^{-1}F & \Xi^{-1}F & I_q & 0 \\ -\tilde{\Xi}C & \tilde{\Xi}C & 0 & I_p \end{array} \right].$$

Nach Einführen der Ähnlichkeitstransformation

$$T = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

erhält man als Realisierung

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A + HC & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A + BF & B\Xi & -H\tilde{\Xi}^{-1} \\ \hline -\Xi^{-1}F & 0 & I_q & 0 \\ -\tilde{\Xi}C & 0 & 0 & I_p \end{array} \right].$$

Die Realisierung zerfällt in zwei voneinander unabhängige Teile. Das gesamte erste Teilsystem ist nicht steuerbar, das gesamte zweite nicht beobachtbar; als Übertragungsmatrix des gesuchten Produktes bleibt deshalb nur die Einheitsmatrix I_{q+p} . \square

Anmerkung: Falls $G(s)$ bereits asymptotisch stabil ist, können wir natürlich $H = F = 0$ wählen. Setzen wir weiterhin $\Xi = I_q$ und $\tilde{\Xi} = I_p$, so ergibt sich:

$$N(s) = \tilde{N}(s) = G(s), \quad (2.63)$$

$$\tilde{M}(s) = \tilde{Y}(s) = I_p, \quad (2.64)$$

$$M(s) = Y(s) = I_q, \quad (2.65)$$

$$X(s) = \tilde{X}(s) = 0. \quad (2.66)$$

2.3.1 Normalisierte koprime Faktorisierungen

Zähler und Nenner einer koprime Faktorisierung können mit einer beliebigen unimodularen Matrix $U(s)$ erweitert werden. Diesen „Freiheitsgrad“ $U(s)$ können wir für eine Art Normierung nutzen: Es läßt sich z.B. immer ein geeignetes $U(s)$ finden, so daß für Zähler und Nenner gilt:

$$\tilde{N}(s)\tilde{N}^T(-s) + \tilde{M}(s)\tilde{M}^T(-s) = I_p. \quad (2.67)$$

In diesem Fall bezeichnen wir $G(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ als *normalisierte linkskoprime Faktorisierung in \mathcal{RH}_∞* . Auch solche normalisierten Faktorisierungen sind natürlich nicht eindeutig: Es ist leicht zu sehen, daß Linksmultiplikation von Zähler- und Nennerfaktor mit einer konstanten orthonormalen Matrix V ($VV^T = V^TV = I_p$) weder die Eigenschaft der Koprimeheit noch die Gültigkeit der Normalisierungsgleichung (2.67) beeinträchtigt. Modelle in Form normalisierter linkskoprimer Faktorisierungen spielen bei einer interessanten Variante des H_∞ -Verfahrens (vgl. Abschnitt 10.2.2) eine wichtige Rolle.

Normalisierte rechtskoprime Faktorisierungen werden ganz analog definiert; wir werden eine solche Systemdarstellung allerdings nicht benötigen.

Auch für den normalisierten Fall existieren Zustandsformeln für Zähler- und Nennermatrizen: Die linkskoprime Faktorisierung (2.62) ist normalisiert, falls

$$\tilde{\Xi} = R^{\frac{1}{2}} \quad (2.68)$$

$$R := (I_p + DD^T)^{-1}, \quad (2.69)$$

$$H = -(BD^T + ZC^T)R \quad (2.70)$$

gewählt werden und Z die eindeutige symmetrische positiv-definite Lösung folgender *algebraischer Riccati-Gleichung* ist:

$$(A - BSD^T C)Z + Z(A - BSD^T C)^T - ZC^T RCZ + BSB^T = 0, \quad (2.71)$$

$$S := (I_q + D^T D)^{-1}. \quad (2.72)$$

Beweis: Unter Zuhilfenahme der „Rechenregeln“ für konjugiertes Transponieren und Multiplikation (s. Seite 72) erhält man eine Zustandsdarstellung für die linke Seite von (2.67). Bildet man hieraus die zugehörige Übertragungsmatrix, so ergibt sich (nach einigen Umformungen) die Einheitsmatrix. \square

Anmerkung: Zu Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Riccati-Gleichung (2.71) s. Anhang C.1.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir verschiedene Möglichkeiten behandelt, lineare zeitinvariante Mehrgrößensysteme darzustellen. Übertragungs- und Frequenzgangmatrizen – beides reell-rationale Matrizen in s bzw. $j\omega$ – faßten wir als die „zentrale“ Beschreibungsmöglichkeit auf. Die Darstellung durch Polynommatrizen wird es uns im nächsten Kapitel ermöglichen, Pole und Nullstellen von Mehrgrößensystemen auf anschauliche Weise einzuführen. Die Rosenbrock-System-Matrix kann man als gemeinsamen Rahmen aller behandelten polynomialen Modelle interpretieren. Sie umfaßt sowohl rechte und linke Polynom-Matrizenbruchdarstellungen, als auch Zustandsmodelle. Letztere sind für uns vor allem deswegen interessant, weil sie vorteilhaft zur Durchführung verschiedener Berechnungen genutzt werden können. In Bild 2.8 sind die besprochenen Beschreibungsmöglichkeiten zusammengefaßt. Durchgezogene Pfeile repräsentieren Umrechnungen bzw. Übergänge, die wir explizit besprochen haben. Unterbrochene Pfeile stehen für Umformungen, die wir nicht direkt benötigen; sie lassen sich auf der Grundlage der behandelten Fakten aber leicht durchführen oder können ohne Schwierigkeiten der einschlägigen Literatur entnommen werden: Um z.B. von einer Übertragungsmatrix $G(s)$ zu einer rechtskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung zu gelangen, braucht man lediglich das kleinste gemeinsame Vielfache $m_P(s)$ aller Nennerpolynome der Elemente $g_{ik}(s)$ zu berechnen. Man erhält $G(s) = N_P(s) 1/m_P(s)$ und hat mit $\{N_P(s), m_P(s)I_q\}$ eine rechte (i.a. aber nicht koprimen) Polynom-Matrizenbruchdarstellung gefunden. Nun muß man lediglich noch einen ggRt $R_P(s)$ von Zähler- und Nennermatrix bestimmen und hat dann mit $\{N_P R_P^{-1}, m_P R_P^{-1}\}$

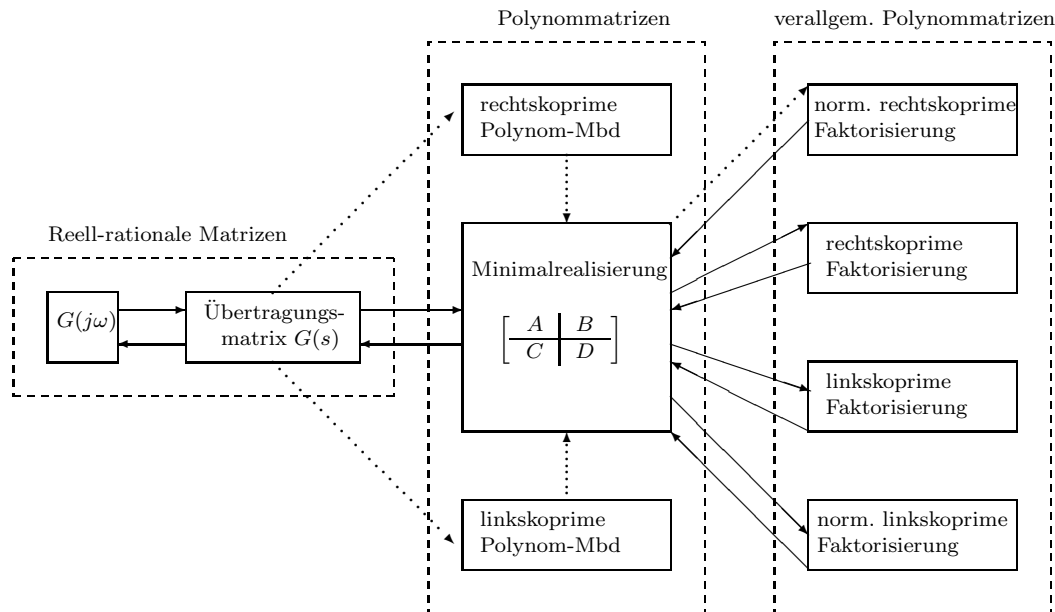


Bild 2.8: Darstellungsmöglichkeiten für ein lineares zeitinvariantes System.

eine rechtekoprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung berechnet. Eine linkskoprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung findet man auf analoge Weise. Um sich eine normalisierte rechtekoprime Faktorisierung zu verschaffen, muß man lediglich die auf Seite 88 für den linkskoprimen Fall angegebene Prozedur anpassen. Den direkten Übergang von einer koprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung zu einer Minimalrealisierung findet man schließlich in [47].

2.5 Literaturhinweise

Die Bücher von *Rosenbrock* [98] und *Kailath* [47] werden gemeinhin als Standardwerke für polynomiale Modelle und ihren Zusammenhang mit Übertragungsmatrizen angesehen. Ersterem ist das „Rezept“ zur Komprimierung von Polynommatrizen auf Seite 49 entnommen, letzterem die Beweise von Satz 2.1, Satz 2.2 und der verallgemeinerten Bezout-Identität für Polynommatrizen. Eine Standardreferenz für Matrixtheorie ist *MacDuffee* [62]. Dort wird auch die Existenz der auf Seite 48 dargestellten Komprimierung bewiesen. Die Konzepte der Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit und Minimalität einer Zustandsdarstellung gehen auf *Kalman* (z.B. [48]) zurück. Die in Abschnitt 2.2.3.1 dargestellte Vorgehensweise bei der Berechnung einer Minimalrealisierung entstammt – in leicht abgewandelter Form – dem Buch von *Patel* und *Munro* [87], die in Abschnitt 2.2.3.2 aufgeführte Sammlung einfacher „Rechenregeln“ für Zu-

standsdarstellungen dem Buch von *Francis* [26]. Die Verwendung koprimere Faktorisierungen in \mathcal{RH}_∞ wurde von *Vidyasagar* vorgeschlagen [109]. Sie werden ausführlich in [110] behandelt. Die „Zustandsformeln“ (2.61)-(2.62) zur Berechnung koprimere Faktorisierungen wurden von *Nett et al.* [79] veröffentlicht. Die „Zustandsformeln“ zur Bestimmung normalisierter koprimere Faktorisierungen gehen (für $D = 0$) auf *Meyer* und *Franklin* [77] und (für $D \neq 0$) auf *Vidyasagar* [111] zurück.

Kapitel 3

Pole und Nullstellen

Pole und Nullstellen eines Systems lassen sich besonders leicht erklären, wenn wir mit einer äußeren Systembeschreibung (d.h. einer Übertragungsmatrix) arbeiten. Bei inneren Modellen erweist sich die Sachlage als etwas komplizierter; in diesem Fall können verschiedene Arten von Polen und Nullstellen auftreten. Wir beginnen mit dem einfacheren Fall:

3.1 Pole und Nullstellen einer Übertragungsmatrix

Pole und Nullstellen einer Übertragungsmatrix werden *Übertragungspole* bzw. *Übertragungsnulstellen* genannt. Wir betrachten zunächst, wie diese Begriffe im Eingrößenfall definiert sind, welche physikalische Bedeutung und regelungstechnische Relevanz ihnen bei skalaren Systemen zukommt.

3.1.1 Skalare Systeme

Definition 3.1 (Übertragungspole und Übertragungsnulstellen von Eingrößensystemen) _____

Die Übertragungspole von

$$g(s) = \frac{n_P(s)}{m_P(s)}; \quad n_P, m_P \dots \text{koprim},$$

sind die Wurzeln des Nennerpolynoms $m_P(s)$. Die Wurzeln des Zählerpolynoms $n_P(s)$ werden als Übertragungsnulstellen bezeichnet. _____

Anmerkung: Normiert man die Anfangskoeffizienten von $m_P(s)$ und $n_P(s)$ auf 1, so spricht man auch von *Pol-* bzw. *Nullstellen-Polynom*.

Übertragungspole beschreiben das autonome Verhalten eines Systems – seine Eigendynamik.

Beispiel: Die Übertragungsfunktion

$$g(s) = \frac{1}{s + a}$$

weist einen Übertragungspol an der Stelle $s = -a$ auf. Die zugehörige Differentialgleichung für die Eingangsgröße $u(t)$ und die Ausgangsvariable $y(t)$ lautet

$$\dot{y}(t) + ay(t) = u(t);$$

sie besitzt die homogene ($u(t) \equiv 0$) Lösung

$$y(t) = \text{const. } e^{-at}.$$

Übertragungsnullstellen charakterisieren hingegen, auf welche Art und Weise die Eigendynamik eines Systems an seine Umgebung „angekoppelt“ ist; sie geben insbesondere an, für welche Werte der Frequenzvariablen s die Signalübertragung zwischen System-Eingang und System-Ausgang blockiert wird. Diese *Sperr-Eigenschaft* läßt sich präzise wie folgt beschreiben: $s = z$ sei eine Übertragungsnullstelle der Übertragungsfunktion $g(s)$; dann existieren geeignete Anfangsbedingungen, so daß für ein Eingangssignal

$$u(t) = c e^{zt} h(t), \quad c = \text{const.}, \quad (3.1)$$

($h(t)$ steht für den Einheitssprung) die Ausgangsgröße identisch verschwindet:

$$y(t) \equiv 0, \quad t > 0.$$

Beispiel:

$$g(s) = -\frac{s - z}{s}$$

besitzt eine Übertragungsnullstelle an der Stelle $s = z$. Die zugehörige Zeitbereichsdarstellung lautet:

$$\dot{y}(t) = zu(t) - \dot{u}(t);$$

$u(t)$ sei durch (3.1) gegeben. Nach Anwendung der Laplace-Transformation erhält man:

$$\begin{aligned} sy(s) - y_0 &= (z - s)u(s) \\ &= (z - s)\frac{c}{s - z} \end{aligned}$$

bzw.

$$y(s) = \frac{y_0 - c}{s}.$$

y_0 ist als linksseitiger Grenzwert von $y(t)$ and der Stelle $t = 0$ zu verstehen. Für $y_0 = c$ folgt $y(s) = 0$ bzw.

$$y(t) = 0, \quad t > 0.$$

Bild 3.1 zeigt den zeitlichen Verlauf von Eingangs- und Ausgangssignal.

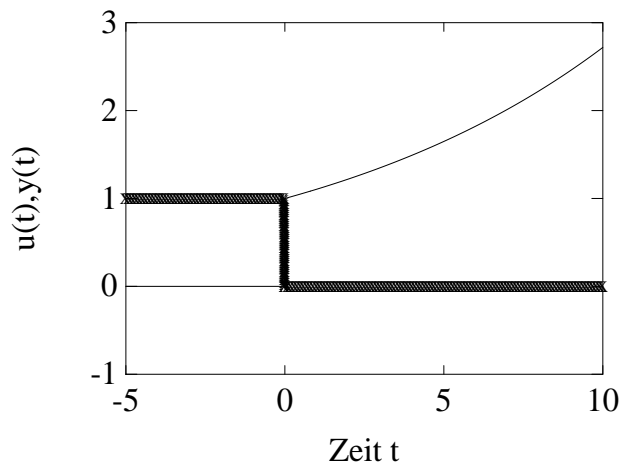


Bild 3.1: Verlauf von $u(t)$ (dünne Linie) und $y(t)$ für $z = 0.1$ und $c = 1$.

Die regelungstechnische Bedeutung von Übertragungsnulstellen läßt sich am leichtesten anhand des klassischen Wurzelortskurven-Verfahrens illustrieren: Wir betrachten den in Bild 3.2 gezeigten autonomen Regelkreis. k sei eine reelle Konstante, die wir kontinuierlich von 0 bis ∞ vergrößern, $g(s)$ eine realisierbare Übertragungsfunktion. Dann wandern $\nu = \text{Grad}\{n_P(s)\}$ Pole des geschlossenen Kreises von den Übertragungspolen des Systems $g(s)$ in die Übertragungsnulstellen von $g(s)$. Weiterhin enden

$$l := \text{Grad}\{m_P(s)\} - \text{Grad}\{n_P(s)\}$$

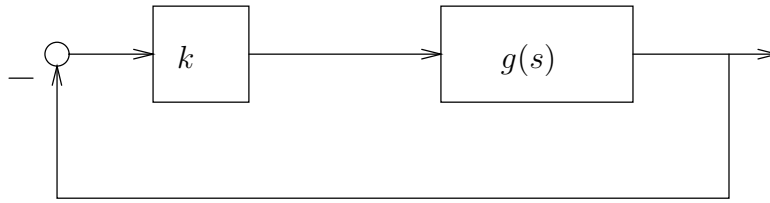


Bild 3.2: Autonomer Eingrößen-Regelkreis.

Äste der Wurzelortskurve im Unendlichen. Wurzelortskurven (für Mehrgrößensysteme) werden wir in einem späteren Kapitel ausführlich behandeln. An dieser Stelle dienen sie nur dazu, die regelungstechnische Relevanz von Übertragungsnulstellen aufzuzeigen.

3.1.2 Mehrgrößensysteme

Übertragungspole und Übertragungsnulstellen von Mehrgrößensystemen lassen sich leicht anhand der *Smith-McMillan-Form*, einer Normalform der Übertragungsmatrix, definieren.

Satz 3.1 (Smith-McMillan-Form)

$G(s)$ sei eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix mit Normalrang r (i.e. $\text{Rang}\{G(s)\} = r$ für fast alle s). Dann existieren unimodulare Polynommatrizen $U_P(s)$ und $V_P(s)$, so daß

$$S_M(s) := U_P(s)G(s)V_P(s) \quad (3.2)$$

folgende Eigenschaften aufweist:

1. Nur die ersten r Elemente der Hauptdiagonalen von S_M sind von Null verschieden. Alle anderen Elemente von S_M verschwinden:

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{P_1}}{\psi_{P_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\epsilon_{P_r}}{\psi_{P_r}} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

2. die Polynome $\{\epsilon_{P_i}$ und $\psi_{P_i}\}$ bilden ein koprimes Paar, $i = 1, \dots, r$,
3. die Anfangskoeffizienten aller Polynome ϵ_{P_i} , ψ_{P_i} , $i = 1, \dots, r$, sind auf 1 normiert,

4. die Zählerpolynome ϵ_{P_i} teilen einander „in Richtung wachsender Indizes“, die Nennerpolynome ψ_{P_i} „in Richtung fallender Indizes“:

$$\epsilon_{P_1} | \epsilon_{P_2} | \dots | \epsilon_{P_r} \tag{3.4}$$

$$\psi_{P_r} | \psi_{P_{r-1}} | \dots | \psi_{P_1}. \tag{3.5}$$

$S_M(s)$ heißt Smith-McMillan-Form der Übertragungsmatrix $G(s)$. _____

Beweis: Man bestimme zuerst ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $m_P(s)$ der Nennerpolynome aller Elemente von $G(s)$ und normiere seinen Anfangskoeffizienten auf 1.

$$N_P(s) = G(s)m_P(s) \tag{3.6}$$

ist dann eine $p \times q$ -Polynommatrix mit Normalrang r . Laut Satz 2.3 lassen sich zwei unimodulare Polynommatrizen U_P und V_P finden, so daß $U_P N_P V_P$ Smith-Form besitzt:

$$U_P N_P V_P = \left[\begin{array}{ccc|c} \left[\begin{array}{ccc} \lambda_{P_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{P_r} \end{array} \right] & & & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right], \tag{3.7}$$

$$\lambda_{P_1} | \lambda_{P_2} | \dots | \lambda_{P_r}. \tag{3.8}$$

Die Anfangskoeffizienten der invarianten Polynome λ_{P_i} sind definitionsgemäß 1. Schließlich dividiert man (3.7) durch $m_P(s)$, kürzt gemeinsame Faktoren in $\frac{\lambda_{P_i}}{m_P}$ und nennt die resultierenden Zähler- und Nennerpolynome ϵ_{P_i} bzw. ψ_{P_i} . Man erhält:

$$\begin{aligned} U_P(s)G(s)V_P(s) &= \left[\begin{array}{ccc|c} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\epsilon_{P_1}}{\psi_{P_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\epsilon_{P_r}}{\psi_{P_r}} \end{array} \right] & & & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right] \\ &= S_M(s). \end{aligned}$$

Jedes Paar $\{\epsilon_{P_i}, \psi_{P_i}\}$ ist laut „Konstruktionsvorschrift“ koprim; die Anfangskoeffizienten dieser Polynome können gleich 1 gewählt werden; die geforderten Teiler-Eigenschaften (3.4) und (3.5) folgen unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft (3.8) für die invarianten Polynome $\lambda_{P_i}(s)$. \square

Beispiel: ([87])

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+3)}}_{m_P(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} s+3 & 2(s+1) \\ s+3 & s+3 \end{bmatrix}}_{N_P(s)}. \end{aligned}$$

Die Smith-Form für die Polynommatrix $N_P(s)$ haben wir bereits auf Seite 54 berechnet: Die invarianten Polynome lauten $\lambda_{P_1} = 1$, $\lambda_{P_2}(s) = (s+3)(s-1)$. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Smith-McMillan-Form der Übertragungsmatrix $G(s)$:

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Anmerkung: Die Eigenschaft „proper“ („streng proper“) einer Matrix $G(s)$ braucht sich *nicht* auf ihre Smith-McMillan-Form zu übertragen.

Anhand der Smith-McMillan-Form lassen sich Übertragungspole und Übertragungsnullstellen eines Mehrgrößensystems leicht erklären:

Definition 3.2 (Übertragungspole und Übertragungsnullstellen eines Mehrgrößensystems)

Die Übertragungsnullstellen eines Systems $G(s)$ mit Normalrang r sind die Wurzeln der Zählerpolynome $\epsilon_{P_i}(s)$, $i = 1, \dots, r$, seiner Smith-McMillan-Form. ν_i sei die größte ganze Zahl, für die $(s-z)^{\nu_i}$ das Polynom $\epsilon_{P_i}(s)$ teilt. ν_i heißt Vielfachheit der Übertragungsnullstelle $s = z$.

$$z_P(s) := \prod_{i=1}^r \epsilon_{P_i}(s)$$

wird aus leicht ersichtlichem Grund Nullstellen-Polynom der Übertragungsmatrix $G(s)$ genannt.

Die Übertragungspole des Systems $G(s)$ sind die Wurzeln der Nennerpolynome $\psi_{P_i}(s)$, $i = 1, \dots, r$, seiner Smith-McMillan-Form. μ_i sei die größte ganze Zahl, für die $(s-a)^{\mu_i}$ das Polynom $\psi_{P_i}(s)$ teilt. μ_i heißt Vielfachheit des Übertragungspols $s = a$.

$$p_P(s) := \prod_{i=1}^r \psi_{P_i}(s)$$

wird Pol-Polynom genannt; der Grad des Pol-Polynoms wird als McMillan-Grad der Übertragungsmatrix $G(s)$ bezeichnet. _____

Man beachte, daß im Mehrgrößenfall Übertragungspole und -nullstellen an derselben Stelle in der komplexen Ebene auftreten können: Jedes Paar $\epsilon_{P_i}(s)$, $\psi_{P_i}(s)$ ist zwar koprim, $\epsilon_{P_i}(s)$ und $\psi_{P_j}(s)$, $i \neq j$, können aber von s abhängige gemeinsame Teiler und damit gemeinsame Wurzeln aufweisen. Darüber hinaus kann ein Mehrgrößensystem mehrere Pole und/oder Nullstellen (verschiedener Vielfachheit) an derselben Stelle der komplexen Ebene besitzen. Mögliche Kürzungen zwischen $\epsilon_{P_i}(s)$ und $\psi_{P_j}(s)$, $i \neq j$, sind auch der Grund, weshalb man Übertragungspole und -nullstellen einer quadratischen Übertragungsmatrix mit vollem Normalrang nicht unbedingt ihrer Determinante entnehmen kann. Zwar gilt wegen (3.2)

$$\det G(s) = \text{const} \frac{z_P(s)}{p_P(s)}$$

gemeinsame Faktoren in Pol- und Nullstellenpolynom werden aber gekürzt und treten deswegen nicht mehr in Zähler- und Nennerpolynom von $\det G(s)$ auf. Jede Zähler- bzw. Nennerwurzel von $\det G(s)$ ist also sicherlich Übertragungsnullstelle bzw. -pol von G , die Umkehrung braucht aber nicht zu gelten.

Beispiel: Wir wenden uns wieder dem einführenden Beispiel auf Seite 32 zu: Die Smith-McMillan-Form der Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{0.5}{\frac{s}{8}+1} \\ \frac{0.5}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

lautet

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+8)} & 0 \\ 0 & \frac{s-6}{s+1} \end{bmatrix}.$$

$G(s)$ besitzt also

- zwei Übertragungspole der Vielfachheit 1 an der Stelle $s = -1$,
- einen Übertragungspol der Vielfachheit 1 an der Stelle $s = -8$ und
- eine Übertragungsnullstelle der Vielfachheit 1 an der Stelle $s = 6$.

Auf Seite 32 versuchten wir, dieses System mittels einer proportionalen Rückführung $u = -ky$ zu regeln, mußten allerdings (z.B. für $k = 20$) Instabilität des resultierenden Regelkreises feststellen. Dieses Problem wird durch die Übertragungsnullstelle in der rechten Halbebene verursacht. Genau wie bei Eingrößensystemen wandern Pole eines mehrvariablen Regelkreises von den Übertragungspolen in die Übertragungsnullstellen der Matrix $G(s)$, wenn wir (den skalaren Faktor) k von 0 bis ∞ erhöhen. Auf den Verlauf solcher Wurzelortskurven werden wir in Abschnitt 5.1.5 noch sehr viel genauer eingehen.

Man kann leicht zeigen, daß $s = -a$ genau dann ein Übertragungspol des Systems $G(s)$ ist, wenn mindestens eines seiner Elemente $g_{ij}(s)$ einen Pol an der Stelle $s = -a$ besitzt. Leider ermöglicht die Kenntnis der Pole der Elemente $g_{ij}(s)$ aber noch keine Aussage über Anzahl und Vielfachheit der Übertragungspole der Matrix $G(s)$. Bei Übertragungsnullstellen gestaltet sich der Sachverhalt noch etwas komplizierter: Aus den Nullstellen der Einzelelemente läßt sich weder auf Lage noch auf Anzahl und Vielfachheit der Übertragungsnullstellen von $G(s)$ schließen.

Nichtquadratische Systeme $G(s)$ besitzen in der Regel keine Übertragungsnullstellen: Die Zählerpolynome der Smith-McMillan-Form teilen in Richtung wachsender Indizes; deshalb ist das Nullstellenpolynom $z_P(s)$ genau dann keine Konstante, wenn ϵ_{P_r} von s abhängt (r sei der Normalrang der Übertragungsmatrix $G(s)$). Dies wiederum kann nur dann der Fall sein, wenn alle $r \times r$ -Minoren der Polynommatrix (3.6) einen von s abhängigen gemeinsamen Teiler besitzen (man erinnere sich an die Berechnung der Smith-Form einer Polynommatrix!). Für nichtquadratische $p \times q$ -Übertragungsmatrizen gilt aber sicherlich $r < \max(p, q)$; es gibt also mehrere solcher Minoren und die Existenz eines nichtkonstanten gemeinsamen Teilers ist unwahrscheinlich.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die physikalische Interpretation von Übertragungspolen und -nullstellen im Ein- und Mehrgrößenfall übereinstimmt: Übertragungspole beschreiben die Eigendynamik eines Systems, die Übertragungsnullstellen charakterisieren, wie diese Eigendynamik an die Umgebung „gekoppelt“ ist. Sie geben insbesondere an, für welche Frequenzen s eine *vektorielle Version der Sperreigenschaft* zum Tragen kommt. Diese läßt sich folgendermaßen formulieren: Die $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ besitze Normalrang q . $s = z$ sei eine Übertragungsnullstelle. Dann existieren geeignete Anfangsbedingungen und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^q$, so daß das Eingangssignal

$$u(t) = c e^{zt}, \quad c \neq 0,$$

ein Verschwinden der Ausgangsvariablen bewirkt:

$$y(t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.9)$$

Stimmen Spaltenzahl und Normalrang der Matrix $G(s)$ nicht überein, so läßt sich (3.9) für Anregungen beliebiger Frequenz erreichen.

Anmerkung: Im folgenden werden wir Pole und Nullstellen immer entsprechend ihrer Vielfachheit aufführen. So verwenden wir z.B. die Schreibweise $\{-1, -1, -1\}$ sowohl für einen Pol der Vielfachheit 3 als auch für drei Pole der Vielfachheit 1 an der Stelle $s = -1$.

3.2 Pole und Nullstellen interner Modelle

Wir werden uns zunächst mit Polen und Nullstellen eines in Form einer (Rosenbrockschen) System-Matrix

$$P_{PR}(s) = \begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \\ -\gamma_{PR}(s) & \delta_{PR}(s) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

vorliegenden Modells befassen. Da diese Art der Beschreibung alle anderen polynomialen Modelle umfaßt, können wir die Ergebnisse anschließend problemlos auf linke und rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen und Zustandsmodelle übertragen.

3.2.1 System-Pole

Definition 3.3 (System-Pole)

Die System-Pole der Rosenbrock-Matrix (3.10) sind die Wurzeln von $\det\{\alpha_{PR}(s)\}$.

Die System-Pole beschreiben das autonome Verhalten der inneren Variablen ξ ; sie charakterisieren also die „interne Dynamik“ des Systems.

Beispiel:

$$P_{PR}(s) = \begin{bmatrix} s + a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die homogene Lösung der zugehörigen zeitlichen Differentialgleichung für $\xi(t)$ lautet:

$$\xi(t) = \xi(0) e^{-at}.$$

Ist die System-Matrix reduzierbar, besitzen also $\alpha_{PR}(s)$, $\beta_{PR}(s)$ einen nicht-unimodularen ggLt und/oder $\alpha_{PR}(s)$, $\gamma_{PR}(s)$ einen nicht-unimodularen ggRt, so werden beim Bilden der Übertragungsmatrix

$$G(s) = \gamma_{PR}(s)\alpha_{PR}^{-1}(s)\beta_{PR}(s) + \delta_{PR}(s) \quad (3.11)$$

System-Pole gekürzt. Deswegen leuchtet der folgende Sachverhalt unmittelbar ein (einen formalen Beweis führen wir trotzdem):

Satz 3.2 (System-Pole und Übertragungspole) _____

Jeder Übertragungspol von (3.11) ist auch System-Pol von P_{PR} . Ein System-Pol braucht dagegen nicht Übertragungspol zu sein:

$$\{\text{Übertragungspole}\} \subseteq \{\text{System-Pole}\}.$$

Beweis: $L_P(s)$ sei ein ggLt von $\alpha_{PR}(s)$ und $\beta_{PR}(s)$; es existieren also Polynommatrizen $\bar{\alpha}_{PR}(s)$, $\bar{\beta}_{PR}(s)$, so daß

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \end{bmatrix} &= L_P(s) \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR}(s) & \bar{\beta}_{PR}(s) \end{bmatrix}, \\ \bar{\alpha}_{PR}(s), \bar{\beta}_{PR}(s) &\dots \text{linkskoprim.} \end{aligned}$$

$\bar{R}_P(s)$ sei ein ggRt von $\bar{\alpha}_{PR}(s)$ und $\gamma_{PR}(s)$, d.h. es lassen sich Polynommatrizen $\bar{\bar{\alpha}}_{PR}(s)$, $\bar{\bar{\gamma}}_{PR}(s)$ finden, so daß

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR}(s) \\ -\gamma_{PR}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\bar{\alpha}}_{PR}(s) \\ -\bar{\bar{\gamma}}_{PR}(s) \end{bmatrix} \bar{R}_P(s), \\ \bar{\bar{\alpha}}_{PR}(s), \bar{\bar{\gamma}}_{PR}(s) &\dots \text{rechtskoprim.} \end{aligned}$$

Offenbar gilt dann:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{PR} & \beta_{PR} \\ -\gamma_{PR} & \delta_{PR} \end{bmatrix}}_{P_{PR}} = \begin{bmatrix} L_P & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\bar{\alpha}}_{PR} & \bar{\beta}_{PR} \\ -\bar{\bar{\gamma}}_{PR} & \delta_{PR} \end{bmatrix}}_{:=\bar{P}_{PR}} \begin{bmatrix} \bar{R}_P & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

und $\bar{P}_{PR}(s)$ ist definitionsgemäß nicht reduzierbar. P_{PR} und \bar{P}_{PR} besitzen dieselbe Übertragungsmatrix G . Ihre Smith-McMillan-Form laute

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_{P_1}}{\psi_{P_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\epsilon_{P_r}}{\psi_{P_r}} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d.h. es existieren unimodulare Polynommatrizen $U_P(s)$ und $V_P(s)$,
so daß

$$\begin{aligned}
 G(s) &= U_P(s)S_M(s)V_P(s) \\
 &= U_P \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{P_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \epsilon_{P_r} \end{bmatrix} & 0 \\ \hline & 0 \end{bmatrix}}_{:=\varepsilon_P} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{P_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \psi_{P_r} \end{bmatrix} & 0 \\ \hline & I_{q-r} \end{bmatrix}^{-1}}_{:=\Psi_P^{-1}} V_P.
 \end{aligned}$$

In dieser Schreibweise läßt sich sofort eine weitere System-Matrix $\tilde{P}_{PR}(s)$ mit Übertragungsmatrix $G(s)$ angeben:

$$\tilde{P}_{PR}(s) := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & \Psi_P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ V_P \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & -U_P\varepsilon_P \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

\tilde{P}_{PR} ist nicht reduzierbar (U_P und V_P sind unimodular und jedes Paar $\epsilon_{P_i}, \psi_{P_i}, i = 1, \dots, r$, ist per Definition koprim); \tilde{P}_{PR} und \overline{P}_{PR} sind also äquivalent (im Rosenbrockschen Sinne). Die „ α_{PR} -Blöcke“ zweier äquivalenter System-Matrizen besitzen dieselbe Smith-Form (vgl. Seite 78), ihre Determinanten stimmen deswegen (bis auf eine reelle Konstante) überein:

$$\begin{aligned}
 \text{const. det}\overline{\alpha}_{PR}(s) &= \det \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & \Psi_P(s) \end{bmatrix} \\
 &= \prod_{i=1}^r \psi_{P_i}(s) \\
 &= p_P(s) \dots \text{Pol-Polynom von } G(s).
 \end{aligned}$$

Aus (3.12) ergibt sich dann unmittelbar

$$\begin{aligned}
 \det\alpha_{PR}(s) &= \det L_P(s) \det\overline{\alpha}_{PR}(s) \det\overline{R}_P(s) \\
 &= \text{const. det}L_P(s) p_P(s) \det\overline{R}_P(s)
 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
 \{\text{System-Pole}\} &= \{\text{Wurzeln von det}L_P(s)\} \\
 &\cup \{\text{Übertragungspole}\} \\
 &\cup \{\text{Wurzeln von det}\overline{R}_P(s)\}.
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

□

Wir wissen, wie sich Zustandsmodelle, linke und rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen als System-Matrizen schreiben lassen (Gln. (2.49), (2.50) und (2.51)). Wir können deshalb unmittelbar ablesen, was wir in diesen Fällen unter System-Polen zu verstehen haben:

	System-Pole
Zustandsdarstellung	Wurzeln von $\det(sI_n - A)$ (Eigenwerte von A)
rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung	Wurzeln von $\det M_P(s)$
linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung	Wurzeln von $\det \tilde{M}_P(s)$

Nun betrachten wir die „Differenz“ zwischen der Menge der System-Pole und der Menge der Übertragungspole. System-Pole, die nicht Übertragungspole sind, gehen bei der Bildung der Übertragungsmatrix „verloren“ – sie werden gegen sogenannte *Entkopplungsnulstellen* gekürzt. Wie wir dem Beweis von Satz 3.2 entnehmen, können solche Kürzungen sowohl zwischen den Matrizen $\alpha_{PR}(s)$ und $\beta_{PR}(s)$ als auch zwischen $\alpha_{PR}(s)$ und $\gamma_{PR}(s)$ auftreten. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

3.2.2 Eingangs-Entkopplungsnulstellen

Definition 3.4 (Eingangs-Entkopplungsnulstellen)

L_P sei ein ggT von α_{PR} und β_{PR} , d.h. es existieren linkskopprime Polynommatrizen $\bar{\alpha}_{PR}(s)$ und $\bar{\beta}_{PR}(s)$, so daß

$$\begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \end{bmatrix} = L_P(s) \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR}(s) & \bar{\beta}_{PR}(s) \end{bmatrix}.$$

Die Wurzeln des Polynoms $\det L_P(s)$ heißen Eingangs-Entkopplungsnulstellen (EE-Nullstellen) der System-Matrix P_{PR} .

Ist $s = z$ eine Eingangs-Entkopplungsnulstelle, so gilt

$$\det \alpha_{PR}(z) = \det L_P(z) \det \bar{\alpha}_{PR}(z) = 0,$$

d.h. $s = z$ ist gleichzeitig ein System-Pol von P_{PR} . Bei der Bildung der Übertragungsmatrix kürzen sich – wie bereits erwähnt – solche Pol-Nullstellen-Paare; sie beeinflussen das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems also nicht:

$$\begin{aligned} G(s) &= \gamma_{PR}(s) \alpha_{PR}(s)^{-1} \beta_{PR}(s) + \delta_{PR}(s) \\ &= \gamma_{PR}(s) [L_P(s) \bar{\alpha}_{PR}(s)]^{-1} [L_P(s) \bar{\beta}_{PR}(s)] + \delta_{PR}(s) \\ &= \gamma_{PR}(s) \bar{\alpha}_{PR}(s)^{-1} \bar{\beta}_{PR}(s) + \delta_{PR}(s). \end{aligned}$$

Da die Kürzung zwischen den Matrizen $\alpha_{PR}(s)$ und $\beta_{PR}(s)$ stattfindet, entspricht eine Eingangs-Entkopplungsnulstelle einer Eigenbewegung der inneren Variablen ξ , die sich nicht über die Eingangsgröße u anregen läßt.

Anmerkung: $S_P(s)$ sei die Smith-Form eines ggLt der Matrizen $\alpha_{PR}(s)$ und $\beta_{PR}(s)$. Es ist leicht zu sehen, daß sich als Smith-Form von $\begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \end{bmatrix}$ die Matrix $\begin{bmatrix} S_P(s) & 0 \end{bmatrix}$ ergibt. Sind zwei System-Matrizen P_{PR1} und P_{PR2} äquivalent, so wissen wir aus Kapitel 2.2.1, daß $\begin{bmatrix} \alpha_{PR1}(s) & \beta_{PR1}(s) \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \alpha_{PR2}(s) & \beta_{PR2}(s) \end{bmatrix}$ dieselbe Smith-Form besitzen. Deswegen müssen auch die Eingangs-Entkopplungsnullstellen beider System-Matrizen übereinstimmen.

Offenbar besitzt eine System-Matrix genau dann keine Eingangs-Entkopplungsnullstelle, wenn die Matrizen $\alpha_{PR}(s)$ und $\beta_{PR}(s)$ ein linkskoprimales Paar bilden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist bekanntlich (vgl. Abschnitt 2.2.1), daß die Matrix $\begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \end{bmatrix}$ für alle s vollen Zeilenrang n aufweist:

Satz 3.3 (Existenz von Eingangs-Entkopplungsnullstellen)_____

Eine Rosenbrock-System-Matrix besitzt genau dann keine Eingangs-Entkopplungsnullstelle, wenn

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \end{bmatrix} = n \quad \text{für alle } s.$$

Anmerkung: Wenn wir mit der nicht-erweiterten Form $P_P(s)$ der System-Matrix arbeiten, lautet die entsprechende (gleichwertige!) Bedingung, daß die Matrix $\begin{bmatrix} \alpha_P(s) & \beta_P(s) \end{bmatrix}$ vollen Zeilenrang besitzt.

Anmerkung: Ein Rangabfall ist natürlich nur für Frequenzen s möglich, an denen die Matrix $\alpha_{PR}(s)$ bzw. $\alpha_P(s)$ singular ist. Der Rang muß also nur für die System-Pole $s = p$ überprüft werden – dies überrascht nicht weiter, da jede Eingangs-Entkopplungsnullstelle per Definition gleichzeitig auch System-Pol ist.

Wenden wir diese Rangbedingungen auf die betrachteten Spezialfälle der System-Matrix (Zustandsmodelle, linke und rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen) an, so erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

	Notwendige u. hinreichende Bedingung für die Nicht-Existenz von Eingangs-Entkopplungsnulstellen
Zustandsdarstellung	$\begin{bmatrix} (sI_n - A) & B \end{bmatrix}$ besitzt vollen Zeilenrang (n) für alle s
linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung	$\begin{bmatrix} \widetilde{M}_P(s) & \widetilde{N}_P(s) \end{bmatrix}$ besitzt vollen Zeilenrang (p) für alle s
rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung	immer erfüllt

Rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen weisen keine Eingangs-Entkopplungsnulstellen auf, da in diesem Fall die in (2.49) definierte Matrix $\begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \end{bmatrix}$ immer vollen Zeilenrang hat.

Anschaulich ist unmittelbar klar, daß eine Zustandsdarstellung genau dann steuerbar ist, wenn keine Eingangs-Entkopplungsnulstellen auftreten, wenn also alle Eigenbewegungen des Zustands über die Stellgrößen beeinflusst werden können. Obige Rangbedingung für $\begin{bmatrix} (sI_n - A) & B \end{bmatrix}$ bildet deshalb eine notwendige und hinreichende Bedingung für Steuerbarkeit einer Zustandsdarstellung. Sie wird als *Popov-Belevitch-Hautus (PBH) Steuerbarkeitstest* bezeichnet. Durch Anwendung des PBH Tests läßt sich offenbar nicht nur entscheiden, *ob* ein Zustandsmodell steuerbar ist oder nicht, sondern auch *welche* seiner Eigenbewegungen nicht angeregt werden können, *welche* System-Pole sich also gegen Eingangs-Entkopplungsnulstellen kürzen und demzufolge nicht steuerbar sind. Liegen alle Eingangs-Entkopplungsnulstellen (und damit sämtliche nicht steuerbaren System-Pole) links der imaginären Achse, so wird das Zustandsmodell *stabilisierbar* genannt: Sämtliche instabilen Pole können dann durch eine geeignete Zustandsrückführung in die linke Halbebene „verschoben“ werden [113].

3.2.3 Ausgangs-Entkopplungsnulstellen

Ausgangs-Entkopplungsnulstellen lassen sich in völliger Analogie zu Eingangs-Entkopplungsnulstellen einführen:

Definition 3.5 (Ausgangs-Entkopplungsnulstellen) _____

R_P sei ein ggTt der Polynommatrizen α_{PR} und γ_{PR} , d.h. es existieren rechtskopprime Polynommatrizen $\bar{\alpha}_{PR}(s)$ und $\bar{\gamma}_{PR}(s)$, so daß

$$\begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) \\ -\gamma_{PR}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR}(s) \\ -\bar{\gamma}_{PR}(s) \end{bmatrix} R_P(s).$$

Die Wurzeln der Determinante von $R_P(s)$ heißen Ausgangs-Entkopplungsnulstellen (AE-Nullstellen) der System-Matrix P_{PR} . _____

Wie im vorigen Abschnitt ist offensichtlich, daß für jede Ausgangs-Entkopplungsnullstelle ein System-Pol von P_{PR} an derselben Stelle der komplexen Ebene vorliegt. Ein solches Pol-Nullstellen-Paar wird bei der Bildung der Übertragungsmatrix gekürzt und beeinflußt deswegen das Übertragungsverhalten des Systems nicht:

$$\begin{aligned} G &= \gamma_{PR} \alpha_{PR}^{-1} \beta_{PR} + \delta_{PR} \\ &= [\bar{\gamma}_{PR} R_P] [\bar{\alpha}_{PR} R_P]^{-1} \beta_{PR} + \delta_{PR} \\ &= \bar{\gamma}_{PR} \bar{\alpha}_{PR}^{-1} \beta_{PR} + \delta_{PR}. \end{aligned}$$

Das Kürzen der Ausgangs-Entkopplungsnullstellen erfolgt zwischen den Matrizen γ_{PR} und α_{PR} ; eine Ausgangs-Entkopplungsnullstelle entspricht somit einer Eigenbewegung der internen Variablen ξ , die sich nicht auf die Ausgangsgröße y auswirkt.

Anmerkung: $S_{P_i}(s)$ sei die Smith-Form eines ggLt der Matrizen $\alpha_{PR_i}(s)$ und $\gamma_{PR_i}(s)$, $i = 1, 2$. Sind zwei System-Matrizen P_{PR1} und P_{PR2} äquivalent, so besitzen $\begin{bmatrix} \alpha_{PR1} \\ -\gamma_{PR1} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \alpha_{PR2} \\ -\gamma_{PR2} \end{bmatrix}$ dieselbe Smith-Form:

$$\begin{bmatrix} S_{P1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{P2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(vgl. Kapitel 2.2.1); folglich stimmen auch die Ausgangs-Entkopplungsnullstellen beider System-Matrizen überein.

Um zu überprüfen, ob eine System-Matrix Ausgangs-Entkopplungsnullstellen besitzt, müssen wir die Matrizen γ_{PR} und α_{PR} auf Rechts-Koprimheit untersuchen. Sie sind bekanntlich genau dann rechtskoprim, wenn die durch „Stapeln“ von γ_{PR} und α_{PR} entstehende Matrix für alle komplexen Zahlen s vollen Spaltenrang hat (vgl. (2.17)):

Satz 3.4 (Existenz von Ausgangs-Entkopplungsnullstellen)_____

Eine Rosenbrock-System-Matrix besitzt genau dann keine Ausgangs-Entkopplungsnullstelle, wenn

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) \\ \gamma_{PR}(s) \end{bmatrix} = n \quad \text{für alle } s. \quad (3.15)$$

Anmerkung: Der Definition der Rosenbrock-System-Matrix kann man unmittelbar die äquivalente Bedingung für die Matrizen α_P und γ_P der (nicht erweiterten) System-Matrix P_P entnehmen: (3.15) ist genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{bmatrix} \alpha_P(s) \\ \gamma_P(s) \end{bmatrix}$$

für alle komplexen s vollen Spaltenrang aufweist.

Nun wenden wir diese Rangbedingungen wiederum auf die betrachteten Spezialfälle „Zustandsmodell“, „linke“ und „rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung“ an. Wir erhalten:

	Notwendige u. hinreichende Bedingung für die Nicht-Existenz von Ausgangs-Entkopplungsnulstellen	
Zustandsdarstellung	$\begin{bmatrix} (sI_n - A) \\ C \end{bmatrix}$	besitzt vollen Spaltenrang (n) für alle s
rechte PMbd	$\begin{bmatrix} M_P(s) \\ N_P(s) \end{bmatrix}$	besitzt vollen Spaltenrang q für alle s
linke PMbd	immer erfüllt	

Gl. (2.50) entnimmt man sofort, daß die Matrizen α_{PR} und γ_{PR} einer linken Polynom-Matrizenbruchdarstellung immer die Rangbedingung (3.15) erfüllen. In einer linken Polynom-Matrizenbruchdarstellung können deshalb keine Ausgangs-Entkopplungsnulstellen auftreten.

Bei Zustandsmodellen ist die Existenz von Ausgangs-Entkopplungsnulstellen gleichbedeutend mit Nicht-Beobachtbarkeit bestimmter Eigenbewegungen: Obige Rangbedingung für

$$\begin{bmatrix} (sI_n - A) \\ C \end{bmatrix}$$

stellt deswegen ein Kriterium für Beobachtbarkeit des Matrizenpaares (C, A) dar. Es wird als *Popov-Belevitch-Hautus (PBH) Beobachtbarkeitstest* bezeichnet. Mit Hilfe dieses Tests läßt sich offensichtlich direkt angeben, ob ein System-Pol $s = p$ beobachtbar ist: Weist die untersuchte Matrix an dieser Stelle einen Rangabfall auf, so wird der fragliche Pol gegen eine Ausgangs-Entkopplungsnulstelle gekürzt und kann sich somit nicht auf die Ausgangsgrößen auswirken. Liegen alle Ausgangs-Entkopplungsnulstellen (und damit sämtliche nicht beobachtbaren System-Pole) links der imaginären Achse, so wird das Zustandsmodell *entdeckbar* genannt.

3.2.4 Ein/Ausgangs-Entkopplungsnullstellen

Ein/Ausgangs-Entkopplungsnullstellen (EAE-Nullstellen) entsprechen System-Polen, die sich weder von den Eingangsgrößen anregen noch über die Ausgangsvariable „beobachten“ lassen. Wie lassen sich solche Nullstellen berechnen? Hierzu betrachten wir nochmals die Vorgehensweise auf Seite 100: Dort bestimmten wir zuerst einen ggLt L_P der Matrizen α_{PR} und β_{PR} und erhielten

$$\begin{bmatrix} \alpha_{PR} & \beta_{PR} \\ -\gamma_{PR} & \delta_{PR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_P & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR} & \bar{\beta}_{PR} \\ -\gamma_{PR} & \delta_{PR} \end{bmatrix}.$$

Anschließend berechneten wir einen ggRt \bar{R}_P der Matrizen $\bar{\alpha}_{PR}$ und γ_{PR} ; es ergab sich:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{PR} & \beta_{PR} \\ -\gamma_{PR} & \delta_{PR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_P & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR} & \bar{\beta}_{PR} \\ -\gamma_{PR} & \delta_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_P & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Jeder ggRt R_P der Matrizen α_{PR} und γ_{PR} wird von \bar{R}_P von rechts geteilt: Laut Satz 2.1 existiert nämlich ein geeignetes unimodulares U_P , so daß

$$\begin{bmatrix} R_P \\ 0 \end{bmatrix} = U_P \begin{bmatrix} \alpha_{PR} \\ -\gamma_{PR} \end{bmatrix};$$

durch Einsetzen von (3.16) erhält man hieraus

$$\begin{bmatrix} R_P \\ 0 \end{bmatrix} = U_P \begin{bmatrix} L_P & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{PR} \\ -\gamma_{PR} \end{bmatrix} \bar{R}_P.$$

R_P ist also das Produkt einer (quadratischen) Polynom-Matrix und der Matrix \bar{R}_P . Demzufolge muß jede Wurzel von $\det \bar{R}_P(s)$ auch Wurzel von $\det R_P(s)$ und damit Ausgangs-Entkopplungsnullstelle sein. Die Umkehrung dieser Aussage braucht natürlich nicht zu gelten. Es ergibt sich also folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \{ \text{Wurzeln von } \det \bar{R}_P \} &\subseteq \{ \text{Wurzeln von } \det R_P \} \\ &= \{ \text{AE-Nullstellen} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Diejenigen Ausgangs-Entkopplungsnullstellen, die sich nicht in der Menge der Wurzeln von $\det \bar{R}_P$ wiederfinden, gingen offenbar beim „Herausziehen“ des ggLt L_P verloren: Sie sind Eingangs- und Ausgangs-entkoppelnd. Die Menge der EAE-Nullstellen erhält man also aus

$$\begin{aligned} \{ \text{EAE-Nullstellen} \} &= \{ \text{Ausgangs-Entkopplungsnullstellen} \} \\ &\quad - \{ \text{Wurzeln von } \det \bar{R}_P \}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Anmerkung: Linke Polynom-Matrizenbruchdarstellungen besitzen keine Ausgangs-, rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen keine Eingangs-Entkopplungsnullstellen, in beiden Fällen können demzufolge keine EAE-Nullstellen auftreten.

3.2.5 System-Nullstellen

Unter dem Begriff *System-Nullstellen* faßt man alle bisher behandelten Arten von Nullstellen zusammen. Um zu vermeiden, daß manche Nullstellen doppelt aufgeführt werden, betrachten wir zunächst, welche Beziehung zwischen der Menge der System-Pole und den verschiedenen Nullstellen besteht. Die Antwort auf diese Frage ergibt sich direkt aus den mengentheoretischen Beziehungen (3.14) und (3.18):

$$\begin{aligned}
 & \{\text{System-Pole}\} \\
 &= \{\text{Übertragungspole}\} \\
 & \quad \cup \{\text{Wurzeln von } \det L_P(s)\} \cup \{\text{Wurzeln von } \det \bar{R}_P(s)\} \\
 &= \{\text{Übertragungspole}\} \\
 & \quad \cup \underbrace{\{\text{EE-Nullstellen}\} \cup \{\text{AE-Nullstellen}\} \setminus \{\text{EAE-Nullstellen}\}}_{:=\{\text{Entkopplungsnullstellen}\}}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten die Menge der System-Pole also, indem wir den Übertragungspolen die Menge der Entkopplungsnullstellen hinzufügen. Man beachte die Definition der Entkopplungsnullstellen: Die EAE-Nullstellen sind sowohl in der Menge der EE- als auch der AE-Nullstellen enthalten; um ein doppeltes Auflisten zu verhindern, muß man die Menge der EAE-Nullstellen deshalb subtrahieren.

Nun können wir die System-Nullstellen definieren:

Definition 3.6 (System-Nullstellen)

Die System-Nullstellen einer (Rosenbrockschen) System-Matrix erhält man als Vereinigungsmenge von Übertragungsnullstellen und Entkopplungsnullstellen:

$$\begin{aligned}
 & \{\text{System-Nullstellen}\} \\
 &= \{\text{Übertragungsnullstellen}\} \cup \\
 & \quad \underbrace{\{\text{EE-Nullstellen}\} \cup \{\text{AE-Nullstellen}\} \setminus \{\text{EAE-Nullstellen}\}}_{\{\text{Entkopplungsnullstellen}\}}.
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Nicht reduzierbare System-Matrizen besitzen keine Entkopplungsnullstellen. In diesem Fall ist daher jede System-Nullstelle auch Übertragungsnullstelle .

Eine System-Matrix P_{PR} läßt sich mittels einer geeigneten Äquivalenztransformation (2.52) immer so umformen, daß wir vier Teilsysteme unterscheiden können (s. Bild 3.3):

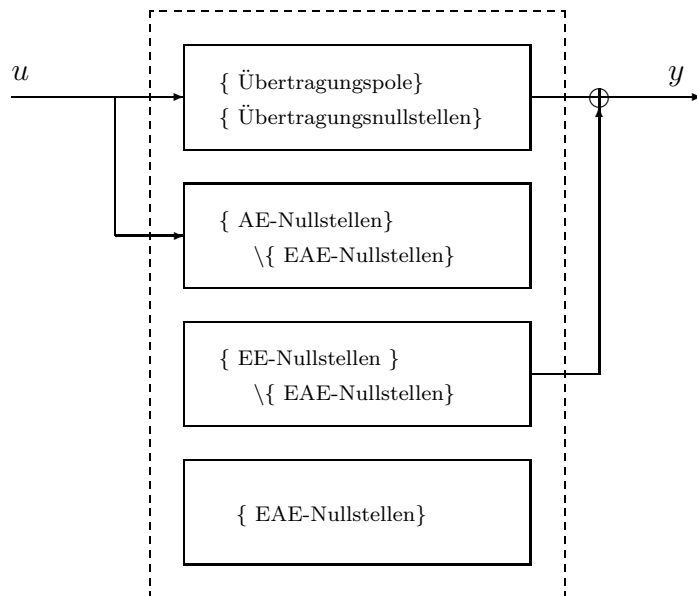


Bild 3.3: Zerlegung einer System-Matrix.

- Teilsystem 1 ist nicht reduzierbar; es enthält die Übertragungspole und Übertragungsnulstellen der System-Matrix. Sein Ein-/Ausgangsverhalten stimmt mit dem des Gesamtsystems überein.
- Die Menge der Pole und Nullstellen von Teilsystem 2 besteht aus allen Ausgangs-Entkopplungsnulstellen von P_{PR} , die nicht gleichzeitig Eingangs-Entkopplungsnulstelle sind; alle Pole dieses Teilsystems können also von außen angeregt werden, sie wirken sich aber nicht auf die Ausgangsvariable y aus.
- Teilsystem 3 enthält als Pole und Nullstellen sämtliche Eingangs-Entkopplungsnulstellen von P_{PR} , die nicht gleichzeitig Ausgangs-Entkopplungsnulstelle sind: Seine Pole machen sich im Systemausgang bemerkbar, können aber nicht über die Stellgröße u angeregt werden.
- Teilsystem 4 ist völlig „von der Außenwelt abgeschnitten“.

Befindet sich das transformierte System insbesondere in Zustandsform, so spricht man von der *Kalman-Zerlegung*. Teilsystem 1 ist dann beobachtbar und steuerbar (und deshalb eine Minimalrealisierung der zu P_{PR} gehörigen

Übertragungsmatrix); Teilsystem 2 ist steuerbar, aber vollständig nicht beobachtbar (i.e. der Rang seiner Beobachtbarkeitsmatrix beträgt Null); usw.

In der regelungstechnischen Literatur findet man oft noch eine weitere Art von Nullstellen – die sogenannten *invarianten Nullstellen*. Wir werden sie zwar im Folgenden nicht benötigen, der Vollständigkeit halber seien sie aber trotzdem erwähnt:

3.2.6 Invariante Nullstellen

Definition 3.7 (Invariante Nullstellen)

$s = z$ heißt invariante Nullstelle der Rosenbrockschen System-Matrix P_{PR} , wenn

$$\text{Rang } P_{PR}(z) < \text{Normalrang } P_{PR}(s).$$

Derart definierte Nullstellen erweisen sich als invariant bezüglich einer Rückführung der internen Variablen: Wenden wir das Rückführgesetz

$$u(s) = -K_P(s)\xi(s) + r(s).$$

auf ein durch $P_{PR}(s)$ beschriebenes System an, so ergibt sich als neue System-Matrix:

$$\begin{aligned} P_{PRn}(s) &= \begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) + \beta_{PR}(s)K_P(s) & \beta_{PR}(s) \\ -\gamma_{PR}(s) + \delta_{PR}(s)K_P(s) & \delta_{PR}(s) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{PR}(s) & \beta_{PR}(s) \\ -\gamma_{PR}(s) & \delta_{PR}(s) \end{bmatrix}}_{P_{PR}(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K_P(s) & I_q \end{bmatrix}}_{:=U_P(s)}. \end{aligned}$$

Die Matrix U_P ist unimodular (ihre Determinante ist 1), deshalb besitzen P_{PRn} und P_{PR} für alle s denselben Rang; folglich stimmen auch die invarianten Nullstellen beider System-Matrizen überein.

Die folgenden Eigenschaften lassen sich leicht nachweisen:

- Ist P_{PR} nicht reduzierbar, so sind die Menge der invarianten Nullstellen und die Menge der Übertragungsnullstellen identisch.
- Ist P_{PR} quadratisch und nichtsingulär (i.e. $p = q$ und Normalrang $P_{PR}(s) = n + p$), so stimmen invariante Nullstellen und System-Nullstellen überein.

- Im allgemeinen Fall gilt: Jede invariante Nullstelle ist System-Nullstelle, jede Übertragungsnullstelle (aber nicht notwendigerweise jede Entkopplungsnullstelle) ist invariante Nullstelle. Diese Beziehung ist in Bild 3.4 wiedergegeben.

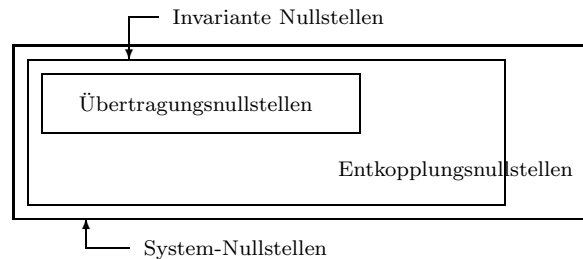


Bild 3.4: Nullstellen einer System-Matrix.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem einfachen Beispiel aus [64]:

Beispiel: Gegeben sei ein Zustandsmodell mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die zugehörige System- und Übertragungsmatrix lauten:

$$P_{PR}(s) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{3s+7}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}.$$

Die System-Pole sind die Wurzeln des Polynoms $\det \alpha_{PR}(s) = \det(sI_3 - A)$:

$$\{\text{System-Pole}\} = \{1, -1, -3\}$$

Aus der Smith-McMillan-Form der Übertragungsmatrix

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

können wir direkt die Übertragungspole und -nullstellen ablesen:

$$\begin{aligned}\{\text{Übertragungspole}\} &= \{-1, -3\} \\ \{\text{Übertragungsnullstellen}\} &= \{\}.\end{aligned}$$

Eingangs-Entkopplungsnullstellen sind diejenigen Frequenzen, für die $\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_3 - A & B \end{bmatrix} < 3$. Dies trifft nur auf $s = 1$ zu: Ausgangs-Entkopplungsnullstellen (und deshalb auch EAE-Nullstellen) existieren nicht, da für alle s

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_3 - A \\ -C \end{bmatrix} = 3.$$

Fassen wir Übertragungsnullstellen und (die einzige) Entkopplungsnullstelle zusammen, so erhalten wir die Menge der System-Nullstellen:

$$\{\text{System-Nullstellen}\} = \{1\}.$$

In diesem Beispiel liegen keine invarianten Nullstellen vor, da die einzig mögliche „Kandidatin“ (die System-Nullstelle $s = 1$) keinen Rangabfall der Matrix $P_{PR}(s)$ erzwingt.

3.3 Allpässe und minimalphasige Systeme

Ein skalarer Allpaß $g(s)$ zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, daß der Betrag seines Frequenzganges $g(j\omega)$ für alle ω gleich 1 ist. Ein solches Übertragungssystem weist bekanntlich eine zur imaginären Achse symmetrische Pol-Nullstellen-Verteilung auf:

$$g(s)g(-s) = 1.$$

Eine analoge Definition existiert im Falle quadratischer Übertragungsmatrizen. Bevor wir uns diesem Sonderfall zuwenden, betrachten wir jedoch allgemeinere (nicht notwendigerweise quadratische) Übertragungssysteme.

Definition 3.8 (Unitäre und ko-unitäre Übertragungsmatrizen, Allpässe) _____

Eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ mit $p \geq q$ heißt unitär, wenn gilt:

$$G^T(-s)G(s) = I_q. \quad (3.19)$$

Eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ mit $p \leq q$ nennt man ko-unitär, wenn:

$$G(s)G^T(-s) = I_p. \quad (3.20)$$

Unter einem Allpaß versteht man schließlich eine quadratische ($p \times p$ -) Übertragungsmatrix $G(s)$, für die gilt:

$$G^T(-s)G(s) = G(s)G^T(-s) = I_p. \quad (3.21)$$

Beispiel: Die Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ \frac{s}{s-1} \end{bmatrix}$$

ist unitär.

Anmerkung: Wie man leicht sieht, kann eine (ko-) unitäre Übertragungsmatrix (und damit auch ein Allpaß) weder (Übertragungs-) Pole noch Nullstellen auf der imaginären Achse besitzen. Für $s = j\omega$ gilt nämlich $G^T(-s) = G^T(\bar{s}) = G(s)^*$. An einer Nullstelle $s_N = j\omega_N$ weisen aber sowohl $G(s)^*G(s)$ als auch $G(s)G(s)^*$ einen Rangabfall auf; die eine (ko-) unitäre Übertragungsmatrix definierende Eigenschaft (3.19) bzw. (3.20) kann deshalb nicht gelten. Ein Pol $s_P = j\omega_P$ führt zu einer Singularität in G^*G und GG^* und ist deswegen ebenfalls nicht mit (3.19) bzw. (3.20) in Einklang zu bringen.

Die rechnerische Überprüfung dieser Eigenschaften erfolgt – zumindest bei komplexeren Systemen – am geschicktesten anhand einer Minimalrealisierung der untersuchten Übertragungsmatrix:

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Satz 3.5 (Wann ist $G(s)$ unitär?)_____

Die $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ ist genau dann unitär, wenn

$$D^T D = I_q \quad (3.22)$$

und eine reelle symmetrische Matrix Y existiert, so daß

$$A^T Y + Y A + C^T C = 0 \quad (3.23)$$

$$D^T C + B^T Y = 0. \quad (3.24)$$

Beweis: Mit den „Rechenregeln“ für konjugiertes Transponieren und Multiplizieren auf Seite 72 ergibt sich:

$$G^T(-s)G(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} -A^T & C^T C & C^T D \\ 0 & A & B \\ \hline -B^T & D^T C & D^T D \end{array} \right].$$

Nach Einführen der Ähnlichkeitstransformation

$$T = \begin{bmatrix} I_n & -Y \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

erhält man:

$$G^T(-s)G(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} -A^T & A^T Y + Y A + C^T C & C^T D + Y B \\ 0 & A & B \\ \hline -B^T & D^T C + B^T Y & D^T D \end{array} \right].$$

Nun ist leicht zu sehen, daß $G^T(-s)G(s)$ genau dann eine konstante Matrix ist, wenn ein reelles symmetrisches Y existiert, das (3.23) und (3.24) erfüllt. In diesem Fall wird die Dynamikmatrix blockdiagonal; der erste Block ($-A^T$) ist vollständig nicht steuerbar, der zweite (A) vollständig nicht beobachtbar. Die Definitionsgleichung für unitäre Übertragungsmatrizen ist in diesem Fall genau dann erfüllt, wenn die resultierende konstante Matrix $D^T D$ zur Einheitsmatrix wird, also (3.22) gilt. \square

Ganz analog zeigt man die folgenden Bedingungen:

Satz 3.6 (Wann ist $G(s)$ ko-unitär oder ein Allpaß?)_____

Die $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ ist genau dann ko-unitär, wenn

$$D D^T = I_p \quad (3.25)$$

und eine reelle symmetrische Matrix X existiert, so daß

$$A X + X A^T + B B^T = 0 \quad (3.26)$$

$$D B^T + C X = 0. \quad (3.27)$$

Schließlich ist $G(s)$ genau dann ein Allpaß, wenn (3.25) und (3.22) gelten, sowie reelle symmetrische Matrizen X und Y existieren, die (3.26), (3.27) bzw. (3.23), (3.24) und

$$X Y = I_n \quad (3.28)$$

erfüllen. _____

Übertragungspole und Übertragungsnullstellen eines Allpasses liegen – wie im Eingrößenfall – symmetrisch zur imaginären Achse. Dies zeigt die folgende Überlegung:

Wir gehen von einer Minimalrealisierung der Übertragungsmatrix G aus. Wegen (3.22) und (3.25) gilt $D = I_p$. Wegen Minimalität der Zustandsdarstellung stimmen die Übertragungspole von G mit den System-Polen (d.h. mit den Wurzeln von $\det(sI_n - A)$), die Übertragungsnullstellen mit den invarianten Nullstellen (d.h. mit den Wurzeln der Determinante der System-Matrix) überein. Mit Hilfe der Schur-Formel (s. Anhang A), Beziehungen (3.24), (3.26) und (3.28) läßt sich die Determinante der System-Matrix wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & I_p \end{bmatrix} &= \det (sI_n - A + BC) \\ &= \det (sI_n - A - BB^T Y) \\ &= \det (sI_n - A + (AX + XA^T)Y) \\ &= \det (sI_n - A + A + XA^T Y) \\ &= \det (sI_n + XA^T Y) \\ &= \det (sI_n + A^T). \end{aligned}$$

Die Wurzeln von $\det(sI_n + A^T)$ (i.e. die Übertragungsnullstellen des Allpasses) und die Wurzeln von $\det(sI_n - A)$ (i.e. die Übertragungspole des Allpasses) liegen spiegelsymmetrisch zur imaginären Achse.

Meist werden wir uns nur mit einer Untermenge unitärer oder ko-unitärer Systeme befassen – mit Übertragungsmatrizen, die zusätzlich asymptotisch stabil sind:

Definition 3.9 (Verlustfreie und ko-verlustfreie Übertragungsmatrizen)

Eine asymptotisch stabile (ko-) unitäre Übertragungsmatrix $G(s)$ heißt (ko-) verlustfrei.

Beispiel: $\tilde{N}(s)$ und $\tilde{M}(s)$ seien Zähler- und Nennermatrix einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung $G(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ (vgl. Abschnitt 2.3.1). Es gilt also

$$\begin{aligned} \tilde{N}(s)\tilde{N}^T(-s) + \tilde{M}(s)\tilde{M}^T(-s) &= \begin{bmatrix} \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}(-s) & \tilde{M}(-s) \end{bmatrix}^T \\ &= I_p. \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} \widetilde{N}(s) & \widetilde{M}(s) \end{bmatrix}$ ist somit eine ko-verlustfreie Übertragungsmatrix.

Anmerkung: Im englischen Sprachgebrauch werden (ko-) verlustfreie Systeme synonym mit den Begriffen (*co-*) *lossless* und (*co-*) *inner* belegt.

Anmerkung: Eine Übertragungsmatrix ist genau dann verlustfrei, wenn gilt:

$$G^T(-s)G(s) = I_q, \quad \text{und} \quad (3.29)$$

$$G(s)^*G(s) - I_q \quad \text{negativ semidefinit} \\ \text{für alle } s \text{ mit } \operatorname{Re}(s) \geq 0. \quad (3.30)$$

Falls (3.29) erfüllt ist, folgt Äquivalenz von asymptotischer Stabilität und (3.30) aus dem Maximumprinzip der Funktionentheorie.

Wenn wir uns auf asymptotisch stabile Übertragungsmatrizen beschränken, alle Eigenwerte der Dynamikmatrix A einer Minimalrealisierung also links der imaginären Achse liegen, besitzen die Gleichungen (3.23) und (3.26) eindeutige symmetrische positiv definite Lösungen – die sogenannten *Beobachtbarkeits-* und *Steuerbarkeits-Gramschen* P_o und P_c :

$$Y = P_o := \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (3.31)$$

$$X = P_c := \int_0^\infty e^{A t} B B^T e^{A^T t} dt. \quad (3.32)$$

Um zu überprüfen, ob eine gegebene asymptotisch stabile Übertragungsmatrix verlustfrei ist, muß man also nur fragen, ob $D^T D = I_q$, und ob die Beobachtbarkeits-Gramsche Y die Bedingung $D^T C + B^T Y = 0$ erfüllt. Analoges gilt für ko-verlustfreie (aber asymptotisch stabile) Übertragungsmatrizen. Geht man von einer nicht notwendigerweisen minimalen Zustandsdarstellung aus, so können Beobachtbarkeits- (und/oder Steuerbarkeits-) Gramsche singular sein. Die Matrizen Y (bzw. X) brauchen in diesem Fall also nur positiv *semidefinit* zu sein.

Nicht nur den Begriff eines Allpasses, sondern auch den eines minimalphasigen Systems kann man problemlos auf den Mehrgrößenfall übertragen:

Definition 3.10 (Minimalphasige Mehrgrößensysteme) _____

Eine asymptotisch stabile quadratische Übertragungsmatrix wird als minimalphasig bezeichnet, wenn sie keine Übertragungsnullstellen rechts der imaginären Achse besitzt. _____

Beispiel: Jede in \mathcal{RH}_∞ invertierbare Matrix (i.e. jedes $G \in \mathcal{UH}_\infty^{p \times p}$) ist minimalphasig.

Wie im Eingrößenfall kann man jede asymptotisch stabile und realisierbare Übertragungsmatrix G in einen minimalphasigen und einen verlustfreien Anteil aufspalten. Im englischen Sprachgebrauch wird diese Zerlegung als *inner-outer-factorization* bezeichnet. Besitzt die Übertragungsmatrix G für alle $s = j\omega$ vollen Spaltenrang (d.h. es liegen keine Übertragungsnullstellen auf der imaginären Achse und die Durchgriffsmatrix D hat vollen Spaltenrang), so kann man eine einfache, auf einer (nicht notwendigerweise minimalen) Zustandsdarstellung von G basierende Rechenvorschrift angeben:

Satz 3.7 (Zerlegung in ein minimalphasiges und ein verlustfreies Übertragungssystem)

$G(s)$ sei eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix ($p \geq q$) mit Rang q für alle $s = j\omega$ und einer asymptotisch stabilen Zustandsdarstellung

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Dann kann man G in eine verlustfreie $p \times q$ -Übertragungsmatrix G_v und ein minimalphasiges $q \times q$ -System G_m aufspalten:

$$G = G_v G_m;$$

G_m und G_v besitzen folgende Zustandsdarstellung:

$$G_m(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_m & D_m \end{array} \right] \quad (3.33)$$

$$G_v(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A - BD_m^{-1}C_m & -BD_m^{-1} \\ \hline -C + DD_m^{-1}C_m & DD_m^{-1} \end{array} \right], \quad (3.34)$$

wobei:

$$\begin{aligned} D_m &= (D^T D)^{\frac{1}{2}} \\ C_m &= D_m^{-1}(D^T C + B^T X); \end{aligned}$$

X ist die symmetrische positiv-semidefinite Lösung der Riccati-Gleichung

$$\begin{aligned} (A - BD_m^{-2}D^T C)^T X + X(A - BD_m^{-2}D^T C) - \\ - XBD_m^{-2}B^T X + (C - DD_m^{-2}D^T C)^T (C - DD_m^{-2}D^T C) = 0, \end{aligned}$$

die garantiert, daß alle Eigenwerte der Matrix

$$A - BD_m^{-2}(D^T C + B^T X) = A - BD_m^{-1}C_m \quad (3.35)$$

links der imaginären Achse liegen.

Beweis: Durch Anwenden der „Rechenregeln“ für Multiplikation zweier Zustandsmodelle und anschließendes Einführen einer Ähnlichkeitstransformation

$$T = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

zeigt man, daß

$$G_v G_m \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

G_m besitzt Dynamikmatrix A , ist also asymptotisch stabil. Durch Invertieren von (3.33) zeigt man, daß sich als Dynamikmatrix von G_m^{-1} gerade (3.35) ergibt, G_m^{-1} also ebenfalls asymptotisch stabil ist. (3.35) ist auch die Dynamikmatrix von G_v . Schließlich ist leicht zu sehen, daß für die Zustandsdarstellung (3.34) von G_v die Bedingungen (3.22) - (3.24) erfüllt sind, wenn $Y = X$ gewählt wird. G_v ist also verlustfrei.

Anmerkung: Zu Existenz und Eindeutigkeit der gesuchten Lösung der Riccati-Gleichung s. Anhang C.1.

Anmerkung: Man beachte, daß wegen der definierenden Eigenschaft verlustfreier Übertragungsmatrizen gilt:

$$\begin{aligned} G^T(-s)G(s) &= G_m^T(-s) \underbrace{G_v^T(-s)G_v(s)}_{I_q} G_m(s) \\ &= G_m^T(-s)G_m(s). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Wir können das Produkt $G^T(-s)G(s)$ also durch die minimalphasige Übertragungsmatrix G_m ausdrücken. Man bezeichnet (3.36) auch als *verlustfreie* bzw. *Spektral-Zerlegung*.

Später werden wir noch eine weitere Familie von Übertragungssystemen benötigen – sogenannte J_γ -verlustfreie und J_γ -ko-verlustfreie Übertragungsmatrizen:

Definition 3.11 (J_γ -verlustfreie Übertragungsmatrizen) _____
Für $\gamma > 0$ definieren wir

$$J_{\gamma lp} := \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_p \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Die $(l+p) \times (m+p)$ -Übertragungsmatrix $P(s)$, $l \geq m$, heißt J_γ -verlustfrei, wenn gilt:

$$P^T(-s) J_{\gamma lp} P(s) = J_{\gamma mp}, \quad (3.38)$$

$$P(s)^* J_{\gamma lp} P(s) - J_{\gamma mp} \quad \text{negativ-semidefinit} \\ \text{für alle } s \text{ mit } \operatorname{Re}(s) \geq 0. \quad (3.39)$$

J_γ -ko-verlustfreie Übertragungsmatrizen werden analog definiert.

Anmerkung: Im Gegensatz zu verlustfreien Übertragungsmatrizen brauchen J_γ -verlustfreie Übertragungsmatrizen nicht asymptotisch stabil zu sein. Umgekehrt ist eine asymptotisch stabile Übertragungsmatrix, für die (3.38) gilt, nicht notwendigerweise J_γ -verlustfrei.

Anhand einer Zustandsdarstellung der Übertragungsmatrix $P(s)$ kann man leicht überprüfen, ob P J_γ -verlustfrei ist:

Satz 3.8 (Wann ist $P(s)$ J_γ -verlustfrei?)

Die $(l+p) \times (m+p)$ -Übertragungsmatrix $P(s)$ besitze eine Zustandsdarstellung

$$P(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

P ist genau dann J_γ -verlustfrei, wenn

$$D^T J_{\gamma lp} D = J_{\gamma mp} \quad (3.40)$$

und eine positiv-semidefinite reelle symmetrische Matrix Y existiert, so daß

$$A^T Y + Y A + C^T J_{\gamma lp} C = 0 \quad (3.41)$$

$$D^T J_{\gamma lp} C + B^T Y = 0. \quad (3.42)$$

Beweis: Wie beim Beweis von Satz 3.5 prüft man leicht nach, daß (3.40) und die Existenz eines reellen symmetrischen (nicht notwendigerweise positiv-definiten) und (3.41) -(3.42) genügenden Y gleichbedeutend mit (3.38) ist. Zur Äquivalenz von zusätzlicher Definitheitsbedingung und (3.39) s. [33]. \square

Anmerkung: Falls wir von einer *Minimalrealisierung* des Systems $P(s)$ ausgehen, muß die (3.41) und (3.42) genügende Matrix Y positiv-definit sein.

Anmerkung: Man beachte, daß sich die Gleichungen (3.38) und (3.39) auf die eine verlustfreie Matrix definierenden Beziehungen (3.29) und (3.30) reduzieren, wenn $p = 0$ – wir also $J_{\gamma lp}$ durch die Einheitsmatrix I_l ersetzen. Zur Lösung des H_∞ -Problems in Kapitel 10 werden wir die sogenannte *J_γ -verlustfreie Faktorisierung* benötigen. Die Behandlung dieses Algorithmus schieben wir noch auf. An dieser Stelle sei nur auf die Parallele zur verlustfreien Zerlegung hingewiesen: Bei letzterer berechnet man zu einer gegebenen asymptotisch stabilen Übertragungsmatrix $G(s)$ eine minimalphasige Matrix $G_m(s)$, so daß (3.36) gilt und damit $G(s)G_m^{-1}(s)$ verlustfrei wird. Bei der J_γ -verlustfreien Faktorisierung sucht man für eine vorgegebene $(l + p) \times (m + p)$ -Übertragungsmatrix $P(s)$ ($l \geq m$) eine minimalphasige $(m + p) \times (m + p)$ -Matrix $W(s)$, so daß sich ein J_γ -verlustfreies $P(s)W^{-1}(s)$ ergibt. Im Falle $p = 0$ reduziert sich dieser Algorithmus auf die bekannte verlustfreie Zerlegung.

3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel behandelten wir Pole und Nullstellen von externen und internen Modellen. Im ersteren Fall sprechen wir von Übertragungspolen bzw. Übertragungsnullstellen. Diese Größen werden anhand einer Normalform der Übertragungsmatrix, der Smith-McMillan-Form, definiert. Ihre Bedeutung entspricht der von Polen und Nullstellen skalarer Übertragungsfunktionen. Allerdings können im Mehrgrößenfall „neue“ Phänome auftreten – wie z.B. Übertragungspole und -nullstellen an derselben Stelle der s -Ebene.

Interne Modelle können außer Übertragungspolen noch weitere Pole besitzen. Diese treten bei der Betrachtung des System-Ein-/Ausgangsverhaltens nicht in Erscheinung: Zu solchen Polen gehörende Eigenbewegungen lassen sich entweder nicht von außen anregen (sie werden bei der Bildung der Übertragungsmatrix gegen Eingangs-Entkopplungsnullstellen gekürzt) oder nicht von außen wahrnehmen (sie werden gegen Ausgangs-Entkopplungsnullstellen gekürzt). Diese Eigenschaften wurden am allgemeinen Fall – der Rosenbrock-System-Matrix – untersucht und anschließend auf spezielle polynomiale Modelle (linke und rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellungen, Zustandsdarstellungen)

übertragen. Bei Zustandsmodellen ist die Existenz von Entkopplungsnullstellen gleichbedeutend mit Nicht-Minimalität. Umgekehrt impliziert Minimalität einer Realisierung, daß jede System-Nullstelle auch Übertragungsnullstelle ist.

Mit Hilfe der Begriffe „Übertragungspol“ und „-nullstelle“ konnten wir schließlich Allpässe und minimalphasige Systeme im Mehrgrößenfall definieren.

3.5 Literaturhinweise

Als Standardreferenz für die meisten der in diesem Kapitel behandelten Themen können wiederum die Bücher von *Rosenbrock* [98] und *Kailath* [47] gelten. Die hier präsentierte Darstellung orientiert sich weitgehend an [98]. Eine weitere ausführliche Diskussion von Polen und Nullstellen findet man bei *MacFarlane* und *Karcanias* [64]. Satz 3.5 und 3.6 gehen auf *Glover* [34] zurück. Der vorgestellte Algorithmus zur Spektral-Faktorisierung wurde dem Buch von *Francis* [26] entnommen. Weitere Informationen zu J_γ -verlustfreien Übertragungsmatrizen kann man den Aufsätzen von *Genin et al.* [33] und *Kimura* [52] entnehmen. Eine übersichtliche Darstellung von Lösbarkeitsbedingungen und Lösung algebraischer Riccati-Gleichungen gibt z.B. *Kučera* [55].

„Desperate diseases require desperate
remedies“

– Guy Fawkes

II Regelungstechnische Ziele

Kapitel 4

Vorbemerkungen

In diesem Teil werden wir diskutieren, wie sich regelungstechnische Ziele in geeigneter Weise mathematisch formulieren lassen. Wir werden Kriterien besprechen, anhand derer wir überprüfen können, ob diese Ziele mittels eines vorgegebenen Reglers verwirklicht werden. Schließlich werden wir auf Grenzen erreichbarer Regelkreiseigenschaften eingehen, die sich mit keinem linearen zeitinvarianten Regler überwinden lassen und deshalb bei der Formulierung der Zielvorstellungen immer mitberücksichtigt werden müssen. Der Vorgang des eigentlichen Reglerentwurfs – auf den wir in Teil III ausführlich zu sprechen kommen werden – kann dann als bloßes Umsetzen der formulierten Ziele in geeignete Regelalgorithmen verstanden werden. In diesem Sinne stellt eine ausführliche Diskussion von Zielen einen einheitlichen „Überbau“ für alle in diesem Buch behandelten Entwurfsverfahren dar.

Jeder Reglerentwurf basiert auf einem die Wirklichkeit i.a. stark vereinfachenden Modell. Dieses Modell bezeichnen wir als *Entwurfsmodell*. Das eigentliche Ziel des Entwurfs besteht nun aber sicherlich nicht darin, die formulierten Ziele für dieses Modell zu verwirklichen; die gesteckten Ziele sollen vielmehr an der realen Strecke erreicht werden. Da die reale Strecke durch kein noch so komplexes mathematisches Modell *exakt* beschrieben werden kann, läßt sich hierfür allerdings prinzipiell *kein mathematisches Kriterium* angeben. Den einzig letztendlich schlüssigen Test stellt die praktische Erprobung des Reglers dar. Auf mathematischer Ebene läßt sich dagegen sehr wohl untersuchen, ob ein Regler eine Klasse wohldefinierter Modellfehler toleriert, ob die gesteckten Ziele also für eine *Menge* von Streckenmodellen realisiert werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von *robuster Regelung*. Bildet die betrachtete Klasse von Modellfehlern eine „sinnvolle“ Beschreibung der physikalischen Fehlerursachen, so werden wir der Implementierung eines robusten Regelalgorithmus mit größerer Zuversicht entgegenschauen, als wenn wir die Auslegung des Reglers ausschließlich anhand des Entwurfsmodells vorgenommen hätten.

Die im folgenden dargestellten Überlegungen beruhen auf den in Bild 4.1 zusammengefaßten Modellvorstellungen:

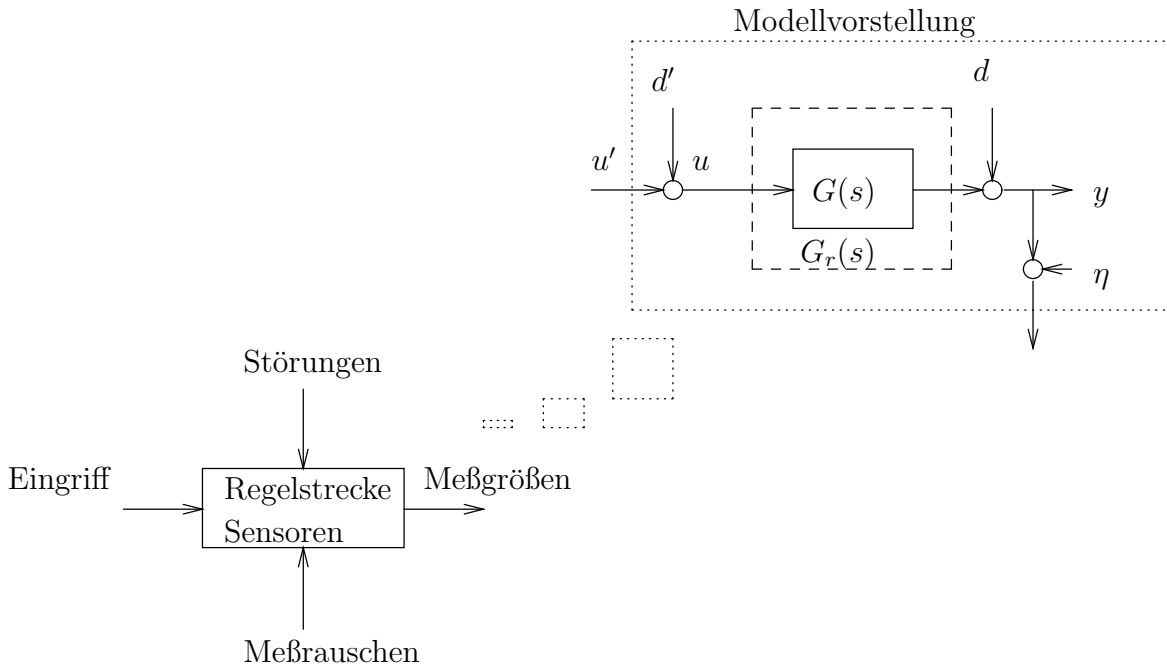


Bild 4.1: Modellvorstellung.

- Störungen greifen additiv am Streckenein- und -ausgang an.
- Meßfehler gehen additiv in die Meßgrößen ein.
- Der Zusammenhang zwischen Stelleingriffen und Meßgrößen läßt sich durch ein System gewöhnlicher linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen (i.e. eine Übertragungsmatrix) beschreiben. Das Entwurfsmodell nennen wir $G(s)$; die Menge von Streckenmodellen, die der zu entwerfende Regler „beherrschen“ soll, bezeichnen wir mit $\{G_r(s)\}$. Verschiedene Möglichkeiten, $\{G_r(s)\}$ bzw. die Menge der zulässigen Modellfehler $\{G_r - G\}$ zu charakterisieren, werden wir in Abschnitt 6.1 besprechen.

Alle in diesem Kapitel geschilderten Ausführungen beziehen sich auf das in Bild 4.2 gezeigte Modell eines einfachen Mehrgrößen-Regelkreises. Entwurfsmodell $G(s)$ und Regler $K(s)$ seien realisierbare $p \times q$ - bzw. $q \times p$ -Übertragungsmatrizen. Damit liegen auch die Dimensionen von vektorieller Regelgröße y , Stellvariable u , Störungen d und d' , Führungsgröße r , Meßrauschen η , Regeldifferenz e , Reglerein- und -ausgangssignal e' und u' fest. Wir

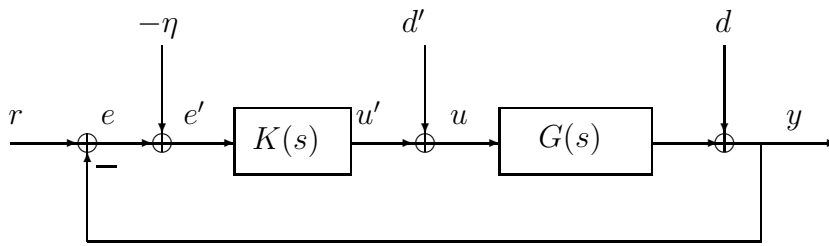


Bild 4.2: Mehrgrößen-Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

werden i.a. davon ausgehen, daß $p \leq q$, die Zahl der Regelgrößen die Zahl der Stellvariablen also nicht übersteigt. Man sagt, der in Bild 4.2 gezeigte Regelkreis besitze *einen* Freiheitsgrad – die zu entwerfende Regler-Übertragungsmatrix $K(s)$. Bei manchen der im folgenden durchgeführten Überlegungen erweist es sich als zweckmäßig, diesen Regelkreis in etwas allgemeinerer Form darzustellen: Sämtliche relevanten von außen am Kreis angreifenden Signale werden zu einem (vektoriellen) *externen Eingangssignal* w zusammengefaßt. Alle Signale, die wir zur Beurteilung der „Güte“ der Regelung heranziehen (und die deswegen für einen „externen“ Beobachter interessant sind), fassen wir zu einem Vektor z von *externen Ausgangssignalen* zusammen. Auf diese Art führen wir ein *verallgemeinertes Streckenmodell* $P(s)$ ein, das neben externen Ein- und Ausgangsgrößen einen weiteren Satz von Ein- und Ausgangsvariablen besitzt (s. Bild 4.3): Die vom Regler kommenden Signale u'

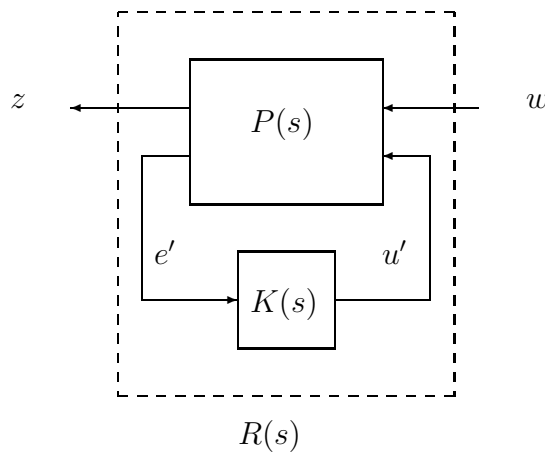


Bild 4.3: Verallgemeinerter Regelkreis mit einem Freiheitsgrad.

werden als *interne Eingangsgrößen*, die dem Regler zur Verfügung stehenden Signale e' als *interne Ausgangsvariable* des verallgemeinerten Streckenmodells P bezeichnet. P und die Rückführung K bilden den *verallgemeinerten Regelkreis* R . Die Signalflußrichtung in Bild 4.3 ist umgekehrt, weil sie dann mit

der Schreibweise der Matrizenmultiplikation übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ e' \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} w \\ u' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}w + P_{12}u' \\ P_{21}w + P_{22}u' \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Durch Einsetzen der Reglergleichung

$$u' = Ke'$$

in (4.1) erhält man die Übertragungsmatrix des verallgemeinerten Kreises:

$$R = P_{11} + P_{12}K(I_p - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (4.2)$$

$$= P_{11} + P_{12}(I_q - KP_{22})^{-1}KP_{21} \quad (4.3)$$

$$:= \mathcal{F}_L(P, K). \quad (4.4)$$

$\mathcal{F}_L(P, K)$ wird im englischen Sprachgebrauch als „Lower linear fractional transformation (LLFT)“ von K bezüglich P bezeichnet und ist immer dann definiert, wenn $\det(I_p - P_{22}(\infty)K(\infty)) \neq 0$. In diesem Fall gewährleisten Realisierbarkeit von verallgemeinertem Streckenmodell P und Regler K auch Realisierbarkeit von $\mathcal{F}_L(P, K)$. (4.3) gilt wegen der in Anhang A aufgeführten Matrizen-Identität (A.1).

Ein einfaches Beispiel soll die Vorgehensweise beim Bilden eines verallgemeinerten Streckenmodells illustrieren:

Beispiel: Nehmen wir an, in einem konkreten Anwendungsfall interessiert man sich nur für die Reaktion des Regelkreises auf Ausgangsstörungen d . Meßrauschen, Eingangsstörungen und Führungsgröße verschwinden. Ob der Regelkreis befriedigend arbeitet, beurteilen wir anhand der Regeldifferenz e und der Aktivität der Stellgrößen u . In diesem Fall besteht die externe Eingangsgröße w aus dem Vektor d , die externe Ausgangsgröße z setzt sich aus e und u zusammen (Bild 4.4). Aus Bild 4.4 läßt sich unmittelbar ablesen, daß

$$\begin{bmatrix} z \\ e' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_p \\ 0 \\ -I_p \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -G \\ I_q \\ -G \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} w \\ u' \end{bmatrix}.$$

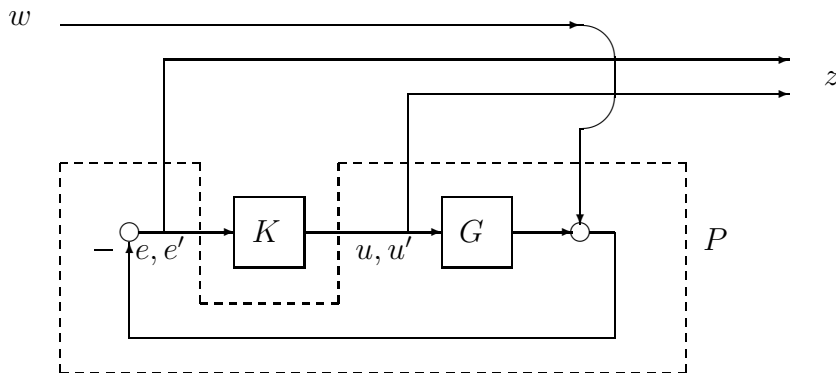


Bild 4.4: Beispiel für ein verallgemeinertes Streckenmodell.

In vielen Anwendungsfällen wird man sich allerdings einer komplexeren, mit mehreren Freiheitsgraden ausgestatteten Regelkreis-Konfiguration bedienen: Sollen z.B. die Reaktionen des Regelkreises auf Änderungen von Führungsgröße und am Streckenausgang angreifender Störungen voneinander unabhängig gestaltet werden, benötigt man einen zweiten Freiheitsgrad. Dieser wird oft in Gestalt eines „Führungs-“ oder „Vorfilters“ $K_F(s)$ implementiert (s. Bild 4.5). Falls sich auf die Regelstrecke wirkende Störungen messen lassen, werden wir diese zusätzlich verfügbare Meßinformation in aller Regel zu einer direkten Störungs-Kompensation nutzen (vgl. Bild 4.5).

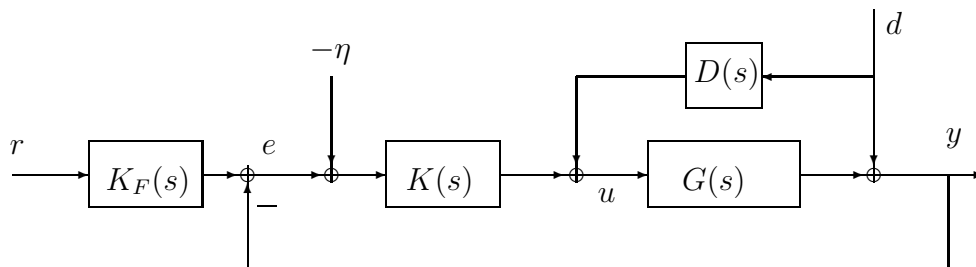


Bild 4.5: Mehrgrößen-Regelkreis mit Führungsfilter und Störgrößen-Aufschaltung.

Um den Formalismus so überschaubar wie möglich zu gestalten, beschränken wir uns auf die in Bild 4.2 bzw. 4.3 gezeigten Regelkreise mit *einem* Freiheitsgrad. Sie stellen – was die Erreichbarkeit der zu diskutierenden regelungstechnischen Ziele anlangt – eine Art „worst case“ dar: Wir verzichten auf die Möglichkeit einer Störgrößen-Aufschaltung und eines Führungsfilters. Verhindern diese Restriktionen, daß wir in einem konkreten Anwendungsfall bestimmte regelungstechnische Ziele erreichen, so lassen sich die meisten der

in den folgenden Kapiteln dargestellten Überlegungen problemlos auf die komplexere Konfiguration in Bild 4.5 übertragen.

Um die Diskussion regelungstechnischer Ziele zu strukturieren, betrachten wir zunächst den *nominellen Fall*: Wir stellen uns auf den Standpunkt, nur das Entwurfsmodell interessiere, setzen also $\{G_r\} = G$. Bei dieser Diskussion unterscheiden wir zwischen gewünschten qualitativen Eigenschaften (Stabilität) und quantitativen Eigenschaften (Führungs- und Störverhalten, Unterdrückung von Meßrauschen). In Abschnitt 6.1 setzen wir uns mit verschiedenen Möglichkeiten auseinander, Mengen von Modellfehlern zu definieren. Anschließend behandeln wir, wie sich *Unempfindlichkeit* bzw. *Robustheit* erwünschter Regelkreiseigenschaften bezüglich solcher Modellfehler garantieren läßt. Diese Systematik der Entwurfsziele ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Untersuchung des nominellen Falles ($G = \{G_r\}$)	Robustheits- untersuchung ($G \subset \{G_r\}$)
Qualitative Eigenschaften	Abschnitt 5.1	Abschnitt 6.2
Quantitative Eigenschaften	Abschnitt 5.2	Abschnitt 6.3

Kapitel 5

Nominelle Ziele

5.1 Stabilität im nominellen Fall

Wir bezeichnen den (nominellen) Regelkreis aus Bild 4.2 mit (G, K) . Im folgenden setzen wir immer voraus, daß sowohl das Entwurfsmodell $G(s)$ als auch die Regler-Übertragungsmatrix $K(s)$ proper sind. Wir nehmen weiterhin an, daß (G, K) *sinnvoll konfiguriert* ist. Hierunter verstehen wir, daß die Übertragungsmatrizen zwischen allen von außen auf den Regelkreis wirkenden Signalen (r, η, d', d) und allen regelkreisinternen Variablen (e, e', u', u, y) existieren und realisierbar (proper) sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\det(I_p + G(\infty)K(\infty)) \neq 0. \quad (5.1)$$

Man beachte, daß (5.1) „automatisch“ erfüllt wird, wenn das Entwurfsmodell G streng proper ist; dies trifft in den meisten Anwendungsfällen zu.

Nun wenden wir uns der Frage der Stabilität des Regelkreises (G, K) zu:

Definition 5.1 (Asymptotische Stabilität von (G, K)) _____

Man sagt, der Regelkreis (G, K) sei asymptotisch stabil, wenn (G, K) sinnvoll konfiguriert ist und alle Übertragungsmatrizen zwischen von außen auf den Kreis wirkenden Signalen und allen regelkreisinternen Variablen asymptotisch stabil sind. _____

Anmerkung: Dieser Stabilitätsbegriff wird oft auch als *interne Stabilität* bezeichnet, weil nach Verschwinden beliebiger externer Eingangssignale alle regelkreisinternen Signale auf Null abklingen.

Wie das folgende Beispiel zeigt, genügt es *nicht*, asymptotische Stabilität der Übertragungsmatrix $(I_p + GK)^{-1}GK$ zu fordern.

Beispiel: Wir betrachten der Einfachheit halber einen Eingrößen-Regelkreis; die Übertragungsfunktionen von Entwurfsmodell und Regler lauten:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1},$$

$$K(s) = \frac{s+3}{s-1}.$$

Für die Führungs-Übertragungsfunktion (die Übertragungsfunktion von r nach y) ergibt sich:

$$\left. \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{\eta, d, d'=0} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

$$= \frac{s+3}{2s+4}.$$

Sie ist offensichtlich asymptotisch stabil. Zwischen der Führungsgröße r und der Stellvariablen u hingegen erhalten wir eine instabile Übertragungsfunktion:

$$\left. \frac{u(s)}{r(s)} \right|_{\eta, d, d'=0} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}$$

$$= \frac{(s+1)(s+3)}{2(s-1)(s+2)};$$

die Stellgrößen werden in diesem Fall also aufklingen.

Glücklicherweise brauchen wir nicht alle denkbaren Übertragungsmatrizen zu überprüfen, um eine Aussage über die Stabilität von (G, K) zu ermöglichen: Wie man Bild 4.2 entnehmen kann, stimmen viele dieser Übertragungsmatrizen überein oder unterscheiden sich nur im Hinblick auf Vorzeichen oder additives Hinzufügen einer Einheitsmatrix. Durch einfaches Berechnen und Vergleichen aller Übertragungsmatrizen kann man deshalb leicht zeigen, daß asymptotische Stabilität des Regelkreises (G, K) genau dann vorliegt, wenn – wie vereinbart – (5.1) gilt und die Übertragungsmatrizen von r und d' auf y und u' asymptotisch stabil sind, d.h. alle Übertragungspole der durch

$$\begin{bmatrix} y \\ u' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (I_p + GK)^{-1}GK & (I_p + GK)^{-1}G \\ K(I_p + GK)^{-1} & -K(I_p + GK)^{-1}G \end{bmatrix}}_{:=W(s)} \begin{bmatrix} r \\ d' \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

definierten Übertragungsmatrix $W(s)$ links der imaginären Achse liegen. Eine Bestimmungsgleichung für diese Pole leiten wir im folgenden Abschnitt her.

Anmerkung: Ist der Regler $K(s)$ asymptotisch stabil, so genügt es, die Übertragungsmatrix $(I_p + GK)^{-1}G$ zu betrachten. Wie man leicht nachprüft, impliziert asymptotische Stabilität dieses Terms in diesem Fall asymptotische Stabilität aller anderen „Blöcke“ der Übertragungsmatrix $W(s)$.

5.1.1 Pole des geschlossenen Regelkreises

Da asymptotische Stabilität der in (5.2) definierten Übertragungsmatrix $W(s)$ gleichbedeutend mit asymptotischer Stabilität des Regelkreises (G, K) ist, wollen wir die Übertragungspole von $W(s)$ als Übertragungspole des Regelkreises auffassen. Sie lassen sich besonders leicht bestimmen, wenn Entwurfsmodell und Regler als links- bzw. rechtskopprime Polynom-Matrizenbruchdarstellung vorliegen:

$$G(s) = \widetilde{M}_{PG}^{-1}(s)\widetilde{N}_{PG}(s), \quad (5.3)$$

$$K(s) = N_{PK}(s)M_{PK}^{-1}(s). \quad (5.4)$$

Für den 1, 1-„Block“ der Übertragungsmatrix W ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} (I_p + GK)^{-1}GK &= (I_p + GK)^{-1}(GK + \underbrace{I_p - I_p}_{=0}) \\ &= \underbrace{(I_p + GK)^{-1}(GK + I_p)}_{I_p} - (I_p + GK)^{-1} \\ &= I_p - (I_p + \widetilde{M}_{PG}^{-1}\widetilde{N}_{PG}N_{PK}M_{PK}^{-1})^{-1} \\ &= I_p - M_{PK}(\underbrace{\widetilde{M}_{PG}M_{PK} + \widetilde{N}_{PG}N_{PK}}_{:=\alpha_P})^{-1}\widetilde{M}_{PG}; \end{aligned}$$

auf gleiche Art und Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} (I_p + GK)^{-1}G &= M_{PK}\alpha_P^{-1}\widetilde{N}_{PG}, \\ K(I_p + GK)^{-1} &= N_{PK}\alpha_P^{-1}\widetilde{M}_{PG}, \\ -K(I_p + GK)^{-1}G &= -N_{PK}\alpha_P^{-1}\widetilde{N}_{PG}. \end{aligned}$$

Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so können wir W in Abhängigkeit von Zähler- und Nennermatrizen von Entwurfsmodell und Regler schreiben:

$$W = \begin{bmatrix} M_{PK} \\ -N_{PK} \end{bmatrix} \alpha_P^{-1} \begin{bmatrix} -\widetilde{M}_{PG} & \widetilde{N}_{PG} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Nun können wir leicht eine Rosenbrock-System-Matrix mit Übertragungsverhalten W angeben:

$$P_{PR} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_Q-p} & 0 \\ 0 & \alpha_P \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\widetilde{M}_{PG} & \widetilde{N}_{PG} \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 & M_{PK} \\ 0 & -N_{PK} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

n_Q bezeichnet den Grad des Polynoms $\det \alpha_P(s)$. Der getroffenen Annahmen wegen (G und K sind proper, (G, K) ist sinnvoll konfiguriert) ergibt sich n_Q als direkte Summe der McMillan-Grade von Entwurfsmodell und Regler:

$$n_Q = n_G + n_K.$$

α_P und $\begin{bmatrix} -\widetilde{M}_{PG} & \widetilde{N}_{PG} \end{bmatrix}$ sind linkskoprim, da \widetilde{M}_{PG} und \widetilde{N}_{PG} ein linkskoprimales Paar bilden – jeder Linksteiler von $\begin{bmatrix} -\widetilde{M}_{PG} & \widetilde{N}_{PG} \end{bmatrix}$ und damit erst recht jeder *gemeinsame* Linksteiler von α_P und dieser Matrix ist unimodular. Mit analoger Begründung zeigt man Rechtskoprimheit von α_P und $\begin{bmatrix} M_{PK} \\ -N_{PK} \end{bmatrix}$.

Die System-Matrix P_{PR} ist folglich nicht reduzierbar; ihre System-Pole stimmen mit den Übertragungspolen der Matrix $W(s)$ überein. Wir haben also folgenden Sachverhalt gezeigt:

Satz 5.1 (Übertragungspole des geschlossenen Kreises)

Die Übertragungspole des geschlossenen Kreises (i.e. der in (5.2) definierten Matrix $W(s)$) sind die Wurzeln von

$$\det \alpha_P(s) = \det \left\{ \widetilde{M}_{PG}(s)M_{PK}(s) + \widetilde{N}_{PG}(s)N_{PK}(s) \right\}. \quad (5.7)$$

Wird der Anfangskoeffizient von (5.7) auf 1 normiert, so spricht man vom charakteristischen bzw. Pol-Polynom $p_{PgK}(s)$ des geschlossenen Kreises. —

Im nächsten Abschnitt bestimmen wir einen einfachen Zusammenhang zwischen charakteristischem Polynom des offenen und des geschlossenen Kreises.

5.1.2 Zusammenhang zwischen charakteristischem Polynom des offenen und des geschlossenen Kreises

Das charakteristische (oder Pol-) Polynom des offenen Kreises (p_{PoK}) ergibt sich als Produkt der Pol-Polynome von Entwurfsmodell und Regler; diese stimmen – wie wir aus Kapitel 3 wissen – bis auf reelle Konstanten mit den

Determinanten der Nennermatrizen der links- bzw. rechtskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellungen (5.3), (5.4) überein:

$$p_{PoK} = c_o \det M_{PK} \det \widetilde{M}_{PG}. \quad (5.8)$$

Nun bilden wir den Quotienten aus Pol-Polynom des geschlossenen (p_{PgK}) und des offenen (p_{PoK}) Kreises. Nach Anwendung der in Anhang A aufgeführten „Rechenregeln“ für Matrizen und Determinanten erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{p_{PgK}}{p_{PoK}} &= \frac{c_g \det \{ \widetilde{M}_{PG} M_{PK} + \widetilde{N}_{PG} N_{PK} \}}{c_o \det M_{PK} \det \widetilde{M}_{PG}} \\ &= \underbrace{\frac{c_g}{c_o}}_{:=c} \det \{ \widetilde{M}_{PG}^{-1} (\widetilde{M}_{PG} M_{PK} + \widetilde{N}_{PG} N_{PK}) M_{PK}^{-1} \} \\ &= c \det \{ I_p + \widetilde{M}_{PG}^{-1} \widetilde{N}_{PG} N_{PK} M_{PK}^{-1} \} \\ &= c \det \{ I_p + GK \}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

In Worte gefaßt lautet das Ergebnis also: Das Verhältnis zwischen charakteristischem Polynom des geschlossenen und des offenen Kreises wird – bis auf eine reelle Konstante c – durch die Determinante der Matrix $I_p + GK$ gegeben. Diese Matrix wird als *Rückführdifferenzenmatrix* bezeichnet. Der etwas seltsam anmutende Name erklärt sich folgendermaßen: Der in Bild 5.1 gezeigte autonome Regelkreis wird an der gezeigten Stelle „aufgetrennt“; nun

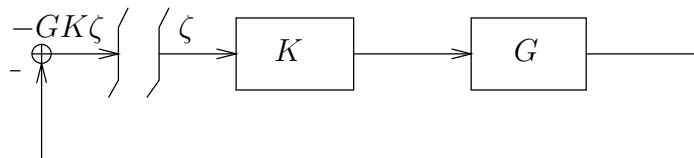


Bild 5.1: Rückführdifferenzenmatrix.

legen wir am Eingang der Regler-Übertragungsmatrix das Signal ζ an; auf der linken Seite der Trennstelle mißt man dann die Größe $-GK\zeta$; die Differenz zwischen eingespeistem und rückgeführtem Signal (i.e. $(I_p + GK)\zeta$) wird durch die Rückführdifferenzenmatrix charakterisiert.

Anmerkung: Gleichung (5.9) wird oft als *Chen-Hsu-Theorem* bezeichnet. Die ursprüngliche Herleitung dieses Theorems (s. [45]) stützte sich auf Zustandsmodelle – und war einiges aufwendiger als die oben geschilderte Vorgehensweise.

5.1.3 Graphische Stabilitätskriterien

Kennen wir das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises, so läßt sich – durch Anwendung der „klassischen“ Hurwitz- bzw. Beiwerte-Bedingung oder durch explizites Berechnen der Wurzeln – problemlos feststellen, ob (asymptotische) Stabilität vorliegt. Beide Kriterien geben allerdings wenig Hinweise, wie Reglerstruktur und -parameter gewählt werden müssen, um dieses Ziel zu erreichen. Sie sind also für *Entwurfszwecke* wenig geeignet. Wie bei Eingrößensystemen erweisen sich in dieser Beziehung *graphische Stabilitätstests* als nützlicher. Wir betrachten zunächst eine Mehrgrößen-Version des Nyquist-Kriteriums; eine als *verallgemeinertes Nyquist-Kriterium* bezeichnete Variante werden wir später direkt für den Regler-Entwurf heranziehen können.

5.1.3.1 Nyquist-Kriterium für Mehrgrößensysteme

Wir betrachten die in Bild 5.2 gezeigte *Nyquist-Kontur* \mathcal{N} . Sie beginnt im Ursprung der komplexen Ebene, verläuft entlang der positiven imaginären Achse (diesen Teil der Kontur \mathcal{N} bezeichnen wir mit \mathcal{N}_1), geht in einen Halbkreis mit unendlichem Radius über (\mathcal{N}_2) und bewegt sich auf der negativen imaginären Achse (\mathcal{N}_3) wieder in den Ursprung hinein. Besitzt das Entwurfsmodell G oder der Regler K Übertragungspole auf der imaginären Achse, so werden diese durch (verschwindend) kleine halbkreisförmige „Ausbuchtungen“ in die linke Halbebene umgangen. Auf diese Weise stellen wir sicher, daß alle grenz- und instabilen Pole von G und K im Innern der Nyquist-Kontur \mathcal{N} liegen. s durchlaufe einmal die Nyquist-Kontur \mathcal{N} (im Uhrzeigersinn). Für jedes $s \in \mathcal{N}$ tragen wir $\det(I_p + G(s)K(s))$ in der komplexen Ebene auf; wir erhalten eine geschlossene Kurve – die *Nyquist-Ortskurve* Γ . Anders ausgedrückt: die Funktion $\det(I_p + G(s)K(s))$ bildet die Nyquist-Kontur \mathcal{N} auf die Nyquist-Ortskurve Γ ab. Γ_1 bezeichne das Bild von \mathcal{N}_1 (der positiven imaginären Achse), Γ_2 und Γ_3 die Bilder von \mathcal{N}_2 und \mathcal{N}_3 . Da sowohl Entwurfsmodell G als auch Regler K als proper angenommen wurden, ist $\lim_{s \rightarrow \infty} \det(I_p + G(s)K(s))$ eine (reelle) Konstante, Γ_2 damit ein Punkt auf der reellen Achse. Darüberhinaus sind Γ_1 und Γ_3 spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

Beispiel: Bild 5.3 zeigt die Nyquist-Ortskurve Γ von

$$1 + G(s)K(s) = 1 + \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Anmerkung: Γ_1 enthält offenbar dieselbe Information wie die vollständige Nyquist-Ortskurve Γ . Man begnügt sich deswegen

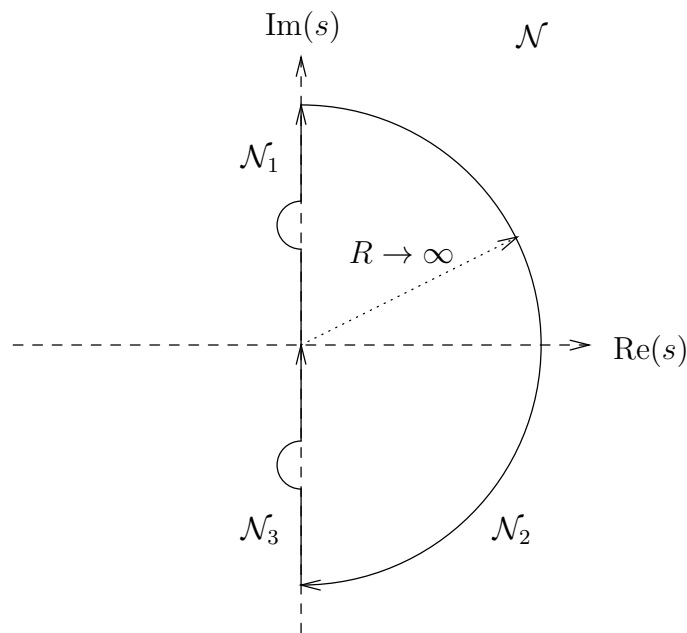


Bild 5.2: Nyquist-Kontur \mathcal{N} .

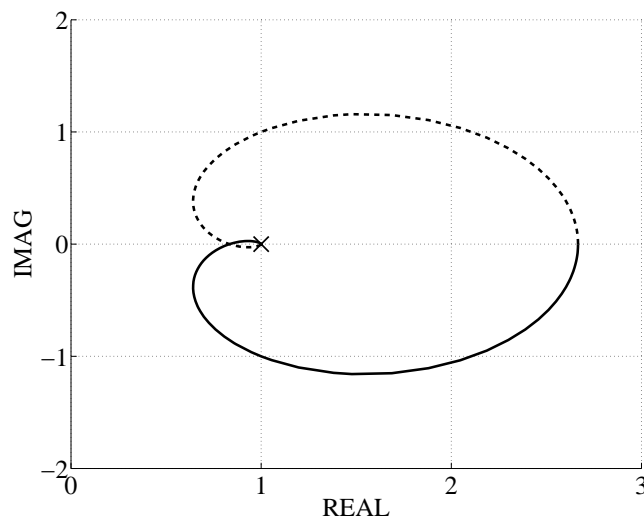


Bild 5.3: Nyquist-Ortskurve für $1 + GK = 1 + \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$: Γ_1 —, Γ_3 - - -, Γ_2 x.

meist damit, Γ_1 aufzutragen und bezeichnet das Resultat ebenfalls als Nyquist-Ortskurve.

Nun betrachten wir die Änderung $\Delta_{\angle\Gamma}$ der Phase von Γ , wenn s die Nyquist-Kontur \mathcal{N} einmal im Uhrzeigersinn durchläuft. m_G , m_K und m_q seien die

Anzahl der Pole von Entwurfsmodell, Regler und geschlossenem Kreis, die im Innern der Kontur \mathcal{N} liegen. Man beachte, daß Pole wiederum entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden: Besitzt z.B. G außer einem zweifachen Pol rechts nur Pole links der imaginären Achse, so gilt $m_G = 2$. Dann können wir aus (5.9) und dem Argumentprinzip der Funktionentheorie unmittelbar ablesen, daß

$$\begin{aligned}\Delta_{\angle\Gamma} &= \Delta_{\angle pPgK} - \Delta_{\angle pPoK} \\ &= 2\pi(m_G + m_K) - 2\pi m_g\end{aligned}\quad (5.10)$$

und – wegen $\Delta_{\angle\Gamma} = 2\Delta_{\angle\Gamma_1}$ –

$$\Delta_{\angle\Gamma_1} = \pi(m_G + m_K) - \pi m_g. \quad (5.11)$$

Wenn wir Stabilität des geschlossenen Regelkreises anstreben, müssen wir offenbar fordern, daß m_g verschwindet bzw.

$$\Delta_{\angle\Gamma_1} \stackrel{!}{=} \pi(m_G + m_K). \quad (5.12)$$

Dies ist die Mehrgrößen-Version des „klassischen“ Nyquist-Kriteriums.

Satz 5.2 (Nyquist-Kriterium für Mehrgrößensysteme) _____

Besitzen die Übertragungsmatrizen $G(s)$ und $K(s)$ m_G bzw. m_K Pole auf oder rechts der imaginären Achse (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt), so ist der Regelkreis (G, K) genau dann asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. die Nyquist-Ortskurve Γ_1 geht nicht durch den Ursprung,
2. die Phasendrehung von Γ_1 beträgt $\pi(m_G + m_K)$.

Beispiel: In Bild 5.4 sind drei Beispiele für einen möglichen Verlauf der Ortskurve Γ_1 dargestellt.

In allen drei Fällen besitzen G und K zusammen zwei Übertragungspole rechts der imaginären Achse. Alle drei Ortskurven enden im Punkt $(0, 1)$. Im ersten Fall (durchgezogene Linie) beträgt die Phasendrehung $\Delta_{\angle\Gamma_1} = -2\pi$, im zweiten Fall (gestrichelter Kurvenverlauf) 0. Für diese (G, K) -Konfigurationen erhält man dem Nyquist-Kriterium zufolge also keinen asymptotisch stabilen Regelkreis. Nur im dritten Fall (xxx) liegt die geforderte Phasendrehung $\Delta_{\angle\Gamma_1} = 2\pi$ vor.

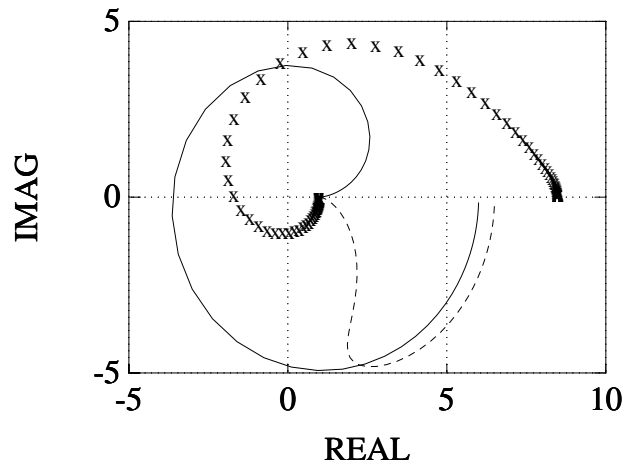


Bild 5.4: Beispiele für Γ_1 .

In dieser Form eignet sich die Mehrgrößen-Version des Nyquist-Kriteriums noch denkbar schlecht für den eigentlichen Entwurfsvorgang: Der Verlauf der Ortskurve Γ_1 (und damit die Stabilität des Regelkreises) hängt auf recht undurchsichtige Weise von den Elementen der Regler-Übertragungsmatrix $K(s)$ ab. Glücklicherweise läßt sich aus Satz 5.2 leicht eine zweite – für uns im folgenden „wertvollere“ – Version ableiten. Hierzu benötigen wir den Begriff der *charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises*:

Definition 5.2 (Charakteristische Ortskurven des offenen Kreises) – Unter den charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises versteht man die Nyquist-Ortskurven der Eigenwerte

$$\lambda_{Q_i}(s) := \lambda_i[Q(s)], \quad s \in \mathcal{N}_1, \quad i = 1, \dots, p,$$

der Übertragungsmatrix

$$Q(s) := G(s)K(s).$$

Wegen

$$\det(I_p + Q) = \prod_{i=1}^p (1 + \lambda_{Q_i}) \tag{5.13}$$

läßt sich die Phasendrehung der Nyquist-Ortskurve von $\det(I_p + Q)$ durch die Summe der Phasendrehungen der Terme $1 + \lambda_{Q_i}(s)$, $s \in \mathcal{N}_1$, ersetzen. Bild 5.5 kann man weiterhin entnehmen, daß ein n-maliges Umschlingen

des Ursprungs (im Gegenuhrzeigersinn) durch die Ortskurve von $1 + \lambda_{Q_i}(s)$ (i.e. eine Phasendrehung von $+2n\pi$) einem n -maligen Umschlingen des *kritischen Punktes* $(-1, 0)$ durch die charakteristische Ortskurve $\lambda_{Q_i}(s)$ entspricht.

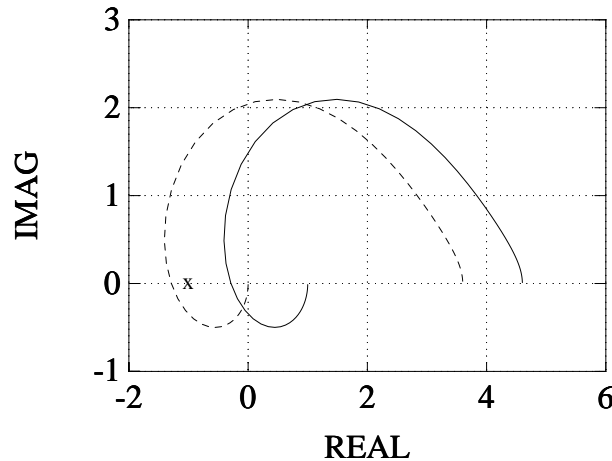


Bild 5.5: Ortskurven von $1 + \lambda_{Q_i}(s)$ — und $\lambda_{Q_i}(s)$ - - -.

Wir können also Satz 5.2 durch folgende, als *verallgemeinertes Nyquist-Kriterium* bezeichnete alternative Formulierung ersetzen:

Satz 5.3 (Verallgemeinertes Nyquist-Kriterium) _____

Besitzen $G(s)$ und $K(s)$ m_G bzw. m_K Pole auf oder rechts der imaginären Achse, so ist der Regelkreis (G, K) genau dann asymptotisch stabil, wenn die charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises

1. nicht durch den kritischen Punkt $(-1, 0)$ gehen
2. den kritischen Punkt $(-1, 0)$ zusammen $\frac{m_G + m_K}{2}$ mal im Gegenuhrzeigersinn umschlingen.

5.1.4 Satz der kleinen Verstärkungen

Aus dem verallgemeinerten Nyquist-Kriterium läßt sich leicht ein hinreichender, im englischen Sprachgebrauch unter dem Namen „small gain theorem“ bekannter Stabilitätstest herleiten. Da wir den Begriff der Verstärkung oder

Norm einer Matrix erst in Abschnitt 5.2 einführen werden, formulieren wir diesen Test mittels des Spektralradius¹ ρ einer komplexen Matrix. Später werden wir den Spektralradius in Satz 5.4 einfach durch eine geeignete Matrizenorm ersetzen. Da der Spektralradius jede Matrizenorm von unten abschätzt, bleibt die Gültigkeit des (hinreichenden) Stabilitätskriteriums unberührt.

Satz 5.4 (Satz der kleinen Verstärkungen)_____

Entwurfsmodell G und Regler K seien asymptotisch stabil. Asymptotische Stabilität des Regelkreises (G, K) ist gewährleistet, wenn

$$\rho[G(j\omega)K(j\omega)] < 1 \quad \text{für alle } \omega \geq 0.$$

Beweis: Da G und K als asymptotisch stabil vorausgesetzt werden, stimmt \mathcal{N}_1 mit der positiven imaginären Achse überein. Laut Satz 5.3 ist (G, K) asymptotisch stabil, wenn keine der charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises durch den kritischen Punkt geht oder diesen umschlingt. Wegen

$$\begin{aligned} |\lambda_{Q_i}(j\omega)| &\leq \rho[G(j\omega)K(j\omega)] \\ &< 1 \end{aligned}$$

verlaufen alle charakteristischen Ortskurven innerhalb eines Kreises um den Ursprung mit Radius 1. Sie können den kritischen Punkt $(-1, 0)$ deshalb weder überdecken noch umschlingen. \square

5.1.5 Wurzelortskurven

Wurzelortskurven sind die graphische Darstellung der Wurzeln des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises in Abhängigkeit von einem skalaren reellen Parameter. Wie im Eingrößenfall können Wurzelortskurven auch bei mehrschleifigen Regelkreisen eine wertvolle Hilfe beim Regler-Entwurf darstellen. Wir wollen sie allerdings nicht als Entwurfsverfahren im eigentlichen Sinn interpretieren, da sie sich nur mit *einer* angestrebten Eigenschaft – der Stabilität des Regelkreises (im nominellen Fall) – befassen. Natürlich lassen sich Wurzelortskurven mittels geeigneter Rechnerprogramme „automatisch“ generieren. Trotzdem erweisen sich in vielen Anwendungsbeispielen einige Regeln zur näherungsweise „manuellen“ Konstruktion von Wurzelortskurven als überaus nützlich.

Wir betrachten zunächst die aus der „klassischen“ Regelungstechnik bekannten skalaren Sachverhalte:

¹Der Spektralradius ρ einer quadratischen Matrix ist der Betrag ihres betragsmäßig größten Eigenwertes.

5.1.5.1 Wurzelortskurven für Eingrößensysteme

Wir nehmen an, die Übertragungsfunktionen von Entwurfsmodell G und Regler K seien realisierbar und besitzen ν_G bzw. ν_K Nullstellen und n_G bzw. n_K Pole. Ihre Nullstellen- und Pol-Polynome bezeichnen wir mit z_{PG} , p_{PG} , z_{PK} und p_{PK} :

$$G(s) = c_G \frac{z_{PG}(s)}{p_{PG}(s)}$$

$$K(s) = c_K \frac{z_{PK}(s)}{p_{PK}(s)}.$$

$\gamma := c_G c_K$ sei ein positiver reeller Verstärkungsfaktor. Als Übertragungsfunktion des offenen Kreises ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} Q(s) &= G(s)K(s) \\ &= \gamma \frac{z_{PG}(s)z_{PK}(s)}{p_{PG}(s)p_{PK}(s)} \\ &= \gamma \frac{\overbrace{\prod_{i=1}^{\nu_G+\nu_K} (s - z_i)}^{:=z_{PoK}(s)}}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n_G+n_K} (s - p_i)}_{:=p_{PoK}(s)}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Man beachte, daß in (5.14) keine Pol-Nullstellen-Kürzungen vorgenommen wurden: p_{PoK} – das charakteristische Polynom des offenen Kreises – enthält *alle* Übertragungspole von Entwurfsmodell G und Regler K . Um eine unnötig komplizierte Schreibweise zu vermeiden, werden Pole und Nullstellen in (5.14) entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt; ein zweifacher Pol an der Stelle -3 erscheint somit als $\dots p_i = -3, p_{i+1} = -3 \dots$ im Pol-Polynom $p_{PoK}(s)$.

Für fast verschwindende und sehr große Verstärkungsfaktoren γ verhalten sich die Pole des geschlossenen Kreises entsprechend der folgenden Regeln:

1. $\gamma = 0$ entspricht einem „Auftrennen“ des Regelkreises; für diesen Wert des Verstärkungsfaktors stimmen die Pole des geschlossenen Kreises also mit den Polen des offenen Kreises überein.
2. Für $\gamma \rightarrow \infty$ gilt:
 - (a) $\nu_{oK} := \nu_G + \nu_K$ Pole des geschlossenen Kreises bleiben endlich. Sie bewegen sich in die Nullstellen des offenen Kreises hinein.

- (b) Die restlichen $l := n_{oK} - \nu_{oK} := (n_G + n_K) - \nu_{oK}$ Pole des geschlossenen Kreises wandern ins Unendliche. Sie genügen der Gleichung

$$s_i = \sqrt[l]{\gamma} \delta_i + \alpha + \underbrace{\epsilon_i(\gamma)}_{\rightarrow 0}; \quad i = 1, \dots, l;$$

- $\sqrt[l]{\gamma}$ steht für die positiv-reelle l -te Wurzel des Verstärkungsfaktors γ ;
- δ_i , $i = 1, \dots, l$, bezeichnet die l verschiedenen l -ten Wurzeln von -1 :

$$\delta_i = e^{j \frac{(2i-1)\pi}{l}}, \quad i = 1, \dots, l;$$

- der *Pol- oder Wurzelschwerpunkt* α berechnet sich aus

$$\alpha = \frac{1}{l} \left(\sum_{k=1}^{n_{oK}} p_k + \sum_{k=1}^{\nu_{oK}} (-z_k) \right).$$

Die ins Unendliche gehenden Äste der Wurzelortskurve nähern sich also asymptotisch den Strahlen eines l -stahligen Sterns an, dessen Zentrum im Polschwerpunkt α liegt.

Anmerkung: Wie man leicht nachrechnet, kann durch Vorschalten eines Korrekturgliedes $\frac{s+b}{s+a}$ mit $a > b > 0$ der Polschwerpunkt um den Betrag $\frac{a-b}{l}$ nach links verschoben werden.

Anmerkung: Weitere Regeln, die zu einer detaillierteren Konstruktion der Wurzelortskurven genutzt werden können, findet man in fast allen Lehrbüchern der klassischen Regelungstechnik. Für unsere Zwecke genügt aber die hier aufgeführte Auswahl.

Beispiel:

$$G(s) = \frac{s + 8}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$K = \gamma.$$

Der offene Kreis besitzt drei Pole und eine Nullstelle. Alle liegen links der imaginären Achse. Die aufgeführten Konstruktionsregeln ermöglichen folgende Aussagen: Falls der Verstärkungsfaktor γ von 0 auf ∞ vergrößert wird, bleibt $\nu_{oK} = 1$ Pol des geschlossenen Kreises endlich; er bewegt sich in die Nullstelle $s = -8$ hinein. Für den Polschwerpunkt und die Strahlrichtungen ergibt

sich $\alpha = 1$ und $\delta_{1/2} = \pm j$; die $l = 2$ Pole des geschlossenen Kreises, die ins Unendliche wandern, nähern sich also asymptotisch einer in der rechten Halbebene parallel zur imaginären Achse verlaufenden Geraden; für genügend große Verstärkungsfaktoren wird der geschlossene Regelkreis deshalb instabil. Das genaue Aussehen der Wurzelortskurve ist in Bild 5.6 dargestellt.

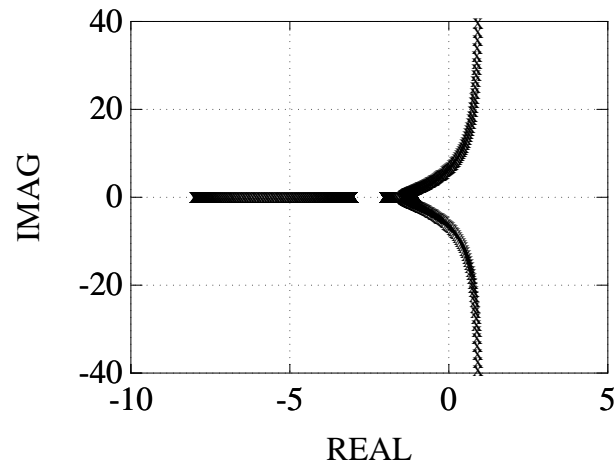


Bild 5.6: Beispiel für den Verlauf einer Wurzelortskurve.

Beispiel: Wir wenden uns nochmals dem Beispiel von Seite 132 zu: Die Übertragungsfunktionen von Entwurfsmodell und Regler lauten:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1},$$

$$K(s) = \gamma \frac{s+3}{s-1}.$$

Der offene Kreis besitzt zwei Übertragungspole ($s = -1$ und $s = +1$) und zwei Übertragungsnulstellen ($s = -3$ und $s = +1$) – Pol-Nullstellen-Kürzungen zwischen G und K beeinflussen verabredungsgemäß weder Pol- noch Nullstellen-Polynom des offenen Kreises. Den Konstruktionsregeln für Wurzelortskurven entnimmt man, daß für $\gamma \rightarrow \infty$ beide Pole des geschlossenen Kreises endlich bleiben: die Nullstellen des offenen Kreises werden zu Polen des geschlossenen Kreises. Bild 5.7 zeigt den Verlauf der Wurzelortskurve; für alle γ erhalten wir einen Pol an der Stelle $s = +1$. Wie wir bereits auf Seite 132 argumentiert hatten, ist der Regelkreis (für alle γ) instabil.

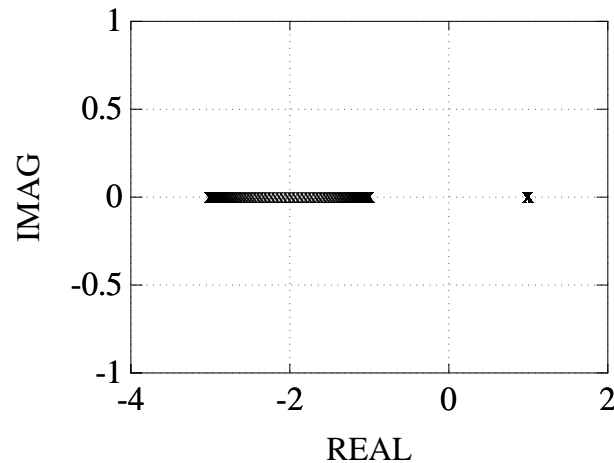


Bild 5.7: Beispiel für den Verlauf einer Wurzelortskurve.

Nun gehen wir zum Mehrgrößen-Fall über. Die folgende Darstellung ist weitgehend [82] entnommen.

5.1.5.2 Wurzelortskurven für Mehrgrößensysteme

Wie im Eingrößenfall untersuchen wir, wie die Wurzeln des charakteristischen Polynoms des geschlossenen Kreises von einem reellen *skalaren* Parameter abhängen: Wir betrachten die Übertragungsmatrix des offenen Kreises:

$$\begin{aligned} Q(s) &= G(s)K(s) \\ &:= \gamma \overline{Q}(s). \end{aligned}$$

G und K seien realisierbare $p \times q$ - bzw. $q \times p$ -Übertragungsmatrizen ($p \leq q$), γ ein skalarer reeller Verstärkungsfaktor ($0 \leq \gamma < \infty$). Die Pol- und Nullstellen-Polynome von Entwurfsmodell und Regler bezeichnen wir – wie im Eingrößenfall – mit p_{PG} , z_{PG} und p_{PK} , z_{PK} . Weiterhin gelte:

$$\begin{aligned} \text{Grad } \{p_{PG}(s)\} &= n_G, \\ \text{Grad } \{z_{PG}(s)\} &= \nu_G, \\ \text{Grad } \{p_{PK}(s)\} &= n_K, \\ \text{Grad } \{z_{PK}(s)\} &= \nu_K. \end{aligned}$$

Schießlich setzen wir noch Nichtsingularität der Übertragungsmatrix \overline{Q} voraus.

Zunächst untersuchen wir das Verhalten der Wurzelortskurven für sehr kleine Verstärkungsfaktoren: $\gamma = 0$ entspricht einem Auftrennen (jeder Schleife) des Regelkreises, die Pole des geschlossenen Kreises stimmen also mit denen des offenen Kreises überein.

Wie im Eingrößenfall fragen wir nun, wie sich die Pole des geschlossenen Kreises verhalten, wenn der Verstärkungsfaktor γ gegen ∞ geht.

Wir versuchen zunächst, Pole zu finden, die für $\gamma \rightarrow \infty$ einen endlichen Grenzwert besitzen. Laut Chen-Hsu-Theorem (Gl. (5.9)) gilt für den Quotienten aus Pol-Polynom des geschlossenen und des offenen Kreises:

$$\begin{aligned} \frac{p_{PgK}}{p_{PoK}} &= c \det(I_p + \gamma \overline{Q}) \\ &= c \gamma^p \det\left(\frac{1}{\gamma} I_p + \overline{Q}\right); \end{aligned}$$

für $\gamma \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{p_{PgK}}{p_{PoK}} &= c \gamma^p \det \overline{Q} \\ &= \hat{c} \gamma^p \frac{\overbrace{z_{PG} z_{PK}}^{=z_{PoK}}}{\underbrace{p_{PG} p_{PK}}_{=p_{PoK}}} \end{aligned}$$

und daher

$$p_{PgK} = \hat{c} \gamma^p z_{PoK}. \quad (5.15)$$

(5.15) entnimmt man, daß $\nu_{oK} := \nu_G + \nu_K$ Pole des geschlossenen Kreises endlich bleiben, wenn $\gamma \rightarrow \infty$; sie wandern in die Nullstellen des offenen Kreises hinein; jede Nullstelle mit Vielfachheit ν_i zieht genau ν_i Äste der Wurzelortskurve an.

Da nur ν_{oK} der insgesamt $n_{oK} := n_G + n_K$ Wurzeln des charakteristischen Polynoms p_{PgK} einen endlichen Grenzwert aufweisen, müssen $l := n_{oK} - \nu_{oK}$ Wurzeln gegen Unendlich streben, wenn $\gamma \rightarrow \infty$ geht. Um deren Verhalten genauer zu analysieren, betrachten wir die *Laurent-Entwicklung* der Übertragungsmatrix $\overline{Q}(s)$ im Punkt $s = \infty$:

$$\overline{Q}(s) = Q_0 + \frac{1}{s} Q_1 + \frac{1}{s^2} Q_2 + \dots$$

Kennt man eine Minimalrealisierung

$$\overline{Q}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

so lassen sich die (matrixwertigen) Koeffizienten Q_i wie folgt berechnen:

$$Q_0 = D,$$

$$Q_i = CA^{i-1}B, \quad i = 1, 2, \dots$$

Die Q_i bezeichnet man als *Markov-Parameter* der Übertragungsmatrix \bar{Q} . Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen Spezialfall (der bei experimentell identifizierten Modellen allerdings fast immer vorliegt): Der erste nichtverschwindende Markov-Parameter sei nichtsingulär und diagonalähnlich²:

$$Q_0 = Q_1 = \dots Q_{k-1} = 0, \quad (5.16)$$

$$Q_k \dots \text{nichtsingulär und diagonalähnlich.} \quad (5.17)$$

Anmerkung: Wie man leicht nachprüft, ergibt sich in diesem speziellen Fall $\nu_{oK} = n_{oK} - pk$, so daß wir $l = pk$ ins Unendliche strebende Äste der Wurzelortskurve erwarten.

In [82] wird gezeigt, wie man aus den Annahmen (5.16) und (5.17) die in der folgenden Auflistung enthaltenen Regeln für die Konstruktion von ins Unendliche strebenden Ästen der Wurzelortskurve ableiten kann:

Regeln für die Konstruktion von Wurzelortskurven bei Mehrgrößensystemen

1. Für $\gamma = 0$ stimmen die Übertragungspole des geschlossenen Kreises mit den Übertragungspolen des offenen Kreises überein.
2. Für $\gamma \rightarrow \infty$ gilt:
 - (a) $\nu_{oK} = \nu_G + \nu_K$ Übertragungspole des geschlossenen Kreises bleiben endlich. Sie bewegen sich in die Übertragungsnullstellen des offenen Kreises hinein.
 - (b) Die restlichen $n_{oK} - \nu_{oK} = pk$ Pole des geschlossenen Kreises wandern ins Unendliche. Sie nähern sich asymptotisch den durch

$$s_{ijr_j} = \sqrt[k]{\gamma} \delta_{ij} + \frac{\alpha_j r_j}{k \lambda_j}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$j = 1, \dots, t,$$

$$r_j = 1, \dots, d_j,$$

²Eine diagonalähnliche Matrix läßt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation in Diagonalgestalt überführen.

beschriebenen Halbgeraden an.

- $\sqrt[k]{\gamma}$ steht für die positiv-reelle k -te Wurzel des Verstärkungsfaktors γ ;
- $\lambda_j, j = 1, \dots, t$, sind die $t \leq p$ verschiedenen Eigenwerte des ersten nichtverschwindenden Markov-Parameters;
- $\delta_{ij}, i = 1, \dots, k$, bezeichnet die k verschiedenen k -ten Wurzeln von $-\lambda_j$;
- $\alpha_{jr_j}, r_j = 1, \dots, d_j$, sind die Eigenwerte der folgendermaßen definierten $d_j \times d_j$ -Matrizen N_{jj} : V sei eine (nichtsinguläre) Eigenvektormatrix des Markov-Parameters Q_k . Die Eigenvektoren seien so angeordnet, daß gilt:

$$V^{-1}Q_kV = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_t I_{d_t} \end{bmatrix}.$$

Dann unterteile man die Matrix

$$V^{-1}Q_{k+1}V := \begin{bmatrix} N_{11} & \dots & N_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{t1} & \dots & N_{tt} \end{bmatrix},$$

so daß die auf der Diagonalen stehenden Blöcke N_{jj} die Dimension $d_j \times d_j$ besitzen.

Die Terme $\frac{\alpha_{jr_j}}{k\lambda_j}$ geben an, von welchen Punkten die Halbgeraden ausgehen, denen sich die ins Unendliche strebenden Äste der Wurzelortskurve asymptotisch annähern. Wir nennen sie *Pivots*. Sie stellen das Gegenstück zum „Pol-“ bzw. „Wurzelschwerpunkt“ im Eingrößenfall dar. Man beachte, daß bei Mehrgrößensystemen mehrere solcher Pivots auftreten und die Pivots komplexe Werte annehmen können.

Anmerkung: Man kann zeigen, daß durch Vorschalten eines Korrekturgliedes $\frac{s+b}{s+a}I_p$ mit $a > b > 0$ alle Pivots um den Betrag $\frac{a-b}{k}$ nach links verschoben werden.

Wir werden an einem Beispiel demonstrieren, daß dieser Formalismus einfacher anzuwenden ist als seine Komplexität vermuten läßt.

Beispiel: Wir betrachten (zum wiederholten Male) das Beispiel von Seite 32:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{4}{s+8} \\ \frac{0.5}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix},$$

$$K(s) = \gamma I_2.$$

Eine Zustandsdarstellung minimaler Ordnung für $G = \bar{Q}$ lautet z.B.:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0.5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Auf Seite 97 hatten wir bereits Pole und Nullstellen dieses Beispielsystems berechnet: \bar{Q} besitzt zwei Übertragungspole an der Stelle $s = -1$ und einen an der Stelle $s = -8$; $s = 6$ ist die einzige Übertragungsnullstelle. Sämtliche Übertragungspole und Übertragungsnullstellen sind von Vielfachheit 1. Ein Zweig der Wurzelortskurve wird also für große Verstärkungen γ in die Nullstelle in der rechten Halbebene hineinwandern.

Aus obiger Zustandsdarstellung lassen sich leicht die Markov-Parameter berechnen:

$$Q_0 = D = 0$$

$$Q_1 = CB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = CAB = \begin{bmatrix} -1 & -32 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Der erste nichtverschwindende Markov-Parameter ist offensichtlich Q_1 . Alle unseren Untersuchungen zugrundeliegenden Annahmen treffen zu: Q_1 ist nichtsingulär und läßt sich auf Diagonalform

transformieren – eine geeignete Eigenzerlegung ist z.B.:

$$Q_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}}_{:=V} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.3536 & 0.3536 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5.18)$$

Wir können deshalb die Konstruktionsregeln mit $k = 1$ anwenden: Die Eigenwerte λ_1 und λ_2 des Markov-Parameters Q_1 lesen wir aus (5.18) ab:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \sqrt{2}, \\ \lambda_2 &= 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= -\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}, \\ \delta_{12} &= -\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} &= V^{-1}Q_2V \\ &= \begin{bmatrix} 5.3640 & -4.9497 \\ 4.9497 & -7.3640 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

N_{11} und N_{22} sind Skalare, die Berechnung ihrer Eigenwerte ist deshalb trivial:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= N_{11} = 5.3640, \\ \alpha_{21} &= N_{22} = -7.3640. \end{aligned}$$

Hiermit sind auch die Pivots bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{11}}{\lambda_1} &= -12.9497, \\ \frac{\alpha_{21}}{\lambda_2} &= -3.0503. \end{aligned}$$

Beide Pivots liegen auf der reellen Achse; ein „Richtungsanzeiger“ (δ_{11}) ist positiv reell, der andere (δ_{12}) negativ reell. Ein Ast der Wurzelortskurve wird deshalb entlang der positiven reellen Achse, der andere entlang der negativen reellen Achse ins Unendliche verlaufen. In Bild 5.8 ist das genaue Aussehen der Wurzelortskurve gezeigt.

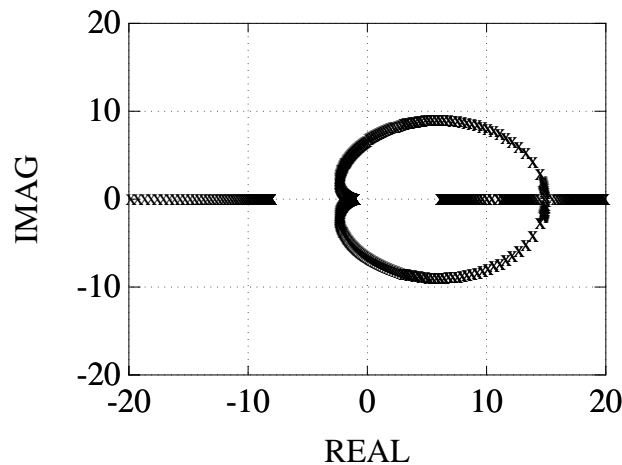


Bild 5.8: Wurzelortskurve eines Mehrgrößensystems.

5.1.6 Youla-Parametrierung

In diesem Abschnitt behandeln wir eine Formel, mit der sich *alle* Regler-Übertragungsmatrizen $K(s)$ ausdrücken lassen, die asymptotische Stabilität des Regelkreises (G, K) bewirken. $K(s)$ wird hierbei in Abhängigkeit von einer (fast) beliebig zu wählenden asymptotisch stabilen und realisierbaren Übertragungsmatrix $\hat{Q}(s)$ dargestellt. Diese Formel wird als *Youla-Parametrierung aller stabilisierenden Regler*, $\hat{Q}(s)$ als *Youla-Parameter* bezeichnet.

Satz 5.5 (Youla-Parametrierung)

$G(s)$ sei eine realisierbare $p \times q$ -Übertragungsmatrix. Man beschaffe sich eine doppelt-koprieme Faktorisierung für $G(s)$, i.e. asymptotisch stabile Matrizen $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$, $\tilde{X}(s)$, $\tilde{Y}(s)$, die (2.55) und (2.57) genügen. Die Menge aller realisierbaren Regler-Übertragungsmatrizen, die asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises (G, K) bewirken, läßt sich dann wie folgt berechnen:

$$\{K(s)\} = \left\{ (Y(s) - \hat{Q}(s)\tilde{N}(s))^{-1}(X(s) + \hat{Q}(s)\tilde{M}(s)) \mid \right. \\ \left. \hat{Q}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p}, \det(Y(\infty) - \hat{Q}(\infty)\tilde{N}(\infty)) \neq 0 \right\} \quad (5.19)$$

$$= \left\{ (\tilde{X}(s) + M(s)\hat{Q}(s))(\tilde{Y}(s) - N(s)\hat{Q}(s))^{-1} \mid \right. \\ \left. \hat{Q}(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p}, \det(\tilde{Y}(\infty) - N(\infty)\hat{Q}(\infty)) \neq 0 \right\}. \quad (5.20)$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, benötigen wir ein weiteres Kriterium zur Überprüfung der Regelkreis-Stabilität bei *gegebenem* K . Man erinnere sich zunächst an die Vorgehensweise in Abschnitt 5.1.1: Dort begannen wir mit einer linkskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung des Streckenmodells G und einer rechtskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellung des Reglers K und erhielten die den geschlossenen Kreis charakterisierende Übertragungsmatrix W in Abhängigkeit von den polynomialen Zähler- und Nennerfaktoren von G und K (Gleichung (5.5)). Nun verwenden wir statt koprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellungen koprimen Faktorisierungen in \mathcal{RH}_∞ , stellen G und K also in Abhängigkeit von asymptotisch stabilen realisierbaren Übertragungsmatrizen dar:

$$\begin{aligned} G(s) &= \widetilde{M}(s)^{-1}\widetilde{N}(s), \\ K(s) &= N_K(s)M_K(s)^{-1}. \end{aligned}$$

In völliger Analogie zu (5.5) ergibt sich:

$$W = \begin{bmatrix} M_K \\ -N_K \end{bmatrix} \underbrace{(\widetilde{M}M_K + \widetilde{N}N_K)^{-1}}_{:=\alpha} \begin{bmatrix} -\widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus der Tatsache, daß \widetilde{N} , \widetilde{M} ein linkskoprimen und N_K , M_K ein rechtskoprimen Paar bilden, können wir unmittelbar auf Linkskoprimheit von α und $\begin{bmatrix} -\widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix}$ sowie auf Rechtskoprimheit von α und $\begin{bmatrix} M_K \\ -N_K \end{bmatrix}$ schließen.

Beim Bilden der Übertragungsmatrix W kann es also nicht zu Pol-Nullstellen-Kürzungen in der rechten Halbebene kommen. Deshalb gilt folgendes Stabilitätskriterium:

Der Regelkreis (G, K) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Matrix $\alpha^{-1}(s) = (\widetilde{M}(s)M_K(s) + \widetilde{N}(s)N_K(s))^{-1}$ für jede rechtskoprimen Faktorisierung $N_K M_K^{-1}$ des Reglers K realisierbar und asymptotisch stabil, α also eine in \mathcal{RH}_∞ unimodulare Matrix ist.

Da Zähler- und Nennerterm einer koprimen Faktorisierung nur bis auf Multiplikation mittels einer beliebigen unimodularen \mathcal{RH}_∞ -Matrix bestimmt sind, können wir ein unimodulares α den Matrizen N_K und M_K zuschlagen und obiges Kriterium in einer leicht abgewandelten Version formulieren:

Der Regelkreis (G, K) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn K eine rechtskoprimen Faktorisierung $N_K M_K^{-1}$ besitzt, so daß gilt:

$$\widetilde{M}(s)M_K(s) + \widetilde{N}(s)N_K(s) = I_p. \quad (5.21)$$

Nun können wir zum Beweis von Satz 5.5 schreiten:

Beweis: (Satz 5.5.) Wir zeigen nur (5.20); der Nachweis der alternativen Darstellung (5.19) verläuft völlig analog.

Wir zeigen zunächst, daß jedes

$$K(s) = \underbrace{(\tilde{X}(s) + M(s)\hat{Q}(s))}_{N_K} \underbrace{(\tilde{Y}(s) - N(s)\hat{Q}(s))}_{M_K}^{-1}$$

auf $\alpha = I_p$ und damit einen asymptotisch stabilen Regelkreis führt. Hierzu setzen wir die Zähler- und Nennermatrizen N_K und M_K in die Definitionsgleichung für α ein:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tilde{M}M_K + \tilde{N}N_K \\ &= \tilde{M}(\tilde{Y} - N\hat{Q}) + \tilde{N}(\tilde{X} + M\hat{Q}) \\ &= \underbrace{\tilde{M}\tilde{Y} + \tilde{N}\tilde{X}}_{=I_p} + \underbrace{(\tilde{N}M - \tilde{M}N)}_{=0}\hat{Q} \\ &= I_p. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile des obigen Gleichungssystems folgt aus (2.57), i.e. der Tatsache, daß die beteiligten Matrizen $\tilde{M}, \tilde{N}, \dots$ eine doppelt kopprime Faktorisierung des Streckenmodells G bilden.

Nun beweisen wir, daß *jede* realisierbare Regler-Übertragungsmatrix $K(s)$, die asymptotische Stabilität des geschlossenen Kreises bewirkt, sich in Form von (5.20) schreiben läßt. Man nehme also an, K stabilisiere (G, K) und besitze demzufolge eine rechtskopprime Faktorisierung $N_K M_K^{-1}$ (mit $\det M_K(\infty) \neq 0$), die dem Stabilitätskriterium (5.21) genügt. Man betrachte das Produkt

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \tilde{M} & -\tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & M_K \\ M & -N_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XN + YM & XM_K - YN_K \\ \tilde{M}N - \tilde{N}M & \tilde{M}M_K + \tilde{N}N_K \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Für die Blöcke (1,1) und (2,1) der rechten Seite erhält man I_q bzw. 0 – dies folgt aus der verallgemeinerten Bezout-Identität (2.57). Da das Stabilitätskriterium (5.21) erfüllt ist, ergibt sich für Block (2,2) die Einheitsmatrix I_p . Block (1,2) ist offensichtlich eine asymptotisch stabile $q \times p$ -Übertragungsmatrix, die wir mit $-\hat{Q}(s)$ bezeichnen. Der verallgemeinerten Bezout-Identität entnehmen wir weiterhin, daß

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \tilde{M} & -\tilde{N} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} N & \tilde{Y} \\ M & -\tilde{X} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Nun multiplizieren wir die linke (rechte) Seite von (5.22) von links mit der linken (rechten) Seite von (5.23) und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N & M_K \\ M & -N_K \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N & \tilde{Y} \\ M & -\tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & -\hat{Q} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N & \tilde{Y} - N\hat{Q} \\ M & -(\tilde{X} + M\hat{Q}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich demzufolge

$$\begin{aligned} K &= N_K M_K^{-1}, \quad \det M_K(\infty) \neq 0, \\ &= (\tilde{X} + M\hat{Q})(\tilde{Y} - N\hat{Q})^{-1}, \quad \det(\tilde{Y}(\infty) - N(\infty)\hat{Q}(\infty)) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Wie man leicht nachprüft, läßt sich eine Regler-Übertragungsmatrix der Form (5.20) mittels des in Bild 5.9 dargestellten Signalflußdiagrammes wiedergeben. Oft erweist es sich jedoch als geschickter, den Youla-Parameter $\hat{Q}(s)$

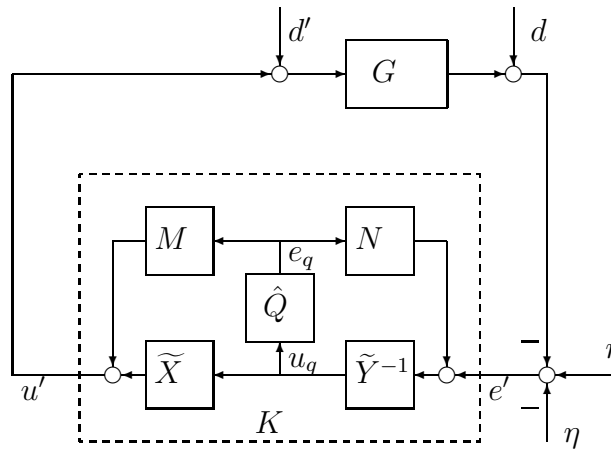


Bild 5.9: Alle stabilisierenden Regler.

aus dem gezeigten Blockschaltbild „herauszuziehen“, den Regler $K(s)$ also wie in Bild 5.10 darzustellen. Die Matrix $L(s)$ in Bild 5.10 besteht aus vier Blöcken, die den Einfluß der Signale e' und e_q auf die Größen u' und u_q angeben:

$$\begin{bmatrix} u' \\ u_q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11}(s) & L_{12}(s) \\ L_{21}(s) & L_{22}(s) \end{bmatrix}}_{L(s)} \begin{bmatrix} e' \\ e_q \end{bmatrix}.$$

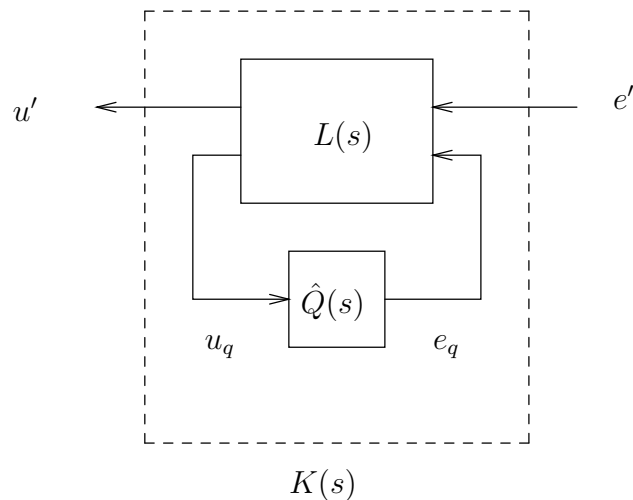


Bild 5.10: Alternative Darstellung aller stabilisierenden Regler.

Berücksichtigen wir den Youla-Parameter $\hat{Q}(s)$ in der reglerinternen Rückführung

$$e_q = \hat{Q}(s)u_q,$$

so ergibt sich für $K(s)$:

$$\begin{aligned} K(s) &= L_{11}(s) + L_{12}(s)\hat{Q}(s)[I_p - L_{22}(s)\hat{Q}(s)]^{-1}L_{21}(s) \\ &= \mathcal{F}_L(L, \hat{Q}). \end{aligned}$$

Wir stellen die Menge aller stabilisierenden Regler also als „Lower linear fractional transformation“ des Youla-Parameters \hat{Q} bezüglich einer bekannten Übertragungsmatrix L dar. Dem Vergleich mit (5.20) kann man entnehmen, daß

$$L(s) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s)^{-1} & M(s) + \tilde{X}(s)\tilde{Y}(s)^{-1}N(s) \\ \tilde{Y}(s)^{-1} & \tilde{Y}(s)^{-1}N(s) \end{bmatrix}.$$

Schließlich läßt sich aus einer Minimalrealisierung für \tilde{X} , \tilde{Y} , N und M (wir verwenden (2.60) und setzen $\Xi = I_q$, $\tilde{\Xi} = I_p$) eine Zustandsdarstellung minimaler Ordnung für $L(s)$ ableiten. Durch Anwenden der „Rechenregeln“ für Multiplikation, Inversion und Addition von Zustandsdarstellungen und anschließendes Eliminieren nichtbeobachtbarer und nichtsteuerbarer Zustände (eine etwas mühsame aber nicht weiter schwierige Prozedur) erhält man:

$$L(s) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A + BF + HC + HDF & H & HD + B & \\ \hline & F & 0 & I_q \\ C + DF & & I_p & D \end{array} \right]. \quad (5.24)$$

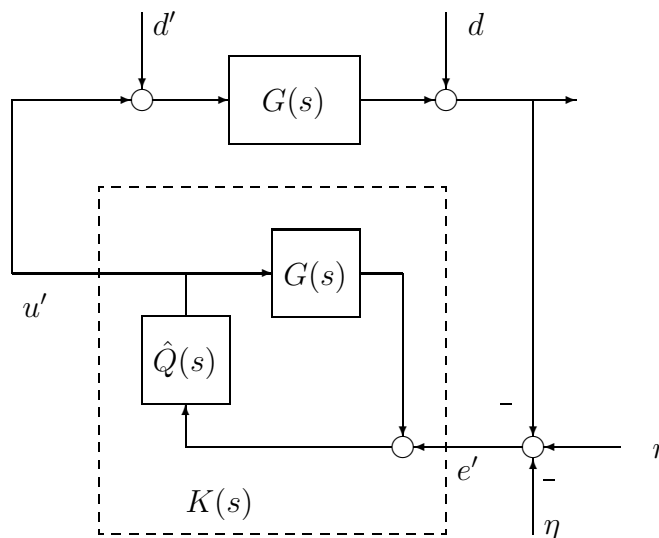


Bild 5.12: Alle stabilisierenden Regler; Sonderfall $G(s)$ asymptotisch stabil.

parallel zur Regelstrecke geschalteten Streckenmodell und einer – bis auf die Einschränkung $\det(I_p - G(\infty)\hat{Q}(\infty)) \neq 0$ – frei zu wählenden asymptotisch stabilen und realisierbaren Übertragungsmatrix $\hat{Q}(s)$. Man spricht in diesem Zusammenhang oft von „Internal Model Control“.

5.1.7 Stabilisierbarkeit und Stabilität verallgemeinerter Regelkreise

Aus Seite 127 führten wir *verallgemeinerte Regelkreise* ein, die aus einem verallgemeinerten Streckenmodell P

$$\begin{bmatrix} z \\ e' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} w \\ u' \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

und einer Rückführung

$$u' = Ke'$$

bestehen. $P(s)$ ist eine $(l + p) \times (m + q)$ -Übertragungsmatrix, $K(s)$ besitzt q Zeilen und p Spalten. Definieren wir nun eine „verallgemeinerte“ Regler-Übertragungsmatrix

$$K_v(s) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -K(s) \end{bmatrix},$$

so entspricht die positive Rückführung von e' auf u' über K – die Situation beim verallgemeinerten Regelkreis – der negativen Rückführung des vollständigen Streckenausgangs auf den vollständigen Streckeneingang und damit der Situation bei einem Standard-Regelkreis. Wir können dann die Stabilität verallgemeinerter Regelkreise in gewohntem Sinne verstehen: Wir sagen, (P, K_v) ist asymptotisch stabil, wenn alle möglichen Übertragungsmatrizen im Regelkreis asymptotisch stabil sind. Kennen wir eine linkskopprime Faktorisierung des verallgemeinerten Streckenmodells $P = \widetilde{M}_v^{-1} \widetilde{N}_v$ sowie eine rechtskopprime Faktorisierung der Reglers $K = -N_K M_K^{-1}$, so können wir Stabilität mit Hilfe des Kriteriums von Seite 152 überprüfen: Der verallgemeinerte Regelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn

$$\alpha_v := \widetilde{M}_v \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & M_K \end{bmatrix} + \widetilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix}$$

eine unimodulare Matrix in \mathcal{RH}_∞ ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, braucht es allerdings keinen Regler $K(s)$ zu geben, der den verallgemeinerten Kreis stabilisiert.

Beispiel: P_{11} sei eine instabile Übertragungsmatrix und

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{v11}^{-1} \widetilde{N}_{v11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{M}_{v11} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}}_{\widetilde{M}_v^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{N}_{v11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{N}_v}. \end{aligned}$$

In diesem Fall besitzt der Regler offenbar keine Möglichkeit, die instabile Übertragungsmatrix $P_{11}(s)$ zu beeinflussen. Tatsächlich erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{v11} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & M_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{N}_{v11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{v11} & 0 \\ 0 & M_K \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

α_v ist sicherlich nicht unimodular in \mathcal{RH}_∞ , da \widetilde{M}_{v11}^{-1} als Inverse der Nennermatrix einer instabilen Übertragungsmatrix instabil sein muß.

Welchen Bedingungen muß das verallgemeinerte Streckenmodell genügen, wenn eine stabilisierende Rückführung existieren soll? Im Zustandsraum läßt sich diese Frage leicht beantworten: Gegeben sei eine Minimalrealisierung

$$P(s) \cong \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]. \quad (5.26)$$

Dann existiert ein stabilisierender Regler für das verallgemeinerte Streckenmodell (5.25), (5.26) offenbar genau dann, wenn alle instabilen Moden von P über das Reglereingangssignal e' beobachtet und über das Reglerausgangssignal u' beeinflußt werden können, i.e. wenn das Matrizenpaar (C_2, A) entdeckbar (s. Seite 106), das Paar (A, B_2) stabilisierbar (s. Seite 104) ist.

Entsprechende Kriterien lassen sich auch mittels rechts- bzw. linkskoprimen Faktorisierungen angeben:

Satz 5.6 (Stabilisierbarkeit verallgemeinerter Streckenmodelle)——

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *Es existiert ein stabilisierender Regler $K = -N_K M_K^{-1}$ für das verallgemeinerte Streckenmodell $P(s)$, d.h. für eine beliebige linkskopprime Faktorisierung $\{\tilde{N}_v(s), \tilde{M}_v(s)\}$ von $P(s)$ lassen sich Übertragungsmatrizen $N_K(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{q \times p}$ und $M_K(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times p}$ ($\det\{M_K(\infty)\} \neq 0$) finden, so daß*

$$\alpha_v = \tilde{M}_v \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & M_K \end{bmatrix} + \tilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

unimodular in \mathcal{RH}_∞ ist.

2. *Es existiert eine linkskopprime Faktorisierung $\{\tilde{N}'_v(s), \tilde{M}'_v(s)\}$ des verallgemeinerten Streckenmodells $P(s)$ mit*

$$\tilde{M}'_v = \begin{bmatrix} I_l & \tilde{M}'_{v12} \\ 0 & \tilde{M}'_{v22} \end{bmatrix} \quad N'_v = \begin{bmatrix} \tilde{N}'_{v11} & \tilde{N}'_{v12} \\ \tilde{N}'_{v21} & \tilde{N}'_{v22} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

$$\tilde{M}'_{v22}, \tilde{N}'_{v22} \dots \text{linkskoprim.} \quad (5.29)$$

3. *Für jede linkskopprime Faktorisierung $\{\tilde{N}_v(s), \tilde{M}_v(s)\}$ des verallgemeinerten Streckenmodells $P(s)$ gilt:*

$$\tilde{M}_v(s), \tilde{N}_v(s) \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \quad \text{sind linkskoprim} \quad (5.30)$$

$$\text{und } \tilde{M}_v(s), \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \quad \text{sind rechtskoprim.} \quad (5.31)$$

Beweis: ($1 \Rightarrow 2$) $\widetilde{M}_v^{-1}(s)\widetilde{N}_v(s)$ sei eine beliebige linkskopprime Faktorisierung des verallgemeinerten Streckenmodells $P(s)$: Zähler- und Nennermatrix können wir mit jeder unimodularen Matrix passender Dimension (von links) multiplizieren. Wir wählen als „Multiplikationsfaktor“ die Inverse der Matrix

$$\begin{aligned}\alpha_v &= \widetilde{M}_v \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & M_K \end{bmatrix} + \widetilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{v11} & \cdots \\ \widetilde{M}_{v21} & \cdots \end{bmatrix} \in \mathcal{UH}_\infty^{(l+p) \times (l+p)}\end{aligned}$$

und erhalten eine Nennermatrix $\widetilde{M}'_v := \alpha_v^{-1}\widetilde{M}_v$ der Form (5.28). Nun müssen wir noch zeigen, daß die $(2, 2)$ -Blöcke der Matrizen \widetilde{M}'_v und $\widetilde{N}'_v := \alpha_v^{-1}\widetilde{N}_v$ ein linkskoprimales Paar bilden. Hierzu betrachten wir das Produkt

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \widetilde{M}'_{v22} & \widetilde{N}'_{v22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_K \\ N_K \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{M}'_{v12} & \widetilde{N}'_{v12} \\ \widetilde{M}'_{v22} & \widetilde{N}'_{v22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_K \\ N_K \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \alpha_v^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{v12} & \widetilde{N}_{v12} \\ \widetilde{M}_{v22} & \widetilde{N}_{v22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_K \\ N_K \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wegen (5.27) folgt hieraus

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \widetilde{M}'_{v22} & \widetilde{N}'_{v22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_K \\ N_K \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \alpha_v^{-1} \alpha_v \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\ &= I_p.\end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} \widetilde{M}'_{v22} & \widetilde{N}'_{v22} \end{bmatrix}$ besitzt also eine asymptotisch stabile Rechtsinverse, die beiden Matrizen \widetilde{M}'_{v22} und \widetilde{N}'_{v22} sind demnach linkskoprim (vgl. Bedingung (2.54)).

($2 \Rightarrow 3$) Für die spezielle linkskopprime Faktorisierung (5.28), (5.29) liegt Linkskoprimheit der Matrizen

$$\widetilde{M}'_v(s), \widetilde{N}'_v(s) \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$$

auf der Hand (man kann sich leicht eine asymptotisch stabile Rechtsinverse für

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}'_v(s) & \widetilde{N}'_v(s) \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & \widetilde{M}'_{v12} & \widetilde{N}'_{v12} \\ 0 & \widetilde{M}'_{v22} & \widetilde{N}'_{v22} \end{bmatrix}$$

überlegen). Jede linkskopprime Faktorisierung $\{\widetilde{N}_v, \widetilde{M}_v\}$ des verallgemeinerten Streckenmodells kann man aber erzeugen, indem man \widetilde{M}'_v und \widetilde{N}'_v von links mit einer unimodularen Matrix $U(s)$ passender Dimension multipliziert. Dies läßt die Eigenschaft der Linkskopprimheit unberührt, so daß (5.30) für jedes $\{\widetilde{N}_v, \widetilde{M}_v\}$ gilt.

Desgleichen ist leicht zu sehen, daß \widetilde{M}'_v und $\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$ ein rechtskopprimen Paar bilden: Eine asymptotisch stabile Linksinverse für

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M}'_v \\ \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & \widetilde{M}'_{v12} \\ 0 & \widetilde{M}'_{v22} \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

läßt sich einfach konstruieren. Multiplizieren wir diese von rechts mit

$$\begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad U \in \mathcal{UH}_\infty^{(l+p) \times (l+p)},$$

so erhalten wir eine stabile Linksinverse für jedes

$$\begin{bmatrix} U \begin{bmatrix} I_l & \widetilde{M}'_{v12} \\ 0 & \widetilde{M}'_{v22} \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_v \\ \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \end{bmatrix};$$

(5.31) ist damit gezeigt.

(3 \Rightarrow 1) s. z.B. [26]. □

Anmerkung: Analoge Bedingungen lassen sich für rechtskopprime Faktorisierungen des verallgemeinerten Streckenmodells herleiten.

Bedingung 3 in Satz 5.6 besagt, daß beim Herausgreifen des (2, 2)-Blocks

$$P_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \widetilde{M}_v^{-1} \widetilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$$

keine grenz- oder instabilen Pole gekürzt werden. Soll ein stabilisierender Regler existieren, so müssen also sämtliche instabilen Pole von $P(s)$ auch Pole von $P_{22}(s)$ sein. Intuitiv leuchtet deshalb der folgende Sachverhalt ein:

Satz 5.7 (Stabilität verallgemeinerter Regelkreise) _____

$P(s)$ sei stabilisierbar, genüge also den Bedingungen in Satz 5.6. Der verallgemeinerte Regelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $(P_{22}, -K)$ asymptotisch stabil ist. _____

Beweis: $\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$ und $\widetilde{M}_v^{-1}\widetilde{N}_v$ seien linkskopprime Faktorisierungen von P_{22} bzw. P . Laut Voraussetzung besitzen P_{22} und P dieselben instabile Pole. Die Determinanten der Nennermatrizen \widetilde{M} und \widetilde{M}_v stimmen deswegen bis auf einen in \mathcal{RH}_∞ invertierbaren Faktor $u(s)$ überein:

$$\det\widetilde{M}_v(s) = \det\widetilde{M}(s) u(s), \quad u(s) \in \mathcal{UH}_\infty.$$

Weiterhin gilt (vgl. die Formeln für Determinanten in Anhang A):

$$\begin{aligned} & \det\alpha_v \\ &= \det \left\{ \widetilde{M}_v \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & M_K \end{bmatrix} + \widetilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_K \end{bmatrix} \right\} \\ &= \det\widetilde{M}_v \det \left\{ I_{l+p} + \widetilde{M}_v^{-1}\widetilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} N_K M_K^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \right\} \det M_K \\ &= \det\widetilde{M}_v \det M_K \det \left\{ I_p + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \widetilde{M}_v^{-1}\widetilde{N}_v \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}}_{P_{22}} N_K M_K^{-1} \right\} \\ &= \det\widetilde{M}_v \det M_K \det \left\{ I_p + \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N} N_K M_K^{-1} \right\} \\ &= \underbrace{\det\widetilde{M}_v \det\widetilde{M}^{-1}}_u \det \underbrace{\left\{ \widetilde{M} M_K + \widetilde{N} N_K \right\}}_\alpha \\ &= u \det\alpha. \end{aligned}$$

Eine asymptotisch stabile Matrix ist genau dann unimodular in \mathcal{RH}_∞ , wenn ihre Determinante in \mathcal{RH}_∞ invertierbar ist. Damit haben wir gezeigt, daß unter der genannten Voraussetzung asymptotische Stabilität des verallgemeinerten Regelkreises (Unimodularität von α_v) gleichbedeutend mit asymptotischer Stabilität von $(P_{22}, (-K) = N_K M_K^{-1})$ (d.h. Unimodularität von α) ist. \square

5.2 Quantitative Eigenschaften im nominellen Fall

Unter quantitativen Eigenschaften eines (nominellen) Regelkreises verstehen wir seine Fähigkeit, Störungen und Meßrauschen weitgehend zu unterdrücken

und gleichzeitig gutes Führungsverhalten zu gewährleisten. Um diese Eigenschaften zu untersuchen, betrachten wir die Auswirkung aller von außen auf den nominellen Kreis wirkenden Signale (vgl. Bild 4.2) auf die Regeldifferenz:

$$\begin{aligned}
 e &:= r - y \\
 &= \underbrace{(I_p + GK)^{-1}(r - d)}_{:=S} + \underbrace{(I_p + GK)^{-1}GK \eta}_{:=T} + \dots \\
 &\quad \dots - \underbrace{(I_p + GK)^{-1}G d'}_{:=SG}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

S gibt die Empfindlichkeit des Fehlers e bezüglich Ausgangsstörungen und Führungsgrößen an und heißt *Sensitivitätsmatrix*. Wegen

$$\begin{aligned}
 S + T &= (I_p + GK)^{-1} + (I_p + GK)^{-1}GK \\
 &= (I_p + GK)^{-1}(I_p + GK) \\
 &= I_p
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

wird T *komplementäre Sensitivitätsmatrix* genannt. Im folgenden setzen wir immer voraus, daß (G, K) asymptotisch stabil ist, daß also sämtliche Übertragungspole der Matrizen S , T und SG links der imaginären Achse liegen.

5.2.1 Eingrößensysteme

Wir betrachten zunächst den bekannten Sachverhalt im Eingrößenfall. Für skalare Übertragungssysteme stimmen Amplitudenverstärkung und Betrag des Frequenzganges überein (vgl. die Diskussion in Abschnitt 2.1). Deswegen muß unser Ziel darin bestehen, die Beträge der den geschlossenen Kreis charakterisierenden Frequenzgänge „genügend klein“ zu halten. Üblicherweise strebt man im niederfrequenten Bereich $|S(j\omega)| \ll 1$ und $|S(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$, im hochfrequenten Bereich $|T(j\omega)| \ll 1$ an. Damit bringt man zum Ausdruck, daß Führungs- und Störverhalten in erster Linie für kleine Frequenzen interessiert, während Meßrauschen i.a. hochfrequent ist. Wegen $S = 1 - T$ – dem skalaren Analogon zu (5.33) – folgt hieraus, daß im niederfrequenten Bereich $|T(j\omega)| \approx 1$, im hochfrequenten Bereich $|S(j\omega)| \approx 1$. In der klassischen Regelungstechnik betrachtet man statt der Betragsbedingungen für S und T meist äquivalente Bedingungen für den Frequenzgang $Q(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ des offenen Kreises. Wie man leicht erkennt, gilt:

$$\begin{aligned}
 |S(j\omega)| \ll 1, \quad |T(j\omega)| \approx 1 &\iff |Q(j\omega)| \gg 1, \\
 |S(j\omega)| \approx 1, \quad |T(j\omega)| \ll 1 &\iff |Q(j\omega)| \ll 1.
 \end{aligned}$$

In diesen Fällen wird die Amplitudenverstärkung von S und T offenbar durch den Betrag von Q bestimmt. Demgegenüber hängen in einem um die *Durchtrittsfrequenz(en)*³ ω_d liegenden mittleren Frequenzbereich die Amplitudenverstärkungen des geschlossenen Kreises auch von der Phase $\angle Q(j\omega)$ ab. Eine ausführliche Diskussion dieses und verwandter Phänomene folgt in Kapitel 7. An dieser Stelle begnügen wir uns damit, diesen Sachverhalt durch ein Beispiel zu illustrieren.

Beispiel: Bild 5.13 zeigt die Verläufe zweier Frequenzgänge $Q(j\omega)$.

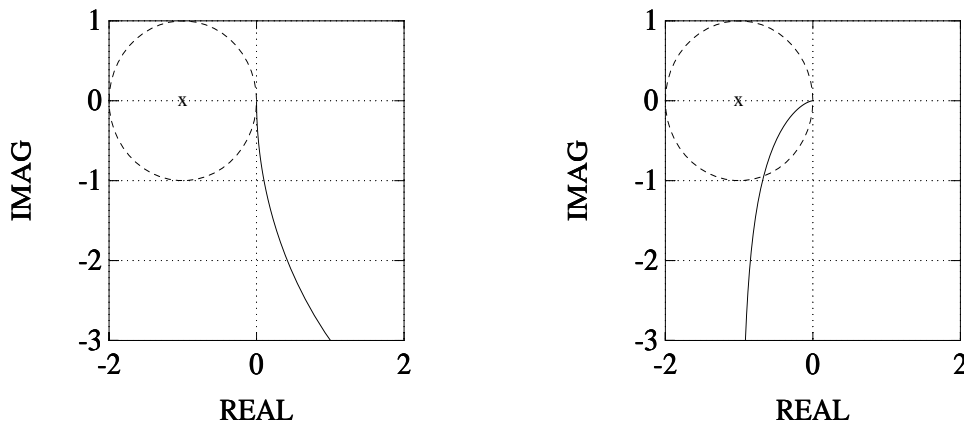


Bild 5.13: Verlauf zweier Frequenzgänge $Q(j\omega)$.

Im ersten Fall gilt $\angle Q(j\omega) \geq -\pi/2$; $Q(j\omega)$ bleibt also außerhalb eines Kreises um den kritischen Punkt $(-1, 0)$ mit Radius 1. $|1 + Q(j\omega)|$ (die Entfernung vom kritischen Punkt zu einem Punkt der Ortskurve $Q(j\omega)$) ist deswegen für alle ω größer, $|S(j\omega)| = |1 + Q(j\omega)|^{-1}$ kleiner als 1. Im zweiten Fall ist diese Phasenbedingung dagegen nicht erfüllt; die Ortskurve von $Q(j\omega)$ „dringt“ in den dargestellten Kreis ein, und $|S(j\omega)|$ weist eine Überhöhung auf. Diese ist umso größer, je dichter $Q(j\omega)$ den kritischen Punkt passiert.

Durchtrittsfrequenz und Verlauf von $Q(j\omega)$ (und damit von $|S(j\omega)|$ und $|T(j\omega)|$) im umliegenden „mittleren“ Frequenzbereich bestimmen das dynamische Verhalten des Regelkreises (z.B. die Geschwindigkeit und Dämpfung des Einschwingverhaltens bei sprungförmigen Änderungen der Führungsgröße).

³Als Durchtrittsfrequenz bezeichnet man eine Frequenz ω_d , für die $|Q(j\omega_d)| = 1$ gilt.

5.2.2 Mehrgrößensysteme

Die für den Eingrößenfall skizzierten Grundgedanken lassen sich im wesentlichen auf Mehrgrößensysteme übertragen. Verschiedene Details erweisen sich allerdings als komplizierter: Quantitative Eigenschaften eines mehrschleifigen Regelkreises können wir auf *strukturierte* oder *unstrukturierte* Art und Weise beschreiben. Bei einer unstrukturierten Beschreibung geben wir den Einfluß der auf den Kreis wirkenden vektoriellen Größen $r(j\omega)$, $d(j\omega)$, $d'(j\omega)$ oder $\eta(j\omega)$ auf die Regeldifferenz $e(j\omega)$ durch (frequenzabhängige) Matrizennormen an. Strukturierte Beschreibungen arbeiten demgegenüber mit den einzelnen Elementen der Übertragungsmatrizen S , T etc. und ermöglichen deshalb eine Aussage über die Stärke der Auswirkung einzelner Elemente von $r(j\omega)$, $d(j\omega)$, $d'(j\omega)$ oder $\eta(j\omega)$ auf Elemente von $e(j\omega)$. Wie wir im folgenden sehen werden, läßt sich aber auch bei Verwendung einer unstrukturierten Beschreibung durch Einführung von Gewichtsmatrizen zwischen verschiedenen Elementen vektorwertiger Signale differenzieren. Daher können in den meisten Anwendungsfällen reale Zielsetzungen auch durch eine solche unstrukturierte Beschreibung adäquat wiedergegeben werden. Als ersten Schritt in Richtung einer unstrukturierten Beschreibung regelungstechnischer Ziele müssen wir den Begriff der Amplitudenverstärkung von Ein- auf Mehrgrößensysteme erweitern. Dies kann mit Hilfe von *Singulärwerten* erfolgen.

5.2.2.1 Singulärwerte

Wir betrachten die Beziehung $y = Gu$. In diesem Abschnitt sei die Frequenz fest vorgegeben, so daß wir y , u und G als komplexwertige konstante Vektoren bzw. Matrizen interpretieren können. Im *skalaren Fall* (y , u , $G \in \mathbb{C}^1$) definieren wir die Verstärkung zwischen Eingang u und Ausgang y als Quotient der Beträge beider Größen. Sie stimmt offenbar für alle nichtverschwindenden u mit dem Betrag von G überein:

$$\frac{|y|}{|u|} = |G| \quad \text{für alle } u \neq 0.$$

Deshalb können wir $|G|$ als *die* Verstärkung des Skalars G bezeichnen.

Im Matrizen-Fall können wir die Verstärkung zwischen Ein- und Ausgangsvektor ganz analog definieren, wenn wir den Betrag von y und u durch eine *Vektornorm* ersetzen. Wir werden im folgenden immer die *Euklidische Vektornorm*

$$\begin{aligned} \|y\| &:= \sqrt{\sum_{i=1}^p |y_i|^2} \\ &= \sqrt{y^*y} \end{aligned}$$

benutzen. y^* steht für die konjugiert Transponierte von y . Anders als bei skalaren Systemen hängt die Verstärkung $\frac{\|y\|}{\|u\|}$ von der Eingangsgröße u – genauer: von der Richtung des Vektors u – ab. Dies zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 10^4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wählen wir als Eingangsvektor

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

so ergibt sich der gesuchte Quotient zu

$$\frac{\|y\|}{\|u\|} = \frac{\|Gu\|}{\|u\|} = 0.$$

Beträgt der Eingangsvektor aber

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

so erhält man

$$\frac{\|y\|}{\|u\|} = \frac{\|Gu\|}{\|u\|} = 10^4.$$

Besonders interessiert natürlich die maximale Verstärkung zwischen Eingangs- und Ausgangsvektor:

$$\max_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} = \sqrt{\max_{u \neq 0} \left(\frac{\|Gu\|}{\|u\|} \right)^2} \quad (5.34)$$

$$= \sqrt{\max_{u \neq 0} \frac{u^* G^* G u}{u^* u}} \quad (5.35)$$

$$= \sqrt{\lambda_{\max}(G^* G)} \quad (5.36)$$

$$:= \bar{\sigma}[G]. \quad (5.37)$$

Von (5.34) nach (5.35) gelangt man durch Einsetzen der Euklidischen Vektornorm. Die Beziehung (5.36) ist unter dem Namen *Rayleigh-Prinzip* bekannt [106]. $\lambda_{\max}[\dots]$ steht für den größten Eigenwert einer Matrix und G^* für die konjugiert Transponierte von G . $\bar{\sigma}[G]$ heißt *größter Singulärwert* der Matrix G .

Er gibt die (im Sinne der Euklidischen Vektornorm) größte Verstärkung von G an. Man bezeichnet $\bar{\sigma}[G]$ auch als die durch *die Euklidische Vektornorm induzierte Matrizenorm*⁴. Als Norm muß der größte Singulärwert einer Matrix die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[G] &\geq 0, \\ \bar{\sigma}[G] = 0 &\iff G = 0, \\ \bar{\sigma}[aG] &= |a| \bar{\sigma}[G] \text{ für jedes komplexwertige } a, \\ \bar{\sigma}[G_1 + G_2] &\leq \bar{\sigma}[G_1] + \bar{\sigma}[G_2]. \end{aligned} \tag{5.39}$$

(5.39) wird als Dreiecksungleichung bezeichnet. Weiterhin gilt:

$$\bar{\sigma}[G_1 G_2] \leq \bar{\sigma}[G_1] \bar{\sigma}[G_2]. \tag{5.40}$$

Ein Mehr an Information entnimmt man der *Singulärwertzerlegung*: Jede komplexwertige Matrix $G \in \mathbb{C}^{p \times q}$ kann folgendermaßen zerlegt werden:

$$G = U \Sigma V^*;$$

U und V sind unitäre $p \times p$ - bzw. $q \times q$ -Matrizen (eine konstante komplexwertige Matrix heißt unitär, wenn ihre Inverse existiert und mit der konjugiert Transponierten der Matrix übereinstimmt):

$$\begin{aligned} U^* U &= U U^* = I_p, \\ V^* V &= V V^* = I_q; \end{aligned}$$

alle außerhalb der Hauptdiagonalen stehenden Elemente der $p \times q$ -Matrix Σ verschwinden:

$$\Sigma = \begin{cases} \left[\underbrace{\text{diag} \{ \sigma_i[G] \}}_p \underbrace{0}_{q-p} \right]_p & \text{für } p \leq q \\ \left[\underbrace{\text{diag} \{ \sigma_i[G] \}}_q \underbrace{0}_{p-q} \right]_q & \text{für } p \geq q. \end{cases}$$

⁴Wenn wir die „Größe“ von Vektoren durch eine andere Norm messen, erhalten wir natürlich eine andere Formel für die maximale Verstärkung einer Matrix, i.e. eine andere Matrizenorm. Verwenden wir als Vektornorm die sogenannte Maximum-Norm $\|u\| := \max_i |u_i|$, so ergibt sich als induzierte Matrizenorm

$$\begin{aligned} \|G\| &= \max_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} \\ &= \max_i \sum_{j=1}^q |g_{ij}|. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Die *Singulärwerte* $\sigma_i[G]$ sind reell und nichtnegativ und werden üblicherweise der Größe nach geordnet:

$$\bar{\sigma}[G] := \sigma_1[G] \geq \dots \geq \sigma_{\min\{p,q\}}[G] := \underline{\sigma}[G].$$

Sie genügen der Beziehung

$$\sigma_i[G] = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i[GG^*]} & \text{für } p \leq q \\ \sqrt{\lambda_i[G^*G]} & \text{für } p \geq q. \end{cases}$$

Falls $p \geq q$, können wir dem kleinsten Singulärwert $\underline{\sigma}[G]$ eine (5.37) äquivalente Interpretation zuordnen:

$$\underline{\sigma}[G] = \min_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|}.$$

In diesem Fall bezeichnet man die $\sigma_i[G]$ auch als *Hauptverstärkungen*, die Spalten der Matrizen V und U als *Haupteingangs-* bzw. *-ausgangsrichtungen*: Ein zur i -ten Spalte von V paralleler Vektor u wird durch Multiplikation mit der Matrix G offenbar mit dem Faktor $\sigma_i[G]$ verstärkt und parallel zur i -ten Spalte von U ausgerichtet.

Für quadratische Matrizen G_1, G_2, G gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}[G_1 G_2] &\geq \underline{\sigma}[G_1] \underline{\sigma}[G_2], \\ \max\{1 - \bar{\sigma}[G], \underline{\sigma}[G] - 1\} &\leq \underline{\sigma}[I_p + G] \leq \underline{\sigma}[G] + 1. \end{aligned}$$

Ist G darüberhinaus nichtsingulär, so gilt weiterhin:

$$\bar{\sigma}[G] = \frac{1}{\underline{\sigma}[G^{-1}]}.$$

Anmerkung: Man kann leicht überprüfen, daß sämtliche Singulärwerte der Frequenzgangmatrix eines (ko-)unitären Übertragungssystems 1 sind.

Anmerkung: Falls $p < q$, werden wir in späteren Kapiteln durch Weglassen der letzten $q - p$ Spalten der Matrix V oft die Notation etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned} G &= U \begin{bmatrix} \text{diag}\{\sigma_i\} & 0 \end{bmatrix} [v_1 \dots v_p v_{p+1} \dots v_q]^* \\ &= U \underbrace{\text{diag}\{\sigma_i\}}_{:=\Sigma} \underbrace{[v_1 \dots v_p]^*}_{:=V^*}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

In dieser Schreibweise ist Σ eine quadratische Diagonalmatrix und V eine subunitäre $q \times p$ -Matrix ($V^*V = I_p$).

5.2.2.2 Formulierung unstrukturierter Anforderungen mit Hilfe von Singulärwerten

Um den Unterschied zu Eingrößensystemen herauszuarbeiten, betrachten wir zunächst einen einfachen, aber wichtigen Sonderfall: eines der auf den Kreis einwirkenden vektorwertigen Signale (z.B. die Führungsgröße) ändere sich sprungförmig

$$r(t) = \hat{r}h(t)$$

bzw. – im Laplace-Bereich –

$$r(s) = \hat{r} \frac{1}{s},$$

alle anderen externen Signale verschwinden. Die Elemente des (reellen) Vektors \hat{r} geben die Sprunghöhen der p Führungsvariablen $r_i(t)$ an. Gleichung (5.32) entnehmen wir die resultierende Regeldifferenz $e(s)$. Durch einfaches Anwenden des zweiten Grenzwertsatzes der Laplace-Transformation erhält man die *bleibende* Regeldifferenz

$$\begin{aligned} e_b &:= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \\ &= S(0) \hat{r}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Um ein Verschwinden der bleibenden Regeldifferenz für alle möglichen \hat{r} zu gewährleisten, müssen wir also fordern, daß $S(0) = 0$ oder – gleichwertig –

$$\bar{\sigma}[S(0)] = 0. \tag{5.43}$$

Gilt (5.43), so werden durch (5.42) offenbar sämtliche reelle Vektoren \hat{r} auf $e_b = 0$ abgebildet (s. Bild 5.14). Wie können wir diese Bedingung anpas-

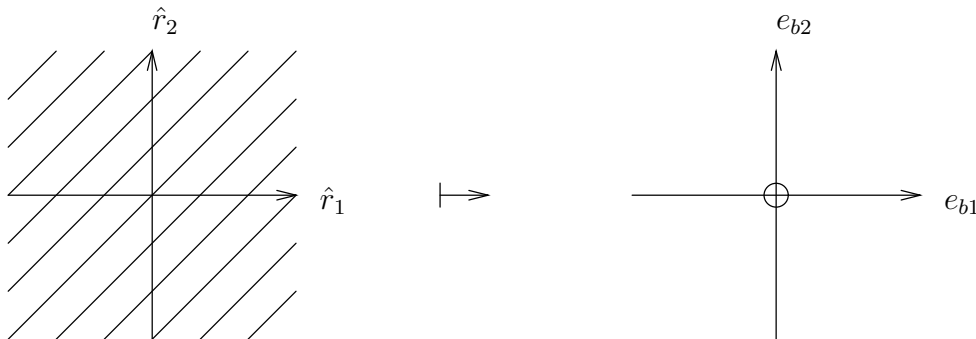


Bild 5.14: Verschwindende bleibende Regeldifferenz.

sen, wenn sich – wie bei Mehrgrößenproblemen oft der Fall – Anforderungen bezüglich der bleibenden Regeldifferenz in differenzierterer Form darstellen? Nicht selten kennt man z.B. die maximal möglichen Sprunghöhen $\hat{r}_{i \max}$ für alle Elemente des Führungsvektors $r(t)$ und verlangt, daß

$$|e_{bi}| \leq e_{bi \max}, \quad i = 1, \dots, p,$$

(s. Bild 5.15). Notwendige *und* hinreichende Bedingungen hierfür lassen sich

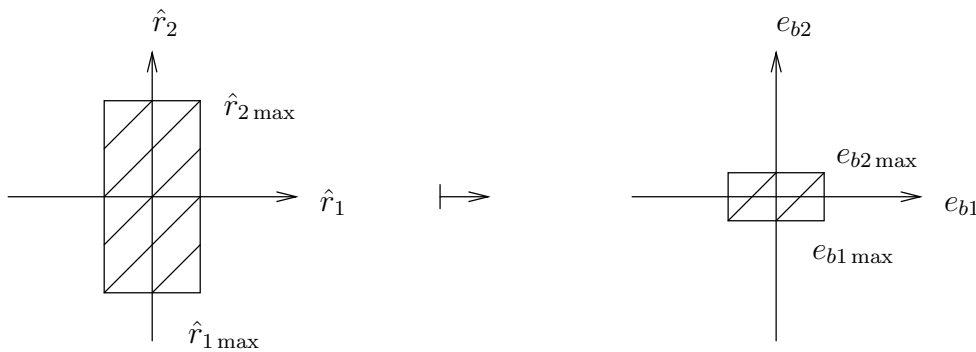


Bild 5.15: Maximal zulässige bleibende Regeldifferenz.

mit Hilfe von Singulärwerten nicht angeben – wir müßten die in (5.38) definierte Matrizenorm verwenden. Wohl aber können wir hinreichende Bedingungen für solche Ziele formulieren: Wir müssen offenbar sicherstellen, daß jedes im linken Parallelepiped enthaltene \hat{r} auf ein e_b im rechten Parallelepiped abgebildet wird. Dies erreichen wir sicherlich, wenn wir – wie in Bild 5.16 gezeigt – dem linken Parallelepiped ein Ellipsoid *um*-, dem rechten ein Ellip-

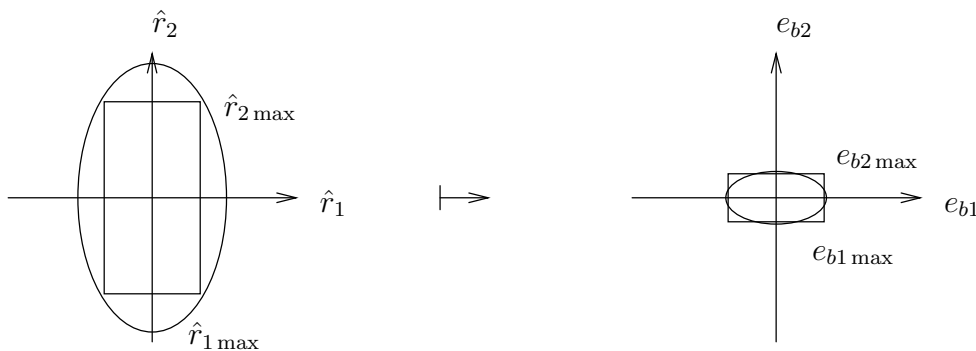


Bild 5.16: Garantiertes Einhalten der maximal zulässigen bleibenden Regeldifferenz.

soid *ein*beschreiben und das (abgeschlossene) Innere des linken Ellipsoids

$$\sum_{i=1}^p \frac{\hat{r}_i^2}{p \hat{r}_{i \max}^2} = \left\| \underbrace{\left(\text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{p} \hat{r}_{i \max}} \right) \right)}_{:=W_e^{-1}} \hat{r} \right\|^2 \leq 1$$

auf das (abgeschlossene) Innere des rechten Ellipsoids

$$\sum_{i=1}^p \frac{e_{bi}^2}{e_{bi \max}^2} = \left\| \underbrace{\left(\text{diag} \left(\frac{1}{e_{bi \max}} \right) \right)}_{:=W_a} e_b \right\|^2 \leq 1$$

abbilden. Wir fordern also:

$$\begin{aligned} \max_{\hat{r}, \|W_e^{-1} \hat{r}\| \leq 1} \|W_a e_b\| &= \max_{\hat{r}, \|W_e^{-1} \hat{r}\| \leq 1} \|W_a S(0) \hat{r}\| \\ &= \max_{\tilde{r}, \|\tilde{r}\| \leq 1} \|W_a S(0) W_e \tilde{r}\| \\ &= \max_{\tilde{r} \neq 0} \frac{\|W_a S(0) W_e \tilde{r}\|}{\|\tilde{r}\|} \\ &= \bar{\sigma}[W_a S(0) W_e] \stackrel{!}{\leq} 1. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Bedingungen für differenzierte quantitative Anforderungen können also mit Hilfe von Singulärwerten formuliert werden, wenn geeignete Ausgangs- und Eingangsgewichte W_a , W_e verwendet werden.

Bisher haben wir nur das asymptotische Verhalten der Regeldifferenz bei einer sprungförmigen Änderung der Führungsgröße betrachtet. Dieses Verhalten wird durch die Sensitivitätsmatrix an der Stelle $\omega = 0$ charakterisiert. Analoge Überlegungen können wir für sinusförmige, an beliebigen Stellen in den Regelkreis eingreifende Signale anstellen: Enthält z.B. das Meßrauschen eine harmonische Schwingung $\eta = \hat{\eta} e^{j\omega t}$, so werden wir in der Regeldifferenz einen Anteil $T(j\omega) \hat{\eta} e^{j\omega t}$ finden. Die maximale Verstärkung zwischen beiden Signalen beträgt dann

$$\begin{aligned} \max_{\hat{\eta} \neq 0} \frac{\|T(j\omega) \hat{\eta} e^{j\omega t}\|}{\|\hat{\eta} e^{j\omega t}\|} &= \max_{\hat{\eta} \neq 0} \frac{\|T(j\omega) \hat{\eta}\|}{\|\hat{\eta}\|} \\ &= \bar{\sigma}[T(j\omega)]. \end{aligned}$$

Um Meßrauschen (mit beliebigem Amplitudenvektor $\hat{\eta}$) in einem vorgegebenen Frequenzbereich Ω_η weitgehend zu unterdrücken, müssen wir also fordern, daß

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \ll 1, \quad \omega \in \Omega_\eta, \quad (5.45)$$

Wird in einem anderen Frequenzbereich Ω_{rd} gutes Führungsverhalten und weitgehende Unterdrückung von Ausgangsstörungen verlangt, so fordern wir:

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \ll 1, \quad \omega \in \Omega_{rd}. \quad (5.46)$$

Da wir den größten Singulärwert einer Matrix als maximale (frequenzabhängige) Verstärkung auffassen, impliziert (5.46), daß im Frequenzbereich Ω_{rd} beliebige sinusförmige Führungsgrößen und Ausgangsstörungen nur stark abgeschwächt (im Sinne der Euklidischen Vektornorm) in die Regeldifferenz eingehen. Die analoge Forderung für weitgehende Unterdrückung von am Streckeneingang angreifenden Störungen im Frequenzbereich $\Omega_{d'}$ lautet:

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)G(j\omega)] \ll 1, \quad \omega \in \Omega_{d'}.$$

Die Auswirkung von Eingangs- und Ausgangsstörung auf die Regeldifferenz stimmt bis auf das vorgegebene Streckenmodell G überein. Wir können uns deshalb oft (aber nicht immer!) auf die Betrachtung einer der beiden Störungen – den am Streckenausgang angreifenden Vektor d – beschränken. Falls der Begriff „Störverhalten“ nicht genauer spezifiziert wird, bezeichnet er im folgenden immer die Reaktion des Regelkreises auf am Streckenausgang wirkende Störungen.

Wegen (5.33) können wir für eine feste Frequenz offenbar entweder (5.46) oder (5.45) erfüllen, also entweder gutes Führungsverhalten oder Unterdrückung von Meßrauschen gewährleisten. (5.33) stellt eine *algebraische Einschränkung* des erreichbaren Regelkreisverhaltens dar [30] (vgl. Kapitel 7). Der übliche Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, – ganz wie im Eingrößensystem – (5.45) für den Bereich hoher, (5.46) für den Bereich niedriger Frequenzen zu fordern:

$$\begin{aligned} \Omega_{rd} &= [0, \omega_{rd}] \\ \Omega_{\eta} &= [\omega_{\eta}, \infty) \\ \omega_{rd} &< \omega_{\eta}. \end{aligned}$$

Entsprechend den in der Praxis üblichen Anforderungen geht man also davon aus, daß gutes Führungsverhalten und Störverhalten hauptsächlich im niederfrequenten Bereich wichtig ist (für $\omega = 0$ impliziert (5.46) – wie wir zu Beginn dieses Abschnitts diskutiert haben – kleine bleibende Regeldifferenzen), während Meßrauschen vorwiegend im Bereich hoher Frequenzen auftritt. Wie die Frequenzen ω_{rd} und ω_{η} gewählt werden und welchen Verlauf die maximalen Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix im „Zwischenbereich“ $\omega_{rd} < \omega < \omega_{\eta}$ aufweisen, bestimmt – wie bei Eingrößensystemen – Geschwindigkeit und Dämpfung des Einschwingverhaltens

des Regelkreises. In Kapitel 7 wird gezeigt, wie sogenannte *analytische Einschränkungen* realisierbare Verläufe der Singulärwerte und damit erreichbare dynamische Regelkreiseigenschaften beeinflussen.

Den „Rechenregeln“ für Singulärwerte auf Seite 168 entnimmt man, daß die Forderungen (5.46) und (5.45) auch mittels der Frequenzgangmatrix $Q(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ des offenen Kreises ausgedrückt werden können:

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \ll 1 \iff \underline{\sigma}[Q(j\omega)] \gg 1 \tag{5.47}$$

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \ll 1 \iff \bar{\sigma}[Q(j\omega)] \ll 1. \tag{5.48}$$

Die Beziehungen (5.47)-(5.48) deuten zwei prinzipielle Möglichkeiten an, regelungstechnische Ziele zu formulieren – über Singulärwerte der Frequenzgangmatrizen des *offenen* bzw. des *geschlossenen* Kreises.

(5.46) und (5.45) stellen eine naheliegende (und einfache!) Verallgemeinerung der entsprechenden skalaren Betragsbedingungen auf den Mehrgrößenfall dar. Für viele praktische Anwendungsbeispiele erweisen sich diese Vorgaben aber als zu „grob“. Dem können wir – wie bereits ausführlich diskutiert – durch Einführen von Gewichtsmatrizen entgegenwirken. Wählen wir diese Gewichtungen darüberhinaus frequenzabhängig, so können wir nicht nur zwischen den Komponenten vektorwertiger Regelkreissignale differenzieren, sondern auch für verschiedene Frequenzen gültige unterschiedliche Spezifikationen mittels *einer* Bedingung ausdrücken. Dies illustriert das folgende Beispiel:

Beispiel: Die Skalare $w_{S1}(j\omega)$ und $w_{S2}(j\omega)$ seien asymptotisch stabile und minimalphasige Übertragungssysteme. Ihre Amplitudengänge sind in Bild 5.17 dargestellt.

Durch die Forderung

$$\bar{\sigma} \left[\left[\begin{array}{cc} w_{S1}(j\omega) & 0 \\ 0 & w_{S2}(j\omega) \end{array} \right] S(j\omega) \right] \leq 1$$

bringen wir zum Ausdruck,

- daß für $\omega < 0.001$ Abweichungen in der ersten Regelgröße wichtiger als in der zweiten Regelgröße sind (ist obige Bedingung für $\omega = 0$ erfüllt, so wird ein Kreis mit Radius 1 auf eine Ellipse mit Halbgeraden 0.01 und 0.1 abgebildet),
- daß sich in einem „mittleren“ Frequenzbereich ($0.001 < \omega < 10$) die Prioritäten vertauschen
- und daß für „hohe“ Frequenzen ($\omega > 1000$) das Führungs- und Störverhalten in beiden Kanälen wenig interessiert. In

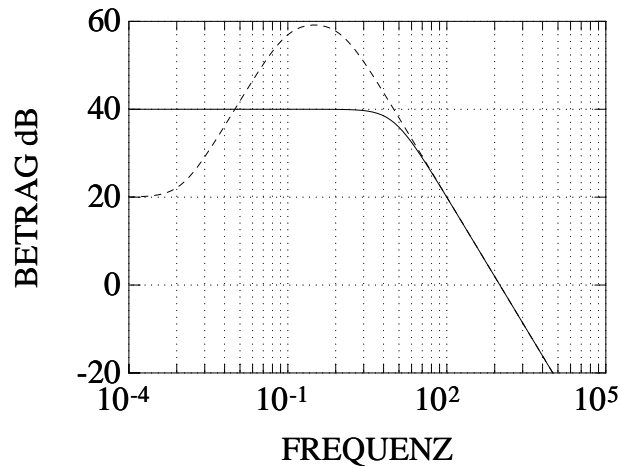


Bild 5.17: Frequenzabhängige Gewichtung der Sensitivitätsmatrix (durchgezogene Linie: $|w_{S1}(j\omega)|$, unterbrochene Linie: $|w_{S2}(j\omega)|$).

diesem Frequenzbereich greifen dann typischerweise Anforderungen für andere den Regelkreis charakterisierende Übertragungsmatrizen, wie z.B. die komplementäre Sensitivitätsmatrix.

Im allgemeinen wollen wir nicht nur Forderungen bezüglich des Führungs- und Störverhaltens (i.e. der Sensitivitätsmatrix S), sondern auch bezüglich der Unterdrückung von Meßrauschen (i.e. der komplementären Sensitivitätsmatrix T) und der Stellgliedaktivitäten (i.e. der Matrix KS) zum Ausdruck bringen. In diesem Fall gewichten wir alle drei Matrizen frequenzabhängig, fassen sie zu einer Matrix

$$R := \begin{bmatrix} W_S S \\ W_{KS} KS \\ W_T T \end{bmatrix}$$

zusammen und fordern $\bar{\sigma}[R(j\omega)] \leq 1$. $R(s)$ kann dann als Übertragungsmatrix eines geeignet definierten verallgemeinerten Regelkreises interpretiert werden (vgl. Kapitel 4).

5.2.2.3 Strukturierte Anforderungen

Ein weiterer naheliegender Ansatz zur Differenzierung regelungstechnischer Ziele besteht im Abgehen von Singulärwerten und der Formulierung von Betragsbedingungen für jedes Element der Matrizen $S(j\omega)$, $T(j\omega)$ oder $Q(j\omega)$.

Für jede komplexwertige $p \times q$ -Matrix G definieren wir:

$$|G|_e := \begin{bmatrix} |g_{11}| & \cdots & |g_{1q}| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |g_{p1}| & \cdots & |g_{pq}| \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Dann können strukturierte Anforderungen durch

$$|S(j\omega)|_e \stackrel{!}{\leq}_e \Sigma_e(\omega),$$

$$|T(j\omega)|_e \stackrel{!}{\leq}_e \Theta_e(\omega)$$

wiedergegeben werden. Σ_e und Θ_e sind reelle Matrizen mit nichtnegativen Elementen. " \leq_e " steht für „elementweise kleiner oder gleich“.

Natürlich bleibt die Beziehung (5.33) von der Formulierung der Anforderungen unberührt. Die Verwendung einer strukturierten Beschreibung oder die Einbeziehung von Gewichten in eine unstrukturierte Beschreibung erlauben es aber offenbar, in manchen „Kanälen“ des Regelkreises gutes Führungs- und Störverhalten, in anderen – für dieselbe Frequenz – weitgehende Unterdrückung von Meßrauschen zu fordern.

5.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde untersucht, wie sich erwünschte Regelkreiseigenschaften bei Vorliegen eines exakten Streckenmodells formulieren und überprüfen lassen. Die wichtigste dieser Eigenschaften ist sicherlich asymptotische Stabilität: Wir leiteten eine Beziehung für das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises her und leiteten hieraus graphische Stabilitätskriterien ab. Wir behandelten Wurzelortskurven im Mehrgrößenfall, bestimmten die Klasse aller stabilisierenden Regler (Youla-Parametrierung) und gingen auf die Frage der Stabilisierbarkeit und Stabilität verallgemeinerter Regelkreise ein.

Anschließend untersuchten wir quantitative Regelkreiseigenschaften – die Fähigkeit eines Regelkreises, Störungen und Meßrauschen zu unterdrücken und „gutes“ Führungsverhalten zu gewährleisten. Quantitative Eigenschaften lassen sich prinzipiell auf zwei Arten behandeln: Bei unstrukturierten Ansätzen werden sämtliche gewünschten Eigenschaften auf eine skalare Zielfunktion abgebildet. Bei strukturierten Ansätzen werden demgegenüber die Beträge einzelner Elemente von Frequenzgangmatrizen betrachtet. Wir zeigten, daß sich durch Einführen frequenzabhängiger Gewichtsmatrizen auch bei einer unstrukturierten Vorgehensweise zwischen Anforderungen in verschiedenen Variablen und verschiedenen Frequenzbereichen eines mehrschleifigen Regelkreises differenzieren läßt.

5.4 Literaturhinweise

Bei der Einführung des Stabilitätsbegriffes für den Regelkreis (G, K) folgten wir weitgehend *Vidyasagars* Darstellung in [110]. Dort wurden allerdings koprime Faktorisierungen anstatt Polynom-Matrizenbruchdarstellungen benutzt. Die Beziehung zwischen den charakteristischen Polynomen des offenen und geschlossenen Kreises wurde – mit anderen Methoden – von *Hsu* und *Chen* [45] hergeleitet. Satz 5.2 geht auf *Rosenbrock* [99], das verallgemeinerte Nyquist-Kriterium auf *MacFarlane* zurück. Einen mathematisch strengen Beweis letzteren Stabilitätstests findet man bei *MacFarlane* und *Postlethwaite* [66]. Das „small gain theorem“ wurde (in allgemeinerer Form) von *Zames* [116] vorgeschlagen. Die Darstellung von Wurzelortskurven bei Mehrgrößensystemen wurde den Arbeiten von *Owens* (insbesondere [82]) entnommen. Satz 5.5 stammt von *Youla et al.* [115] und *Desoer et al.* [12]; wir folgten der Darstellung in [110]. Der Sonderfall eines asymptotisch stabilen Streckenmodells wurde von *Frank* [28] sowie *Garcia* und *Morari* [32] behandelt. Frühe Untersuchungen zu diesem Fall finden sich auch bereits bei *Newton*, *Gould* und *Kaiser* [80], sowie bei *Smith* [104]. Stabilisierbarkeit und Stabilität verallgemeinerter Regelkreise werden ausführlich von *Francis* [26] besprochen. Bedingung 2 in Satz 5.6 geht auf *Green* [39] zurück.

Die Verwendung von Singulärwerten zur Beschreibung quantitativer Eigenschaften wurde von *MacFarlane* und *Scott-Jones* [67] sowie *Doyle* und *Stein* [21] vorgeschlagen. Mathematische Eigenschaften von Singulärwerten werden in den meisten Lehrbüchern der linearen Algebra oder der Matrizenrechnung behandelt (z.B. *Strang* [106], *Golub* und *van Loan* [37]). Detaillierte Informationen über strukturierte quantitative Anforderungen findet man in *Lunzes* Buch [61].

Kapitel 6

Robustheit

6.1 Modellfehler

In den folgenden Abschnitten behandeln wir *Robustheit* von Regelkreiseigenschaften: Gilt eine gewünschte Regelkreiseigenschaft E nicht nur für das Entwurfsmodell G , sondern für eine ganze *Klasse* \mathcal{G} von Streckenmodellen (bzw. eine Klasse \mathcal{D} von Modellfehlern oder -unsicherheit), so nennt man E *robust* bezüglich \mathcal{G} (bzw. \mathcal{D}). Keine Klasse von mathematischen Modellen kann allerdings die physikalische Realität in allen Details beschreiben; Robustheit einer Eigenschaft bezüglich jeder noch so weit gefaßten Klasse von Modellen bedeutet deshalb keine *Garantie*, diese Eigenschaft im *realen* Regelkreis wiederzufinden. Wohl aber vergrößert sich die *Wahrscheinlichkeit* für ein befriedigendes Arbeiten des entworfenen Reglers in der Realität, wenn wir Robustheit für eine Klasse von Modellunsicherheit sicherstellen können, die zumindest die Hauptfehlerursachen abbildet.

Im Idealfall sollte die betrachtete Fehlerklasse \mathcal{D} zwei Forderungen erfüllen:

1. \mathcal{D} sollte nur physikalisch sinnvolle Modellfehler enthalten. Umfaßt \mathcal{D} auch Fehler, die in der Realität gar nicht auftreten können, so versucht der Regler z.B. die Eigenschaft „Stabilität“ für „zu viele“ Modelle zu erzwingen und ist deshalb unter Umständen nicht mehr in der Lage, andere gewünschte Regelkreiseigenschaften zu realisieren; man sagt dann, das Fehlermodell (und damit der resultierende Regler) seien *zu konservativ*.
2. \mathcal{D} sollte sich „gut“ zur Analyse und Synthese von Regelkreisen verwenden lassen.

In gewissem Sinne widersprechen sich beide Forderungen: Je strukturierter eine Fehlerbeschreibung, je komplexer also die zugehörige Fehlerklasse, desto genauer können wir der tatsächlichen Situation Rechnung tragen. Hochstrukturierte Fehler erhält man z.B. durch Angabe zulässiger Intervalle für die Parameter der Übertragungsmatrix. Andererseits leuchtet unmittelbar ein, daß einfache, wenig strukturierte Fehlerbeschreibungen leichter in ein Entwurfsverfahren eingebracht werden können.

Wir wenden uns zunächst einigen wichtigen Beispielen *unstrukturierter* Modellfehler zu: Fehler werden in diesen Fällen durch frequenzabhängige Normen (speziell: den größten Singulärwert) zugehöriger Matrizen abgeschätzt. Dann betrachten wir *strukturierte* Fehler, für die wir elementweise frequenzabhängige Schranken kennen. Schließlich diskutieren wir eine sehr allgemeine, durch *strukturierte Singulärwerte* charakterisierte Fehlerklasse, in die wir alle zuvor behandelten Fälle einbetten können.

6.1.1 Unstrukturierte Modellfehler

$G(s)$ sei das einem Reglerentwurf zugrundeliegende nominelle Streckenmodell, $G_r(s)$ die Übertragungsmatrix eines beliebigen Elements der betrachteten Modellklasse. m_{G_r} und m_G bezeichnen die Anzahl instabiler oder grenzstabiler Pole von G_r bzw. G . In unsere Untersuchungen werden folgende Fehler- bzw. Modellklassen eingehen:

6.1.1.1 Additive Fehler

Additive Fehler werden definiert durch (vgl. Bild 6.1):

$$G_r(s) := G(s) + \Delta_A(s). \quad (6.1)$$

Wir betrachten die folgende Fehler- bzw. Modellklasse:

$$\mathcal{D}_A := \{\Delta_A \mid \bar{\sigma}[\Delta_A(j\omega)] < l_A(\omega); \quad m_{G_r} = m_G\}, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{G}_A := \{G + \Delta_A \mid \Delta_A \in \mathcal{D}_A\}. \quad (6.3)$$

Wir nehmen also an, daß eine bekannte frequenzabhängige obere Schranke für die (durch den größten Singulärwert gemessene) Größe der Fehlermatrix existiert. Weiterhin setzen wir voraus, daß kein zulässiger Modellfehler die Anzahl der grenz- und instabilen Pole des Modells verändert. Diese Annahme ist – wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden – Voraussetzung für die Herleitung einfacher Robustheitskriterien. Sie ist natürlich für alle asymptotisch stabilen

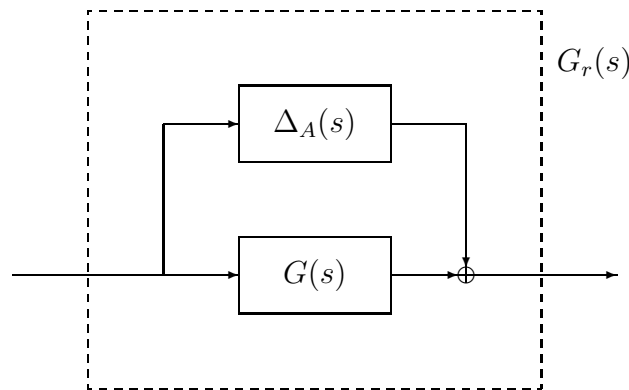


Bild 6.1: Additiver Modellfehler.

Fehler erfüllt. Man beachte, daß die Annahme einer (endlichen) oberen Schranke für $\Delta_A(j\omega)$ das Auftreten von Polen der Fehlerübertragungsmatrix auf der imaginären Achse ausschließt. Sie impliziert weiterhin, daß die Fehlerübertragungsmatrix proper ist. Einen typischen Verlauf der (reellen) Fehlerschranke $l_A(\omega)$ zeigt Bild 6.2: Das stationäre Übertragungsverhalten ist oft genau bekannt ($\Delta_A = 0$); bei hohen Frequenzen gilt meist $G_r \rightarrow 0$, $G \rightarrow 0$ (G_r und G sind streng proper) und damit $\Delta_A \rightarrow 0$.

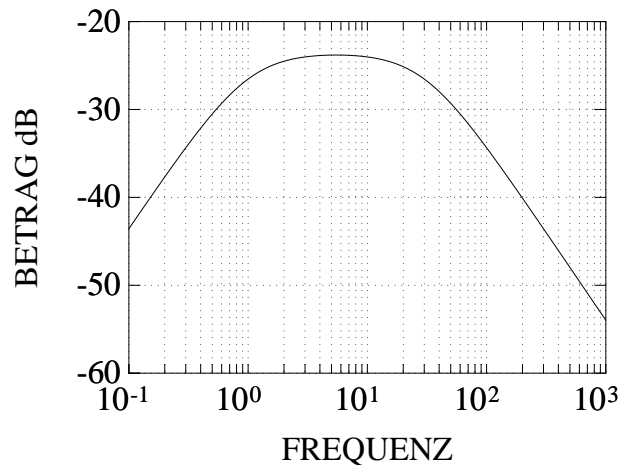


Bild 6.2: Typische Schranke für additiven Modellfehler.

6.1.1.2 Multiplikative Fehler:

Am Systemausgang „angreifende“ multiplikative oder proportionale Fehler definieren folgenden Zusammenhang zwischen G_r und G (vgl. Bild 6.3):

$$G_r(s) := (I_p + \Delta_M(s))G(s). \quad (6.4)$$

Multiplikative Fehler bleiben bei Vorschalten eines bekannten Netzwerkes

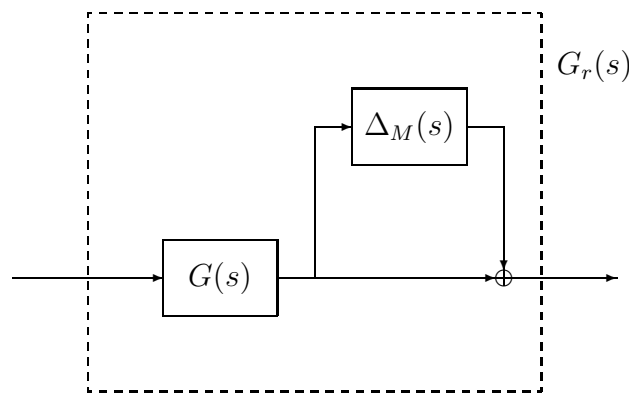


Bild 6.3: Multiplikativer (Proportionaler) Modellfehler.

(z.B. eines Reglers) erhalten. Sie sind deshalb oft leichter handhabbar als additive Fehler. Wir betrachten die Fehler- bzw. Modellklasse

$$\mathcal{D}_M := \mathcal{D}_{M1} \cup \mathcal{D}_{M2}, \quad (6.5)$$

$$\mathcal{D}_{M1} := \{\Delta_M \mid \bar{\sigma}[\Delta_M(j\omega)] < l_M(\omega); \Delta_M \text{ as. stabil}\}, \quad (6.6)$$

$$\mathcal{D}_{M2} := \{\Delta_M \mid \bar{\sigma}[\Delta_M(j\omega)] < l_M(\omega); m_{G_r} = m_G\}, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{G}_M := \{(I_p + \Delta_M)G \mid \Delta_M \in \mathcal{D}_M\}. \quad (6.8)$$

Zulässige Modellfehler sind also entweder asymptotisch stabil oder lassen die Anzahl der grenz- und instabilen Pole des Streckenmodells unverändert. In beiden Fällen setzen wir wiederum die Kenntnis einer oberen Schranke für die Größe der Fehler-Frequenzgangmatrix voraus. Die typische Form der multiplikativen Fehlerschranke l_M ist in Bild 6.4 wiedergegeben: Stationäre Genauigkeit bewirkt $\Delta_M(0) = 0$; Vernachlässigung von Dynamik höherer Ordnung kann Δ_M für große Frequenzen über den Wert 1 wachsen lassen.

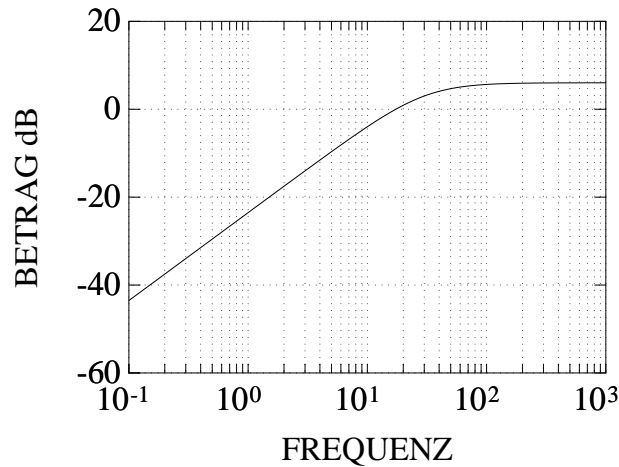


Bild 6.4: Typische Schranke für multiplikativen Modellfehler.

Anmerkung: Die Fehlerklasse \mathcal{D}_A besitzt formal eine einfachere Struktur als (6.5) – (6.8), da ein additiver asymptotisch stabiler Fehlerterm die Anzahl der grenz- bzw. instabilen Modellpole nicht verändern kann. Wie das folgende Beispiel zeigt ist dies bei multiplikativen Fehlern nicht gewährleistet: Eine asymptotisch stabile Fehlermatrix kann in diesem Fall dem Entwurfsmodell zwar keine instabilen Pole zufügen, wohl aber instabile Pole des Entwurfsmodells kürzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{-4}{s-1} \\
 \Delta_M(s) &= \frac{-2}{s+1} \\
 G_r(s) &= (1 + \Delta_M(s))G(s) \\
 &= \frac{-4}{s+1}.
 \end{aligned}$$

6.1.1.3 Faktorisierte Modellfehler

Unter einem faktorisierten Modellfehler verstehen wir ein Auftreten des Fehlers in Zähler- und Nennerterm einer links- (oder rechts-)koprimen Faktorisierung des Streckenmodells (s. Bild 6.5):

$$G = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}; \quad \widetilde{M}, \widetilde{N} \dots \text{linkskoprim}$$

$$G_r = \underbrace{(\widetilde{M} + \Delta_M)^{-1}}_{\widetilde{M}_r^{-1}} \underbrace{(\widetilde{N} + \Delta_N)}_{\widetilde{N}_r}; \quad \widetilde{M}_r, \widetilde{N}_r \dots \text{linkskoprim.} \quad (6.9)$$

Die betrachtete Fehler- bzw. Modellklasse wird definiert durch:

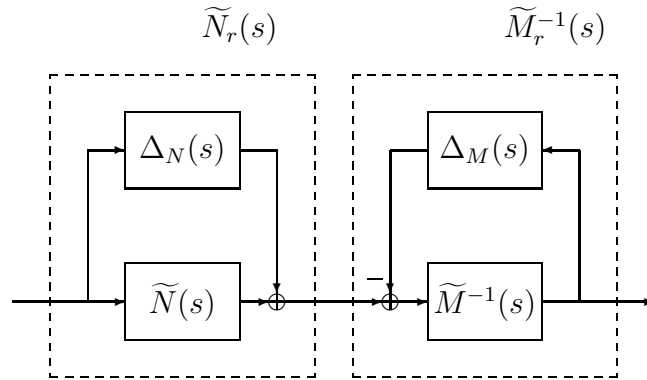


Bild 6.5: Faktorisierte Modellfehler.

$$\mathcal{D}_{MN} := \{[\Delta_M \ \Delta_N] \mid \bar{\sigma}[\Delta_M(j\omega) \ \Delta_N(j\omega)] < l_{MN}(\omega); \dots \quad (6.10)$$

$$\dots \Delta_M, \Delta_N \text{ as. stabil}\},$$

$$\mathcal{G}_{MN} := \{(\widetilde{M} + \Delta_M)^{-1}(\widetilde{N} + \Delta_N) \mid [\Delta_M \ \Delta_N] \in \mathcal{D}_{MN}\}. \quad (6.11)$$

Bild 6.6 zeigt einen typischen Verlauf der Fehlerschranke l_{MN} .

Wir können die Fehlerklasse \mathcal{D}_{MN} auf asymptotisch stabile Übertragungsmatrizen Δ_M, Δ_N beschränken, da sowohl $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ als auch $\widetilde{M} + \Delta_M, \widetilde{N} + \Delta_N$ als Zähler bzw. Nennerterme einer linkskoprimen Faktorisierung asymptotisch stabil sind. Man beachte, daß wir keine restriktiven Annahmen bezüglich der Zahl der instabilen Streckenpole getroffen haben. Durch Fehler aus \mathcal{D}_{MN} kann die Anzahl der instabilen Pole sowohl vergrößert als auch verkleinert werden. \mathcal{G}_{MN} kann deswegen Modelle mit unterschiedlich vielen instabilen Polen beinhalten.

Beispiel:

$$G(s) = \frac{1}{s + \epsilon} = \underbrace{1}_{\widetilde{M}^{-1}} \underbrace{(s + \epsilon)^{-1}}_{\widetilde{N}}$$

$$\Delta_M = \frac{-2\epsilon}{s + \epsilon}$$

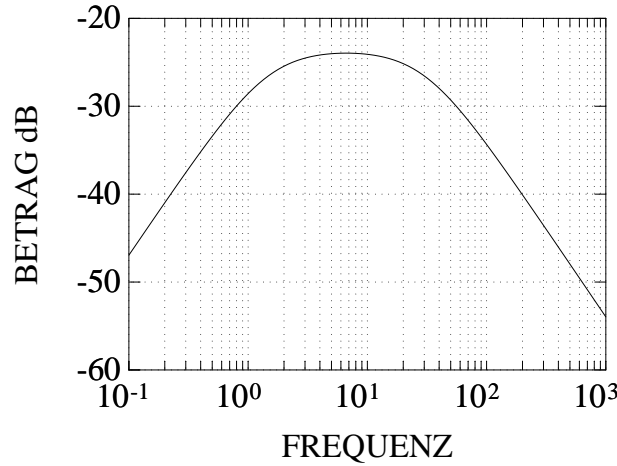


Bild 6.6: Typische Schranke für faktorisierten Modellfehler.

$$\Delta_N = 0$$

$$G_r(s) = \underbrace{\frac{s + \epsilon}{s - \epsilon}}_{\tilde{M}_r^{-1}} \underbrace{\frac{1}{s + \epsilon}}_{\tilde{N}_r} = \frac{1}{s - \epsilon}.$$

6.1.1.4 Verallgemeinerte unstrukturierte Modellfehler

Durch Definition einer geeigneten Übertragungsmatrix

$$\begin{bmatrix} z_\Delta \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta_{11}(s) & \Theta_{12}(s) \\ \Theta_{21}(s) & \Theta_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\Theta(s)} \begin{bmatrix} w_\Delta \\ u \end{bmatrix}$$

können die drei bisher behandelten Fehlermodelle zu der in Bild 6.7 gezeigten einheitlichen Darstellung zusammengefaßt werden: Die Fehlermatrix Δ besitze m_Δ Zeilen und l_Δ Spalten. Aus Bild 6.7 kann man die Übertragungsmatrix G_r des fehlerbehafteten Modells ablesen:

$$G_r(s) = \Theta_{22} + \Theta_{21} \Delta (I_{l_\Delta} - \Theta_{11} \Delta)^{-1} \Theta_{12} \tag{6.12}$$

$$= \Theta_{22} + \Theta_{21} (I_{m_\Delta} - \Delta \Theta_{11})^{-1} \Delta \Theta_{12} \tag{6.13}$$

$$:= \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta). \tag{6.14}$$

Im englischen Sprachgebrauch bezeichnet man \mathcal{F}_U als „Upper linear fractional transformation (ULFT)“ von Δ bezüglich Θ . Für $\Delta = 0$ (verschwindender

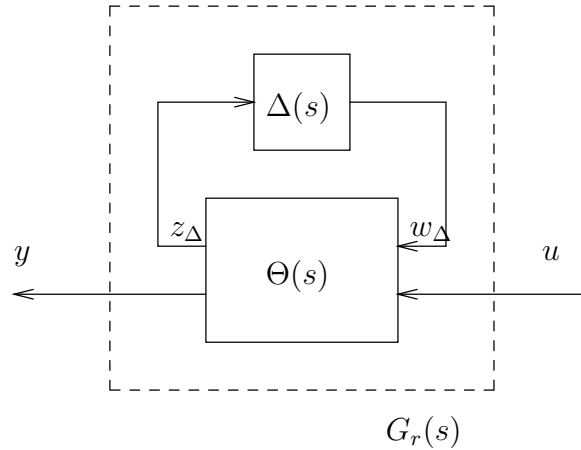


Bild 6.7: Verallgemeinerter unstrukturierter Modellfehler.

Fehler) muß sich natürlich als Übertragungsmatrix zwischen Stellgröße u und Ausgangsvariable y das Entwurfsmodell ergeben; es wird also immer gelten: $\Theta_{22} = G$. Für eine sinnvolle Fehlerbeschreibung müssen wir weiterhin voraussetzen, daß

1. $(I_{l_\Delta} - \Theta_{11}(\infty)\Delta(\infty))$ für alle betrachteten Fehler nichtsingulär (und G_r damit eindeutig definiert und realisierbar) ist und
2. die Übertragungsmatrix $\Theta(s)$ sich durch eine Rückführung von y auf u stabilisieren lasse. Θ genüge also den in Satz 5.6 genannten Bedingungen.

Die untersuchte Fehler- bzw. Modellklasse besitzt folgendes Aussehen:

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \quad (6.15)$$

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ \Delta \in \mathcal{RH}_\infty^{m_\Delta \times l_\Delta} \mid \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < l(\omega) \right\}, \quad (6.16)$$

$$\mathcal{D}_2 := \left\{ \Delta \mid \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < l(\omega), m_{G_r} = m_G \right\}, \quad (6.17)$$

$$\mathcal{G} := \{ \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta) \mid \Delta \in \mathcal{D} \}. \quad (6.18)$$

Wir lassen also alle auf der imaginären Achse beschränkten $m_\Delta \times l_\Delta$ -Fehlerübertragungsmatrizen zu, die entweder asymptotisch stabil sind oder die Anzahl der in- und grenzstabilen Pole des Modells nicht verändern.

Wie muß nun die Übertragungsmatrix Θ aussehen, wenn wir additive, multiplikative und faktorisierte Modellfehler wie in Bild 6.7 darstellen wollen? Wie man durch Einsetzen in (6.12) leicht nachprüft, ergibt sich für

- additive Fehler

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & I_q \\ I_p & G \end{bmatrix}, \quad \Delta = \Delta_A, \quad (6.19)$$

- multiplikative Fehler

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & G \\ I_p & G \end{bmatrix}, \quad \Delta = \Delta_M, \quad (6.20)$$

- faktorisierte Fehler

$$\Theta = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -\widetilde{M}^{-1} \\ 0 \\ \widetilde{M}^{-1} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} -G \\ I_q \\ G \end{array} \right] \end{array} \right], \quad \Delta = \left[\begin{array}{cc} \Delta_M & \Delta_N \end{array} \right]. \quad (6.21)$$

Im Falle additiver Fehler gilt $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ (asymptotisch stabile Fehler lassen die Anzahl der instabilen Modellpole konstant). \mathcal{D} stimmt in diesem Fall deshalb mit \mathcal{D}_A überein. Bei faktorisierten Modellfehlern kommen per Definition nur asymptotisch stabile Fehlerterme in Betracht; wir können deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{MN}$ setzen.

6.1.2 Strukturierte Modellfehler

6.1.2.1 Parameterfehler

Wenn die Modellbildung auf physikalischem Wege erfolgt, liegt Modellunsicherheit i.a. in Form zulässiger Intervalle der Parameter einer Zustandsdarstellung vor. Beim Übergang zu Übertragungsmatrizen erhält man dann meist ein recht kompliziertes „zulässiges Gebiet“ im Parameterraum, da jeder Parameter der Übertragungsmatrix i.a. von mehreren Parametern der Zustandsgleichungen abhängt. Nur bei einfachen Systemen (wie dem folgenden Beispiel) bildet die Menge der zulässigen Parameter der Modell-Übertragungsmatrix ein Parallelepiped.

Beispiel: Wir betrachten das in Bild 6.8 gezeigte gedämpfte Feder-Masse System. Die anregende Kraft bezeichnen wir mit u , die Auslenkung des Massenschwerpunktes aus der Ruhelage mit y . Aus der Kräftebilanz erhält man die Modell-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + c}.$$

Da man aber i.a. nicht davon ausgehen kann, Masse, Dämpfung und Federkonstante exakt zu kennen, liegt es nahe, durch Angabe

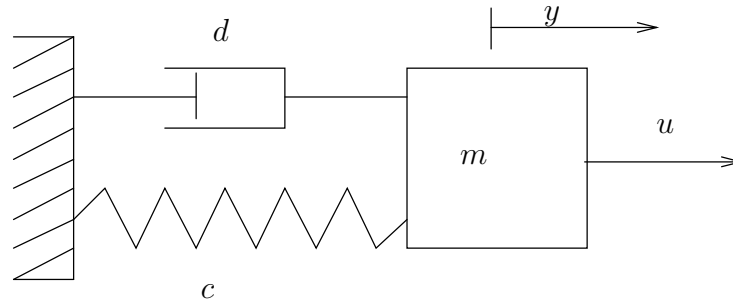


Bild 6.8: Gedämpftes Feder-Masse System.

möglicher Parameterintervalle um die nominellen Werte m , d und c eine Klasse von zulässigen Modellen zu definieren:

$$\begin{aligned} \Delta_m &\in [m_u - m, m_o - m] := \mathcal{D}_m \\ \Delta_d &\in [d_u - d, d_o - d] := \mathcal{D}_d \\ \Delta_c &\in [c_u - c, c_o - c] := \mathcal{D}_c \\ \mathcal{G}_{mdc} &:= \left\{ \frac{1}{(m + \Delta_m)s^2 + (d + \Delta_d)s + (c + \Delta_c)} \mid \right. \\ &\quad \left. \Delta_m \in \mathcal{D}_m, \Delta_d \in \mathcal{D}_d, \Delta_c \in \mathcal{D}_c \right\}. \end{aligned}$$

6.1.2.2 Additive Fehler in den Elementen der Übertragungsmatrix

Eine weitere naheliegende strukturierte Fehlerbeschreibung besteht in der betragsmäßigen Abschätzung von additiven Fehlern in den Einzelementen einer Übertragungsmatrix. Wir betrachten also – wie in Abschnitt 6.1.1.1 – einen additiven Zusammenhang zwischen Entwurfsmodell G und G_r :

$$G_r(s) = G(s) + \Delta_{Ae}(s).$$

Wir setzen wiederum voraus, daß kein zulässiger Fehler die Zahl der grenz- bzw. instabilen Pole des Modells verändert; weiterhin nehmen wir an, für den Betrag jedes Elements $\Delta_{Ae_{ik}}$ eine frequenzabhängige obere Schranke $l_{e_{ik}}$ zu kennen:

$$\begin{aligned} |\Delta_{Ae_{ik}}(j\omega)| &\leq l_{e_{ik}}(\omega) \quad \text{für alle } \omega, \\ i &= 1, \dots, p, \quad k = 1, \dots, q, \end{aligned} \quad (6.22)$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} |\Delta_{Ae_{11}}(j\omega)| & \dots & |\Delta_{Ae_{1q}}(j\omega)| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |\Delta_{Ae_{p1}}(j\omega)| & \dots & |\Delta_{Ae_{pq}}(j\omega)| \end{bmatrix}}_{|\Delta_{Ae}|_e} \leq_e \underbrace{\begin{bmatrix} l_{e_{11}}(\omega) & \dots & l_{e_{1q}}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{e_{p1}}(\omega) & \dots & l_{e_{pq}}(\omega) \end{bmatrix}}_{:=L_e(\omega)}. \quad (6.23)$$

(\leq_e steht wiederum für „elementweise kleiner oder gleich“.) Die zulässige Fehler- bzw. Modellklasse lautet also:

$$\mathcal{D}_{Ae} := \{\Delta_{Ae} \mid |\Delta_{Ae}(j\omega)|_e \leq_e L_e(\omega); m_{G_r} = m_G\} \quad (6.24)$$

$$\mathcal{G}_{Ae} := \{G + \Delta_{Ae} \mid \Delta_{Ae} \in \mathcal{D}_{Ae}\}. \quad (6.25)$$

Der typische Verlauf der Fehlerschranken $l_{e_{ik}}(\omega)$ entspricht qualitativ dem der Funktion $l_A(\omega)$ in Bild 6.2.

Diese Art der Fehlerbeschreibung läßt sich einfach graphisch veranschaulichen (Bild 6.9): Wir betrachten zunächst die Ortskurven jedes Elements $g_{ik}(j\omega)$ des Entwurfsmodells („Nyquist array“). Für jede Frequenz tragen wir nun Kreise mit Mittelpunkt $g_{ik}(j\omega)$ und Radius $l_{e_{ik}}(\omega)$ auf. Auf diese Art erhalten wir Bänder um die Ortskurven des Entwurfsmodells. Eine Übertragungsmatrix G_r gehört genau dann zur Modellklasse \mathcal{G}_{Ae} , wenn sie dieselbe Anzahl grenz- und instabiler Pole wie G besitzt und wenn die Ortskurven ihrer Elemente $g_{r_{ik}}(j\omega)$ im Innern der besagten Bänder verlaufen.

6.1.2.3 Verallgemeinerte strukturierte Modellfehler

Als Motivation für diese allgemeine Art der Fehlerbeschreibung betrachten wir das folgende Beispiel aus [68]:

Beispiel: Das Streckenmodell besitze zwei Ein- und zwei Ausgänge. Zusätzlich zu additiver unstrukturierter Modellunsicherheit Δ_A treten voneinander unabhängige multiplikative Fehler $\tilde{\delta}_1$ und $\tilde{\delta}_2$ in beiden Stellgliedern auf (Bild 6.10). Δ_A , $\tilde{\delta}_1$ und $\tilde{\delta}_2$ seien asymptotisch stabile, auf der imaginären Achse beschränkte Übertragungsglieder:

$$|\tilde{\delta}_1(j\omega)| < l_1(\omega), \quad (6.26)$$

$$|\tilde{\delta}_2(j\omega)| < l_2(\omega), \quad (6.27)$$

$$\bar{\sigma}[\Delta_A(j\omega)] < l_3(\omega). \quad (6.28)$$

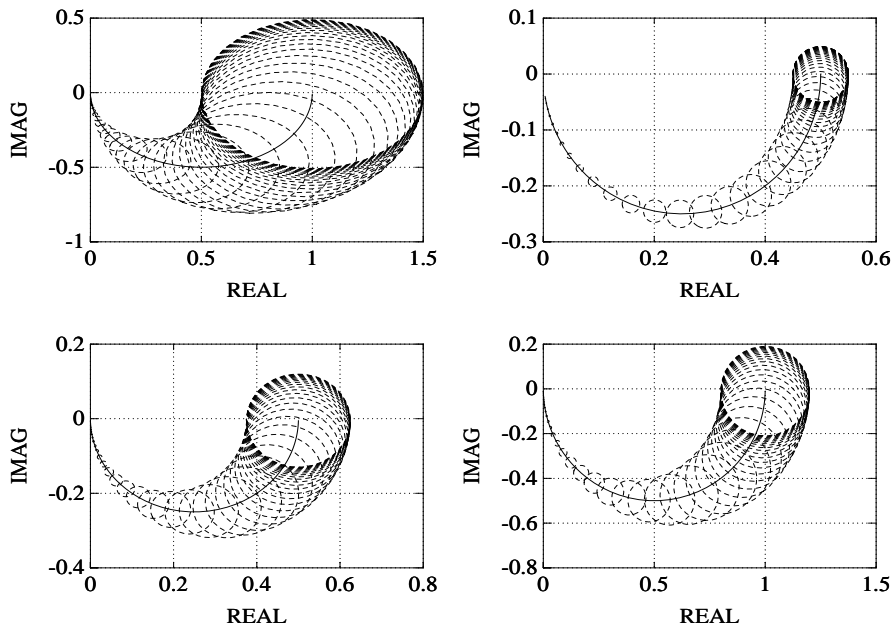
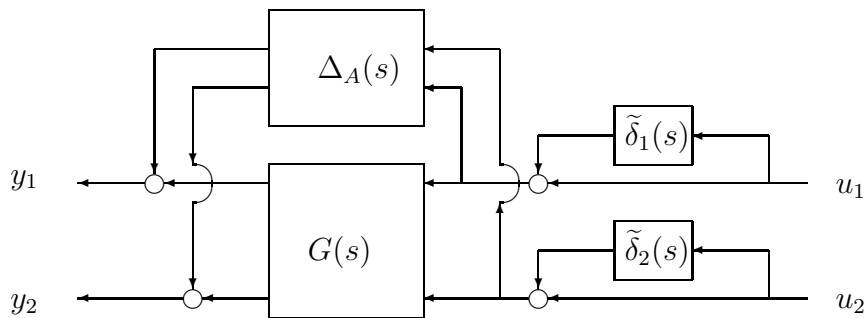
Bild 6.9: Graphische Darstellung der Modellklasse \mathcal{G}_{Ae} .

Bild 6.10: Beispiel für ein mit verschiedenen Fehlern behaftetes Modell.

Natürlich könnten wir alle vorhandenen Fehlerterme zu einem einzigen (additiven) Fehler zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 G_r &= (G + \Delta_A) \left(I_2 + \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= G + \underbrace{\left(\Delta_A \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} \right)}_{:=\bar{\Delta}_A}.
 \end{aligned}$$

Für den so definierten additiven Gesamtfehler $\bar{\Delta}_A$ lassen sich so-

wohl strukturierte wie auch unstrukturierte Fehlerschranken ableiten: (6.26) – (6.28) und den „Rechenregeln“ für Singulärwerte kann man entnehmen, daß

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[\bar{\Delta}_A] &\leq \bar{\sigma}[\Delta_A] \bar{\sigma} \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} + \bar{\sigma}[G] \bar{\sigma} \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} \\ &< l_3 (1 + \max(l_1, l_2)) + \bar{\sigma}[G] \max(l_1, l_2). \end{aligned}$$

Als strukturierte Fehlerschranken kann man für die Elemente der Matrix $\bar{\Delta}_A$ angeben:

$$|\bar{\Delta}_{Aik}| < l_3(1 + l_k) + |g_{ik}|l_k.$$

In beiden Fällen werden die „neuen“ Fehlerschranken in aller Wahrscheinlichkeit sehr konservativ ausfallen. Selbst wenn die ursprünglichen Fehlermodelle (6.26) – (6.28) die wahren Fehlerursachen weitgehend realistisch abbilden, wird das neue Fehlermodell zu weit gefaßt sein – der Regler müßte physikalisch unsinnige Situationen abdecken. In einer solchen Lage erweist es sich deswegen oft als sinnvoll, die ursprüngliche Fehlerstruktur beim Übergang zu einem allgemeinen Fehlermodell beizubehalten. In unserem Beispiel kann dies auf folgende Art und Weise geschehen: Wir definieren – wie in Abschnitt 6.1.1.4 – eine Übertragungsmatrix $\Theta(s)$, die außer den Stell- und Regelgrößen weitere „künstliche“ Ein- und Ausgangsvariable \tilde{w}_Δ und \tilde{z}_Δ besitzt. Diese erhält man, wenn man – wie in Bild 6.11 gezeigt – die Fehlerglieder Δ_A , $\tilde{\delta}_1$ und $\tilde{\delta}_2$ aus G_r herauszieht und in einer blockdiagonalen Übertragungsmatrix anordnet. Es ergibt sich ein Blockschaltbild wie in Abschnitt 6.1.1.4; einziger Unterschied ist die spezifische (blockdiagonale) Struktur der Fehlermatrix im Rückführzweig; sie spiegelt die Struktur des ursprünglichen Fehlermodells wider.

Im allgemeinen Fall gehen wir genauso vor, stellen das fehlerbehaftete Streckenmodell also als „Upper linear fractional transformation“ einer blockdiagonalen Fehler-Übertragungsmatrix $\Delta_s(s)$ bezüglich einer geeignet erweiterten Übertragungsmatrix $\Theta(s)$ dar:

$$G_r = \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta_s).$$

Struktur und Dimension von Δ_s hängen von der Zahl und den Dimensionen der verschiedenen ursprünglichen Fehlerterme ab. Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir vereinbaren, in der blockdiagonalen Fehlermatrix zuerst skalare Unsicherheit aufzuführen. In diesem allgemeinen Rahmen genügt es

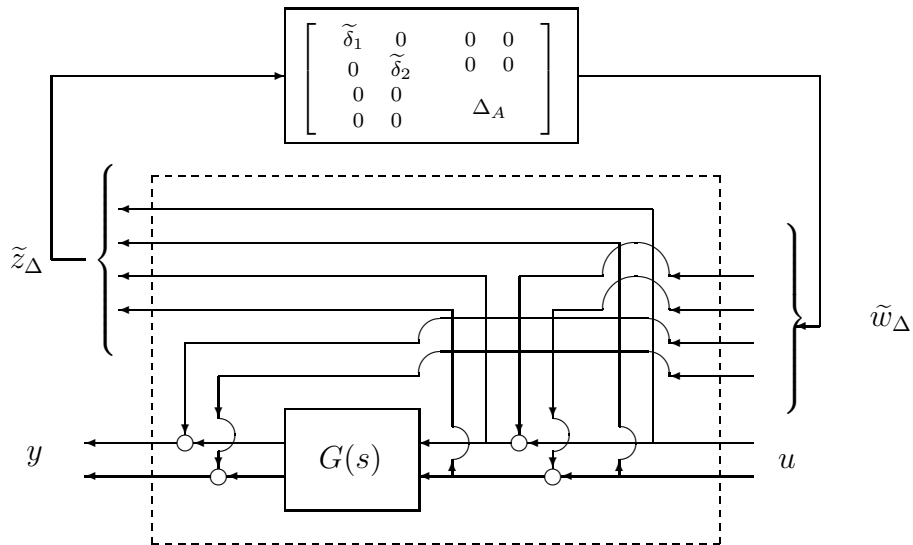


Bild 6.11: Blockschaltbild mit verallgemeinertem strukturiertem Fehler.

auch, asymptotisch stabile Fehler zu berücksichtigen: Muß an irgendeiner Stelle ein instabiler Fehlerterm in Betracht gezogen werden, so können wir dieses Problem immer durch Faktorisierung und Einführen stabiler Fehler in Zähler- und Nennermatrix angehen. Eine Vereinfachung der Notation ergibt sich, wenn wir die oberen Schranken aller Fehlerblöcke auf denselben (konstanten) Wert (z.B. 1) normieren. Dies läßt sich leicht bewerkstelligen, wenn die frequenzabhängigen Fehlerschranken $l_i(\omega)$ als Beträge skalarer Frequenzgänge $w_i(j\omega)$ dargestellt werden können. Wir multiplizieren dann einfach die Blöcke Θ_{11} und Θ_{12} von links (bzw. Θ_{11} und Θ_{21} von rechts) mit einer die $w_i(s)$ enthaltenden Diagonalmatrix passender Dimension. Da es uns nur auf den Betrag dieser Frequenzgänge ankommt, können wir die Übertragungsglieder $w_i(s)$ immer asymptotisch stabil und minimalphasig wählen. Mit diesen Annahmen erhalten wir folgende Fehler- bzw. Modellklasse:

$$\mathcal{D}_s := \quad (6.29)$$

$$\left\{ \Delta_s = \begin{bmatrix} \delta_1 I_{l_1} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \delta_k I_{l_k} & & \\ & & & \Delta_{k+1} & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & \Delta_v \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \bar{\sigma}[\Delta_s(j\omega)] < 1 \\ \Delta_s \in \mathcal{RH}_\infty^{m_\Delta \times l_\Delta} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{G}_s = \{G_r = \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta_s) \mid \Delta_s \in \mathcal{D}_s\} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \Theta_{22} + \Theta_{21} \Delta_s (I_{l_\Delta} - \Theta_{11} \Delta_s)^{-1} \Theta_{12} \mid \Delta_s \in \mathcal{D}_s \right\} \\
 &= \left\{ \Theta_{22} + \Theta_{21} (I_{m_\Delta} - \Delta_s \Theta_{11})^{-1} \Delta_s \Theta_{12} \mid \Delta_s \in \mathcal{D}_s \right\}.
 \end{aligned}$$

Beispiel: $w_1(s)$, $w_2(s)$ und $w_3(s)$ seien asymptotisch stabile minimalphasige Übertragungsfunktionen mit

$$\begin{aligned}
 |w_1(j\omega)| &= l_1(\omega) \\
 |w_2(j\omega)| &= l_2(\omega) \\
 |w_3(j\omega)| &= l_3(\omega).
 \end{aligned}$$

Für das vorige Beispiel ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} z_\Delta \\ y \end{bmatrix} &= \Theta \begin{bmatrix} w_\Delta \\ u \end{bmatrix} \\
 \Theta(s) &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_3 I_2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{diag}\{w_1, w_2\} \\ w_3 I_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G & I_2 \end{bmatrix} & G \end{bmatrix} \\
 \Delta_s &= \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \Delta_3 \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\delta}_1}{w_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\delta}_2}{w_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \frac{1}{w_3} \Delta_A \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

und – wie erwartet –

$$\begin{aligned}
 G_r &= \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta_s) \\
 &= G + \left(\Delta_A \begin{bmatrix} 1 + \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & 1 + \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\delta}_2 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Anmerkung: Andere strukturierte Fehler (wie die in Abschnitt 6.1.2.2 behandelte Klasse \mathcal{D}_{Ae}) lassen sich in Form verallgemeinerter strukturierter Fehler schreiben. Bei der „Übersetzung“ von Parameterfehlern in die Fehlerklasse \mathcal{D}_s muß man allerdings in Betracht ziehen, daß die Modellunsicherheit künstlich vergrößert wird: Parameterfehler sind reell, während \mathcal{D}_s komplexe Fehlerterme zuläßt.

6.2 Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Bedingungen, unter denen ein Regler $K(s)$ nicht nur das Entwurfsmodell $G(s)$ sondern eine Klasse $\{G_r(s)\}$ von Modellen stabilisiert. Die aufgeführten Robustheitskriterien basieren auf dem Satz der kleinen Verstärkungen (Satz 5.4) oder der Mehrgrößen-Version des Nyquist-Kriteriums (Satz 5.2).

6.2.1 Unstrukturierte Modellfehler

Wir behandeln zunächst ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ bezüglich der in (6.15) - (6.17) definierten Klasse verallgemeinerter unstrukturierter Modellfehler \mathcal{D} . Da wir unstrukturierte additive, multiplikative und faktorisierte Fehler als Spezialfälle von \mathcal{D} deuten können (vgl. Abschnitt 6.1.1.4), lassen sich hieraus sofort Kriterien für diese speziellen Klassen von Modellfehlern ableiten.

Satz 6.1 (Stabilität bei verallgemeinerten unstrukturierten Modellfehlern)

Der Regelkreis (G_r, K) ist genau dann für alle $G_r \in \mathcal{G}$ asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. *Der nominelle Regelkreis $(G = \mathcal{F}_U(\Theta, 0), K)$ ist asymptotisch stabil.*
- 2.

$$\bar{\sigma}[\mathcal{F}_L(\Theta(j\omega), -K(j\omega))] \leq \frac{1}{l(\omega)} \quad \text{für alle } \omega. \quad (6.31)$$

Es sei nochmals daran erinnert, daß die sogenannte „Lower linear fractional transformation“ in (6.31) durch

$$\mathcal{F}_L(\Theta, -K) = \Theta_{11} + \Theta_{12}(-K)(I_p - \Theta_{22}(-K))^{-1}\Theta_{21}$$

definiert ist, und jedes zulässige fehlerbehaftete Streckenmodell G_r als „Upper linear fractional transformation“

$$\begin{aligned} G_r &= \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta) \\ &= \Theta_{22} + \Theta_{21}\Delta(I_{l_\Delta} - \Theta_{11}\Delta)^{-1}\Theta_{12} \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Bedingung (6.31) läßt sich leicht graphisch veranschaulichen (Bild 6.12): Diejenige Übertragungsmatrix, die der Fehlerterm Δ „sieht“, (i.e. $\mathcal{F}_L(\Theta, -K)$) darf für kein $s = j\omega$ größer (im Sinne ihres maximalen Singulärwerts) sein als die Inverse der zugehörigen Fehlerschranke $l(\omega)$.

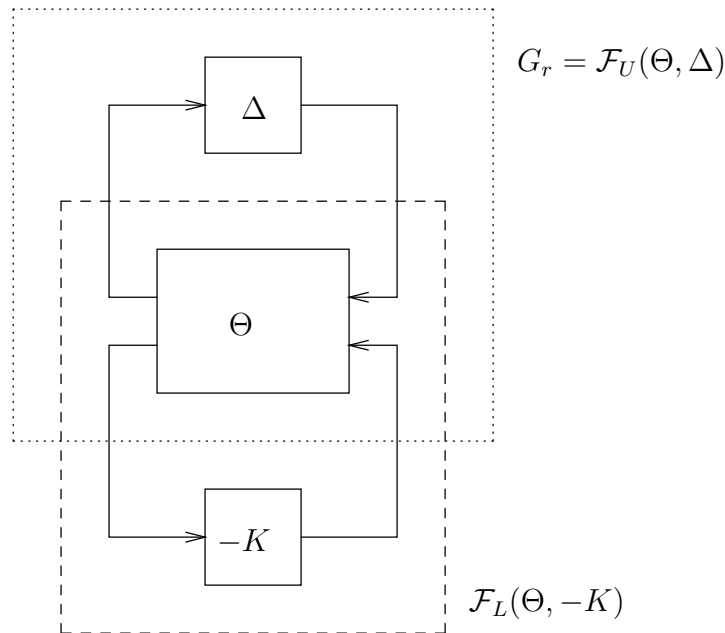


Bild 6.12: Veranschaulichung des Robustheits-Kriteriums.

Beweis: Um zu zeigen, daß Satz 6.1 hinreichend ist, spalten wir die Menge der zulässigen Modellfehler in

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ \Delta \in \mathcal{RH}_\infty^{m_\Delta \times l_\Delta} \mid \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < l(\omega) \right\}$$

und

$$\mathcal{D}_2 = \{ \Delta \mid \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < l(\omega), m_{G_r} = m_G \}$$

auf (vgl. die Definition der Fehlerklasse \mathcal{D} in (6.15) - (6.17)).

- Für $\Delta \in \mathcal{D}_1$ können wir den Satz der kleinen Verstärkungen anwenden (vgl. Bild 6.12): Δ ist per Definition asymptotisch stabil; da wir Stabilisierbarkeit von Θ und asymptotische Stabilität des nominellen Kreises ($G = \Theta_{22}, K$) voraussetzen, ist auch $\mathcal{F}_L(\Theta, -K)$ (die Übertragungsmatrix, die Δ „sieht“,) asymptotisch stabil (Satz 5.7). Der Spektralradius einer Matrix schätzt jede Norm (und damit auch den größten Singulärwert dieser Matrix) von unten ab. Wegen (5.40) und (6.31) gilt deshalb für alle ω

$$\begin{aligned} \rho[\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta] &\leq \bar{\sigma}[\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta] \\ &\leq \bar{\sigma}[\mathcal{F}_L(\Theta, -K)] \bar{\sigma}[\Delta] \\ &< \bar{\sigma}[\mathcal{F}_L(\Theta, -K)] l \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

und asymptotische Stabilität des fehlerbehafteten Regelkreises ist garantiert.

- Für $\Delta \in \mathcal{D}_2$ läßt sich der Satz der kleinen Verstärkungen nicht anwenden, da der Fehlerterm Δ nicht asymptotisch stabil zu sein braucht. Man zieht stattdessen die Mehrgrößen-Version des Nyquist-Kriteriums heran und argumentiert folgendermaßen: Bedingung (6.31) impliziert – wie wir gerade gezeigt haben – $\rho[\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta] < 1$ für alle $s = j\omega$ und – aus Kontinuitätsgründen – auch für alle $s \in \mathcal{N}_1$. Hieraus folgt (s. z.B. [74]), daß die Phasendrehungen von $\det(I_p + GK)$ (der Rückführdifferenzenmatrix im nominellen Fall) und $\det(I_p + G_r K)$ (der Rückführdifferenzenmatrix für $\Delta \in \mathcal{D}_2$) übereinstimmen, wenn s die Nyquist-Kontur durchläuft. Da G_r und G voraussetzungsgemäß dieselbe Zahl grenz- bzw. instabiler Pole besitzen, folgt mit Bedingung 1 sofort asymptotische Stabilität des Regelkreises für alle $\Delta \in \mathcal{D}_2$.

Bedingung 1 in Satz 6.1 ist offensichtlich notwendig. Notwendigkeit von (6.31) kann man zeigen, indem man ein $\Delta \in \mathcal{D}$ konstruiert, das bei Nicht-Erfüllung dieser Bedingung Instabilität des fehlerbehafteten Regelkreises bewirkt. Ein geeignetes Δ findet man z.B. durch Anpassung der in [110], S. 285-288, aufgeführten Prozedur: Diese Konstruktion führt auf ein Δ in der Schnittmenge von \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 ; (6.31) bleibt deswegen eine notwendige Bedingung, selbst wenn man die Klasse der zulässigen Fehler auf \mathcal{D}_1 oder \mathcal{D}_2 beschränkt. \square

Notwendige und hinreichende Stabilitätskriterien im Falle additiver, multiplikativer und faktorisierten Fehler lassen sich nun durch Einsetzen von (6.19) – (6.21) leicht ableiten:

Satz 6.2 (Stabilität bei additivem Modellfehler) _____

Der Regelkreis (G_r, K) ist genau dann für alle $G_r \in \mathcal{G}_A$ asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. *der nominelle Regelkreis (G, K) ist asymptotisch stabil,*
2. $\bar{\sigma}[K(j\omega) \underbrace{(I_p + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}}_{S(j\omega)}] \leq \frac{1}{l_A(\omega)}$ für alle ω .

Satz 6.3 (Stabilität bei multiplikativem Modellfehler) _____

Der Regelkreis (G_r, K) ist genau dann für alle $G_r \in \mathcal{G}_M$ asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. der nominelle Regelkreis (G, K) ist asymptotisch stabil,
2. $\bar{\sigma}[\underbrace{G(j\omega)K(j\omega)(I_p + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}}_{T(j\omega)}] \leq \frac{1}{t_M(\omega)}$ für alle ω .

Satz 6.4 (Stabilität bei faktorisiertem Modellfehler) _____

Der Regelkreis (G_r, K) ist genau dann für alle $G_r \in \mathcal{G}_{MN}$ asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. der nominelle Regelkreis (G, K) ist asymptotisch stabil,
2. $\bar{\sigma} \left[\begin{array}{c} S(j\omega)\tilde{M}^{-1}(j\omega) \\ K(j\omega)S(j\omega)\tilde{M}^{-1}(j\omega) \end{array} \right] \leq \frac{1}{t_{MN}(\omega)}$ für alle ω .

6.2.2 Strukturierte Modellfehler

Mit Fehlern in den Parametern einer Übertragungsmatrix wollen wir uns nicht explizit beschäftigen. Dies können wir rechtfertigen, indem wir argumentieren, daß Frequenzbereichsmodelle meist durch Identifikation (Auswertung experimenteller Daten) gewonnen werden – Modellunsicherheit läßt sich dann i.a. leichter in Form von Fehlerschranken für Frequenzgänge oder Frequenzgangmatrizen beschreiben. Außerdem können beliebige skalare komplexwertige Modellfehler durch geeignete Definition einer Matrix Θ in Form verallgemeinerter strukturierter Modellunsicherheit \mathcal{D}_s dargestellt werden; akzeptiert man also eine gewisse künstliche „Vergrößerung“ der Modellunsicherheit (komplexe statt reelle Fehler), so läßt sich Parameterunsicherheit im Rahmen dieses Formalismus behandeln. Für Fehler in \mathcal{D}_s kann man mit Hilfe des sogenannten *strukturierten Singulärwertes* μ einer Matrix ein notwendiges und hinreichendes Robustheits-Kriterium angeben. Ein gewisser Nachteil dieser Vorgehensweise liegt im hohen numerischen Aufwand bei der Approximation von μ – eine exakte Berechnung von μ ist nur in Spezialfällen möglich.

Zunächst betrachten wir aber die Fehlerklasse \mathcal{D}_{Ae} – additive Fehler in den Elementen g_{ik} der Strecken-Übertragungsmatrix. Für diesen Fall geben wir ein

einfach zu überprüfendes hinreichendes (aber nicht notwendiges!) Robustheits-Kriterium an. Dieses Kriterium wird uns im Zusammenhang mit den Rosenbrockschen Nyquist-Array-Entwurfsverfahren gute Dienste leisten. Bevor wir uns diesem Kriterium zuwenden, benötigen wir einige Fakten über nichtnegative Matrizen und den Perron-Frobenius-Eigenwert solcher Matrizen:

6.2.2.1 Nichtnegative Matrizen und Perron-Frobenius-Eigenwert

Die folgende Darstellung orientiert sich weitgehend an [61]. Ausführlichere Information findet man in [103] und [4].

Definition 6.1 (Nichtnegative Matrizen)

Eine reellwertige Matrix R heißt nichtnegativ, wenn alle ihre Elemente nichtnegativ sind.

Definition 6.2 (Reduzierbare Matrizen)

Eine quadratische komplexwertige Matrix C heißt reduzierbar, wenn sie durch gleichartige Permutationen ihrer Spalten und Zeilen in Blockdreiecksform überführt werden kann. Es existiert also eine Permutationsmatrix P (eine Matrix, die in jeder Spalte und Zeile genau eine 1 und ansonsten lauter Nullen enthält), so daß

$$PCP^T = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Anmerkung: (Eigenwert-)Probleme für reduzierbare Matrizen zerfallen in unabhängige Probleme für nichtreduzierbare Matrizen. Deswegen bedeutet es keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im folgenden immer Nichtreduzierbarkeit der betrachteten Matrizen voraussetzen.

Satz 6.5 (Perron-Frobenius-Theorem)

Jede nichtreduzierbare und nichtnegative $p \times p$ -Matrix R besitzt einen einfachen positiv reellen Eigenwert $\lambda_{PF}[R]$, der alle anderen Eigenwerte betragsmäßig dominiert:

$$\lambda_{PF}[R] \geq |\lambda_i[R]|; \quad i = 1, \dots, p.$$

$\lambda_{PF}[R]$ heißt Perron-Frobenius-Eigenwert der Matrix R .

Beweis: s. [88][31].

Wir benötigen folgende Eigenschaften des Perron-Frobenius-Eigenwerts:

1. R_1 und R_2 seien nichtnegative und nichtreduzierbare $p \times p$ -Matrizen mit $R_1 \leq_e R_2$ (\leq_e steht wiederum für „elementweise kleiner oder gleich“). Dann gilt ([4]):

$$\lambda_{PF}[R_1] \leq \lambda_{PF}[R_2]. \quad (6.32)$$

2. Für den Spektralradius ρ einer komplexwertigen Matrix C gilt ([10]):

$$\rho[C] \leq \lambda_{PF}[|C|_e] \quad (6.33)$$

3. R sei eine nichtnegative und nichtreduzierbare reellwertige $p \times p$ -Matrix. Die reellen Skalare α_i , $i = 1, \dots, p$, seien positiv. Dann gilt:

$$\lambda_{PF}[R] < \alpha_i, \quad i = 1, \dots, p \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_{PF} \left[R \operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \right\} \right] < 1 \\ \lambda_{PF} \left[\operatorname{diag} \left\{ \frac{1}{\alpha_i} \right\} R \right] < 1. \end{cases} \quad (6.34)$$

6.2.2.2 Stabilität bei additivem Fehler in den Elementen der Strecken-Übertragungsmatrix

Satz 6.6 (Stabilität bei additiver elementweiser Unsicherheit) —

Der Regelkreis (G_r, K) ist für alle Streckenmodelle $G_r \in \mathcal{G}_{Ae}$ asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. der nominelle Regelkreis ist asymptotisch stabil und
2. (a) $\lambda_{PF}[|\Delta_{Ae}(j\omega)K(j\omega)S(j\omega)|_e] < 1$ für alle ω oder
 (b) $\lambda_{PF}[L_{Ae}(\omega) |K(j\omega)S(j\omega)|_e] < 1$ für alle ω oder – falls $\det\{G(j\omega)\} \neq 0$ –
 (c) $\lambda_{PF}[|\Delta_{Ae}(j\omega)G(j\omega)^{-1}|_e |T(j\omega)|_e] < 1$ für alle ω .

Anmerkung: Bedingung 2.(a) und (c) stellen keine Robustheitskriterien im eigentlichen Sinne dar, da sie die (unbekannte) Fehlermatrix und nicht die (bekannte) Matrix L_{Ae} der Fehlerschranken enthalten. Sie werden an dieser Stelle aufgeführt, da bei den in Kapitel 9 behandelten Nyquist-Array Entwurfsverfahren außerhalb der Hauptdiagonalen stehende Elemente vernachlässigt und damit wie *bekannte* Modellfehler behandelt werden. In diesem Zusammenhang werden sich beide Bedingungen als nützlich erweisen.

Beweis: Den aufgelisteten Eigenschaften des Perron-Frobenius-Eigenwertes kann man entnehmen, daß

$$\begin{aligned}\rho[\Delta_{Ae}KS] &\leq \lambda_{PF} [|\Delta_{Ae}KS|_e] \\ &\leq \lambda_{PF} [|\Delta_{Ae}|_e |KS|_e] \\ &\leq \lambda_{PF} [L_{Ae} |KS|_e]\end{aligned}$$

bzw. (falls G auf der imaginären Achse invertierbar ist)

$$\rho[\Delta_{Ae}KS] \leq \lambda_{PF} [|\Delta_{Ae}G^{-1}|_e |T|_e].$$

2.(a), (b) und (c) implizieren somit für alle $s = j\omega$ und – aus Kontinuitätsgründen – für alle $s \in \mathcal{N}_1$:

$$\rho[\Delta_{Ae}KS] < 1. \quad (6.35)$$

Nun läßt sich leicht zeigen, daß die Nyquist-Ortskurve von $\det(I_p + G_r K)$ bezüglich des Ursprungs dieselbe Phasendrehung aufweist wie die Nyquist-Ortskurve im fehlerfreien Fall:

$$\begin{aligned}\det \{I_p + G_r K\} &= \det \{I_p + (G + \Delta_{Ae})K\} \\ &= \det \{I_p + GK\} \det \underbrace{\{I_p + \Delta_{Ae}K (I_p + GK)^{-1}\}}_S.\end{aligned}$$

Wegen (6.35) ist $\det(I_p + \Delta_{Ae}KS)$ und damit auch $\det(I_p + \gamma\Delta_{Ae}KS)$, $\gamma \in [0, 1]$, für alle $\Delta_{Ae} \in \mathcal{D}_{Ae}$, $s \in \mathcal{N}_1$, von Null verschieden. Wenn wir γ von 0 auf 1 vergrößern (i.e. die Ortskurve von $\det(I_p + GK)$ zur Ortskurve von $\det(I_p + G_r K)$ „hinziehen“, werden wir also den Ursprung nicht überstreichen und beide Ortskurven besitzen demzufolge dieselbe Phasendrehung bezüglich des Ursprungs (s. Bild 6.13).

Da die Anzahl der grenz- bzw. instabilen Pole von G_r und G voraussetzungsgemäß übereinstimmt, folgt mit Bedingung 1 sofort asymptotische Stabilität des Regelkreises für alle $\Delta_{Ae} \in \mathcal{D}_{Ae}$. \square

6.2.2.3 Strukturierte Singulärwerte

Zur Formulierung eines Robustheitskriteriums im Falle verallgemeinerter strukturierter Modellunsicherheit benötigen wir den Begriff des *strukturierten Singulärwertes*. Zunächst geben wir die Frequenz fest vor, betrachten also

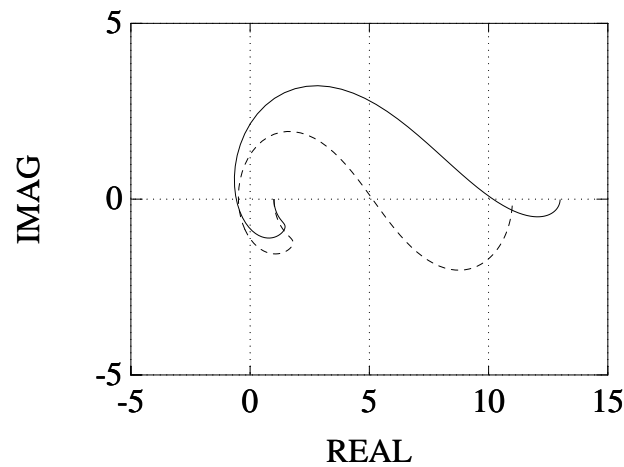


Bild 6.13: Zum Beweis des Robustheits-Kriteriums: Nyquist-Ortskurve von $\det(I_p + GK)$ und $\det(I_p + G_r K)$.

eine *konstante* komplexe blockdiagonale Fehlermatrix

$$\Delta_s = \begin{pmatrix} \delta_1 I_{l_1} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \delta_k I_{l_k} & & \\ & & & \Delta_{k+1} & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & \Delta_v \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

δ_i , $i = 1, \dots, k$, sind komplexe Skalare, Δ_i , $i = k + 1, \dots, v$, komplexwertige $l_i \times l_i$ -Matrizen. Δ_s ist somit eine Matrix mit $l_\Delta = \sum_{i=1}^v l_i$ Spalten und Zeilen. Die Menge aller komplexwertigen $l_\Delta \times l_\Delta$ -Matrizen mit dieser speziellen blockdiagonalen Struktur bezeichnen wir mit $\mathbf{\Delta}_s$. Nun definieren wir den strukturierten Singulärwert einer komplexen Matrix C in Bezug auf die Struktur¹ von $\mathbf{\Delta}_s$:

Definition 6.3 (Strukturierter Singulärwert)

C sei eine komplexwertige $l_\Delta \times l_\Delta$ -Matrix, $\mathbf{\Delta}_s$ die Menge aller komplexwer-

¹Die Annahme einer quadratischen Fehlermatrix vereinfacht die recht aufwendige Notation etwas. Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar: Den Fall einer nichtquadratischen ($m_\Delta \times l_\Delta$)-Fehlermatrix kann man durch Einfügen von aus Nullen bestehenden Zeilen oder Spalten in die Matrix C auf den quadratischen Fall zurückführen.

tigen Matrizen mit der in (6.36) angegebenen blockdiagonalen Struktur.

$$\mu_{\Delta_s}[C] := \begin{cases} \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}[\Delta_s] \mid \Delta_s \in \Delta_s, \det(I_{l_\Delta} - C\Delta_s) = 0\}} \\ 0, \quad \text{falls } \det(I_{l_\Delta} - C\Delta_s) \neq 0 \text{ für alle } \Delta_s \in \Delta_s \end{cases}$$

heißt strukturierter Singulärwert der Matrix C . Er hängt offenbar nicht nur von C sondern auch von der Struktur von Δ_s ab. _____

In Worten: Man sucht den (im Sinne der $\bar{\sigma}$ -Norm) kleinsten Fehler Δ_s mit vorgegebener Struktur, der $(I_{l_\Delta} - C\Delta_s)$ singulär werden läßt. Der Kehrwert der $\bar{\sigma}$ -Norm dieses Δ_s ist der strukturierte Singulärwert der Matrix C . Existiert kein solches Δ_s , so ist $\mu_{\Delta_s}[C]$ Null. Man beachte, daß der strukturierte Singulärwert keine Matrixnorm darstellt – die Dreiecksungleichung braucht nicht zu gelten. Wohl aber gilt für jeden komplexen Skalar α :

$$\mu_{\Delta_s}[\alpha C] = |\alpha| \mu_{\Delta_s}[C]. \quad (6.37)$$

Weiterhin kann man leicht zeigen, daß

$$\mu_{\Delta_s}[C] = \max_{\Delta_s \in \Delta_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] \leq 1} \rho[\Delta_s C]. \quad (6.38)$$

Für bestimmte einfache Strukturen der Fehlermatrix reduziert sich $\mu_{\Delta_s}[C]$ auf bekannte Größen:

- Falls Δ_s die Menge aller komplexwertigen $l_\Delta \times l_\Delta$ -Matrizen darstellt, ergibt sich

$$\mu_{\Delta_s}[C] = \bar{\sigma}[C].$$

- Falls $\Delta_s = \{\delta I_{l_\Delta}\}$ und δ ein komplexwertiger Skalar ist, erhält man

$$\mu_{\Delta_s}[C] = \rho[C].$$

Offenbar gilt

$$\{\delta I_{l_\Delta} \mid \delta \in \mathbb{C}\} \subseteq \Delta_s \subseteq \mathbb{C}^{l_\Delta \times l_\Delta}$$

und deshalb

$$\rho[C] \leq \mu_{\Delta_s}[C] \leq \bar{\sigma}[C]. \quad (6.39)$$

Diese Ungleichungen liefern uns eine obere und eine untere Schranke für $\mu_{\Delta_s}[C]$. Diese Schranken benötigen wir zur Abschätzung von $\mu_{\Delta_s}[C]$, da wir – mit Ausnahme einiger Spezialfälle – den strukturierten Singulärwert nicht

exakt berechnen können. Steht man also vor dem Problem, $\mu_{\Delta_s}[C]$ zu bestimmen, so vergleicht man zunächst Spektralradius ρ und maximalen Singulärwert $\bar{\sigma}$ der Matrix C . Liegen diese beiden Größen „dicht beieinander“, so kann man $\mu_{\Delta_s}[C]$ offenbar recht genau angeben. Falls sich Spektralradius und maximaler Singulärwert hingegen „stark unterscheiden“, muß man diese Abschätzung verfeinern. Dies kann durch Einführen von Transformationen geschehen, die die obere und untere Schranke beeinflussen, den gesuchten strukturierten Singulärwert aber unberührt lassen. Zunächst betrachten wir eine Transformation, die den Spektralradius der Matrix C verändert:

Wir definieren \mathbf{U} als die Teilmenge aller unitären Matrizen in Δ_s :

$$\mathbf{U} := \{U \in \Delta_s \mid U^*U = I_{l_\Delta}\}.$$

Durch Multiplikation einer Fehlermatrix $\Delta_s \in \Delta_s$ mit einem beliebigen Element aus \mathbf{U} wird offenbar die spezielle blockdiagonale Struktur nicht verändert. Man erhält

$$\det \{I_{l_\Delta} - C\Delta_s\} = \det \{I_{l_\Delta} - UC \underbrace{\Delta_s U^*}_{:=\Delta'_s \in \Delta_s}\}$$

und deshalb

$$\mu_{\Delta_s}[C] = \mu_{\Delta_s}[UC] \quad \text{für alle } U \in \mathbf{U}. \quad (6.40)$$

Nun definieren wir eine zweite Menge von Matrizen:

$$\mathbf{D} := \left\{ D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & D_k & & \\ & & & d_{k+1}I_{l_{k+1}} & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & d_v I_{l_v} \end{pmatrix} \mid D_i \in \mathbf{D}_i, d_i \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

\mathbf{D}_i steht für die Menge aller komplexwertigen, positiv-definiten $l_i \times l_i$ -Matrizen. Vergleicht man die Struktur der Matrizen D und Δ_s , so sieht man, daß jedem diagonalförmigen Block $\delta_i I_{l_i}$ eine (möglicherweise) vollbesetzte $l_i \times l_i$ -Matrix D_i zugeordnet wird (und umgekehrt). Hierdurch erzwingt man, daß Matrizen aus \mathbf{D} und Δ_s bei der Multiplikation kommutieren. Es gilt also

$$\begin{aligned} \det \{I_{l_\Delta} - C\Delta_s\} &= \det \{I_{l_\Delta} - DC\Delta_s D^{-1}\} \\ &= \det \{I_{l_\Delta} - DCD^{-1}\Delta_s\} \end{aligned}$$

und deshalb

$$\mu_{\Delta_s}[C] = \mu_{\Delta_s}[DCD^{-1}] \quad \text{für alle } D \in \mathbf{D}. \quad (6.41)$$

Aus (6.39), (6.40) und (6.41) können wir sofort ablesen, daß

$$\max_{U \in \mathbf{U}} \rho[UC] \leq \mu_{\Delta_s}[C] \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}[DCD^{-1}]. \quad (6.42)$$

In [17] wird gezeigt, daß das linke \leq -Zeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden kann. Unglücklicherweise kann $\rho[UC]$ mehrere lokale Maxima aufweisen. Numerische Optimierungsverfahren können deshalb nicht garantieren, das globale Maximum zu finden – man muß sich i.a. mit einer unteren Schranke für $\mu_{\Delta_s}[C]$ zufriedengeben. $\inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}[DCD^{-1}]$ läßt sich dagegen in ein konvexes Minimierungsproblem umformen und somit prinzipiell berechnen. Leider stimmt diese obere Schranke nur in Ausnahmefällen – wenn $2k + (v - k) \leq 3$ – mit der gesuchten Größe $\mu_{\Delta_s}[C]$ überein. Zur Erinnerung: k steht für die Anzahl der diagonalförmigen Blöcke $\delta_i I_{l_i}$, $v - k$ für die Zahl der (möglicherweise) vollbesetzten Blöcke Δ_i in den betrachteten Fehlern Δ_s .

Nun, da wir μ zumindest approximieren können, läßt sich ein Stabilitätskriterium bezüglich verallgemeinerter strukturierter Fehler angeben:

6.2.2.4 Stabilität bei verallgemeinertem strukturierter Modellfehler

Gegeben sei ein Regler $K(s)$. Wir wollen untersuchen, ob der in Bild 6.14 gezeigte Regelkreis für alle in Abschnitt 6.1.2.3 definierten blockdiagona-

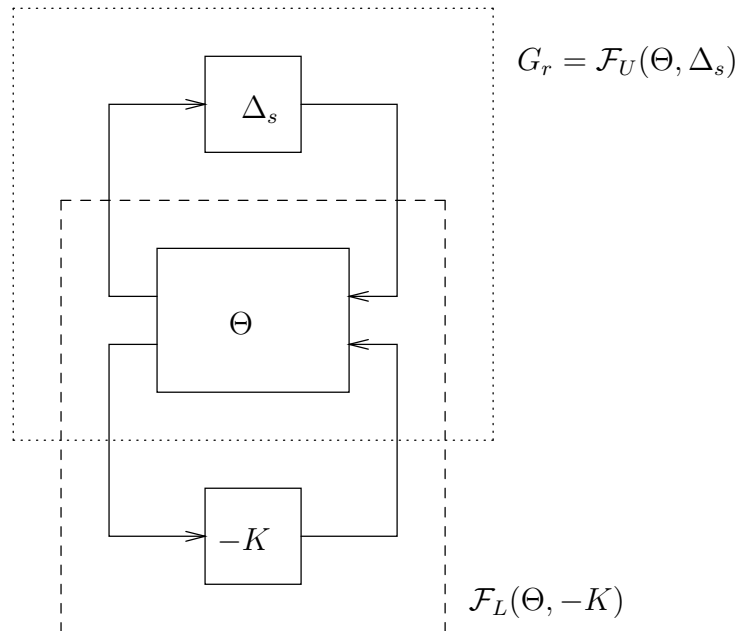


Bild 6.14: Regelkreis mit verallgemeinertem strukturierter Fehler.

len Fehler-Übertragungsmatrizen $\Delta_s(s) \in \mathcal{D}_s$ asymptotisch stabil ist. Hierzu können wir folgendes notwendige und hinreichende Kriterium konsultieren:

Satz 6.7 (Stabilität bei verallgemeinertem strukturiertem Fehler) –

Der Regelkreis $(G_r = \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta_s), K)$ ist genau dann für alle Streckenmodelle $G_r \in \mathcal{G}_s$ asymptotisch stabil, wenn gilt:

1. der nominelle Regelkreis $(G = \mathcal{F}_U(\Theta, 0), K)$ ist asymptotisch stabil und
- 2.

$$\mu_{\Delta_s}[\mathcal{F}_L(\Theta(j\omega), -K(j\omega))] \leq 1 \quad \text{für alle } \omega.$$

Man beachte die formale Ähnlichkeit der in Satz 6.7 und Satz 6.1 genannten Kriterien: notwendig und hinreichend für robuste Stabilität ist in beiden Fällen asymptotische Stabilität des nominellen Kreises und die Bedingung, daß die Übertragungsmatrix, die der Fehlerterm „sieht“, für keine Frequenz $s = j\omega$ „größer“ sein darf als die Inverse einer oberen Fehlerschranke. Im unstrukturierten Fall messen wir die „Größe“ mittels des maximalen Singulärwertes, im strukturierten Fall mittels des strukturierten Singulärwertes.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die genannten Bedingungen hinreichend sind. Wir wenden – wie beim Beweis von Theorem 6.1 – den Satz der kleinen Verstärkungen an und beweisen, daß der Spektralradius des Produkts $\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta_s$ für jedes $\Delta_s \in \mathcal{D}_s$ und jede Frequenz ω kleiner als 1 ist. Da beide Terme asymptotisch stabil sind (Δ_s per Definition, $\mathcal{F}_L(\Theta, -K)$ wegen Bedingung 1), impliziert dies asymptotische Stabilität des in Bild 6.14 gezeigten Regelkreises.

Wir wenden einfach Beziehung (6.38) und Bedingung 2 an und erhalten:

$$\begin{aligned} \max_{\Delta_s \in \mathcal{D}_s} \rho[\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta_s] &= \max_{\Delta_s \in \mathcal{D}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1} \rho[\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta_s] \\ &< \max_{\Delta_s \in \mathcal{D}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] \leq 1} \rho[\mathcal{F}_L(\Theta, -K) \Delta_s] \\ &= \mu_{\Delta_s}[\mathcal{F}_L(\Theta, -K)] \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Notwendigkeit von Bedingung 1 ist offensichtlich. Notwendigkeit von Bedingung 2 zeigt man durch Konstruktion eines zulässigen Fehlers, der bei Verletzung dieser Ungleichung Grenz- oder Instabilität des Regelkreises bewirkt. \square

6.3 Robustheit quantitativer Eigenschaften

Um diesen Themenkreis erschöpfend zu behandeln, müßte man verschiedene Formulierungen quantitativer Anforderungen (strukturiert, unstrukturiert) auf Robustheit hinsichtlich einer Vielzahl von Modellfehlern (strukturiert, unstrukturiert, additiv, multiplikativ, ...) untersuchen. Ein solches Vorgehen würde den Rahmen dieses Buches sprengen. Wir beschränken uns deswegen auf drei Fälle, die bei dem einen oder anderen der in den nächsten Kapiteln besprochenen Regler-Entwurfsverfahren zum Tragen kommen werden:

- „Grobe“ *unstrukturierte Formulierung* gewünschter quantitativer Eigenschaften mittels ungewichteter Frequenzgangmatrizen des *offenen* oder *geschlossenen Kreises*, *unstrukturierte multiplikative* Modellfehler,
- „Detaillierte“ *unstrukturierte Formulierung* gewünschter quantitativer Eigenschaften mittels gewichteter Frequenzgangmatrizen des *geschlossenen Kreises*, *verallgemeinerte strukturierte* Modellfehler,
- *strukturierte Formulierung* gewünschter quantitativer Eigenschaften mittels Frequenzgangmatrizen des *geschlossenen Kreises*, *additive Fehler in den Einzelementen* der Strecken-Übertragungsmatrix .

	Formulierung quantitativer Ziele mittels		
	$\bar{\sigma}[Q_r(j\omega)],$ $\underline{\sigma}[Q_r(j\omega)],$ $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)],$ $\bar{\sigma}[T_r(j\omega)]$	$\bar{\sigma}[W_S(j\omega)S_r(j\omega)],$ $\bar{\sigma}[W_T(j\omega)T_r(j\omega)],$ \vdots \vdots	$ S_r(j\omega) _e,$ $ T_r(j\omega) _e$
Fehlerklasse \mathcal{D}_M	Abschnitt 6.3.1		
Fehlerklasse \mathcal{D}_s		Abschnitt 6.3.2	
Fehlerklasse \mathcal{D}_{Ae}			Abschnitt 6.3.3

Tabelle 6.1: Robustheit quantitativer Eigenschaften – eine Übersicht.

6.3.1 Robustheit quantitativer Eigenschaften – Fall 1

Wir spezifizieren zunächst die aus Abschnitt 5.2 bekannten unstrukturierten Forderungen für gutes Führungs- und Störverhalten und Unterdrückung von Meßrauschen und wenden sie auf das mit multiplikativen Fehlern $\Delta_M \in \mathcal{D}_M$

behaftete Streckenmodell an:

$$Q_r(j\omega) := G_r(j\omega)K(j\omega), \quad G_r \in \mathcal{G}_M$$

$$\underline{\sigma}[Q_r(j\omega)] \stackrel{!}{\geq} f(\omega) \gg 1; \quad \omega \in \Omega_{rd} \quad (6.43)$$

$$\bar{\sigma}[Q_r(j\omega)] \stackrel{!}{\leq} g(\omega) \ll 1; \quad \omega \in \Omega_\eta. \quad (6.44)$$

$f(\omega)$ und $g(\omega)$ sind vorgegebene skalare Größen, die Anforderungen an den Regelkreis quantifizieren. Mit den in Abschnitt 5.2.2.1 angegebenen Eigenschaften von größtem und kleinstem Singulärwert lassen sich leicht hinreichende Kriterien zur Überprüfung der Forderungen (6.43) und (6.44) herleiten:

Satz 6.8 (Führungs- und Störverhalten für $G_r \in \mathcal{G}_M$) _____

Der Regelkreis (G_r, K) erfüllt Bedingung (6.43) für alle $G_r \in \mathcal{G}_M$, wenn

$$\underline{\sigma}[Q(j\omega)] \geq \frac{f(\omega)}{1 - l_M(\omega)}; \quad \omega \in \Omega_{rd}; \quad l_M < 1. \quad (6.45)$$

Anmerkung: Ω_{rd} umfaßt den Bereich niedriger Frequenzen. Dort ist normalerweise gewährleistet, daß der relative (multiplikative) Fehler kleiner als 1 ist; die Forderung $l_M < 1$ schränkt also die Gültigkeit von Satz 6.8 nicht wesentlich ein.

Beweis:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}[Q_r] &= \underline{\sigma}[(I_p + \Delta_M) Q] \\ &\geq \underline{\sigma}[I_p + \Delta_M] \underline{\sigma}[Q] \\ &\geq (1 - \bar{\sigma}[\Delta_M]) \underline{\sigma}[Q] \\ &> (1 - l_M) \underline{\sigma}[Q]. \end{aligned}$$

(6.45) impliziert also (6.43). □

Satz 6.9 (Rauschunterdrückung für $G_r \in \mathcal{G}_M$) _____

Der Regelkreis (G_r, K) erfüllt Bedingung (6.44) für alle $G_r \in \mathcal{G}_M$, wenn

$$\bar{\sigma}[Q(j\omega)] \leq \frac{g(\omega)}{1 + l_M(\omega)}; \quad \omega \in \Omega_\eta. \quad (6.46)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}[Q_r] &= \bar{\sigma}[(I_p + \Delta_M) Q] \\
 &\leq \bar{\sigma}[I_p + \Delta_M] \bar{\sigma}[Q] \\
 &\leq (\bar{\sigma}[I_p] + \bar{\sigma}[\Delta_M]) \bar{\sigma}[Q] \\
 &< (1 + l_M) \bar{\sigma}[Q].
 \end{aligned}$$

(6.46) impliziert also (6.44). □

Die unstrukturierten Bedingungen, anhand derer wir quantitative Regelkreiseigenschaften überprüfen können, werden durch die Existenz unstrukturierter (multiplikativer) Modellfehler also nicht verändert. Wir müssen lediglich einen von der „Größe“ der Unsicherheit abhängigen „Sicherheitsabstand“ von den nominellen Entwurfsspezifikationen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ wahren. Die Bedingungen (6.45) und (6.46) besitzen natürlich ein Äquivalent für Sensitivitätsmatrix und komplementäre Sensitivitätsmatrix des nominellen Regelkreises:

Satz 6.10 (Abschätzung für $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)]$ und $\bar{\sigma}[T_r(j\omega)]$) _____

Für alle $\Delta_M \in \mathcal{D}_M$ sei $\bar{\sigma}[T(j\omega)] < 1/l_M(\omega)$, der Regelkreis (G_r, K) also asymptotisch stabil. Dann gilt:

$$\bar{\sigma}[S_r(j\omega)] < \bar{\sigma}[S(j\omega)] \frac{1}{1 - l_M(\omega) \bar{\sigma}[T(j\omega)]} \quad (6.47)$$

$$\bar{\sigma}[T_r(j\omega)] < \bar{\sigma}[T(j\omega)] \frac{1 + l_M(\omega)}{1 - l_M(\omega) \bar{\sigma}[T(j\omega)]}. \quad (6.48)$$

Beweis: Wir zeigen nur (6.47); der Beweis für (6.48) verläuft analog.

$$\begin{aligned}
 S_r &= [I_p + \underbrace{(I_p + \Delta_M)Q}_{Q_r}]^{-1} \\
 &= [(I_p + Q) + \Delta_M Q]^{-1} \\
 &= \underbrace{(I_p + Q)^{-1}}_{=S} [I_p + \Delta_M \underbrace{Q(I_p + Q)^{-1}}_{=T}]^{-1} \\
 &= S(I_p + \Delta_M T)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Singulärwerte kann man nun folgern:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}[S_r] &\leq \bar{\sigma}[S] \bar{\sigma}[(I_p + \Delta_M T)^{-1}] \\
 &= \bar{\sigma}[S] \frac{1}{\underline{\sigma}[I_p + \Delta_M T]} \\
 &\leq \bar{\sigma}[S] \frac{1}{1 - \bar{\sigma}[\Delta_M T]} \\
 &< \bar{\sigma}[S] \frac{1}{1 - l_M \bar{\sigma}[T]}.
 \end{aligned}$$

□

Da im Frequenzbereich Ω_{rd} üblicherweise gilt $\bar{\sigma}[S] \ll 1$, $T \approx I_p$, erhält man dort näherungsweise:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}[S_r(j\omega)] &< \bar{\sigma}[S(j\omega)] \frac{1}{1 - l_M(\omega)} \\
 \bar{\sigma}[T_r(j\omega)] &< \bar{\sigma}[T(j\omega)] \frac{1 + l_M(\omega)}{1 - l_M(\omega)}.
 \end{aligned}$$

Im Frequenzbereich Ω_η (dort gilt i.a. $\bar{\sigma}[T] \ll 1$) ergibt sich näherungsweise:

$$\bar{\sigma}[T_r(j\omega)] < \bar{\sigma}[T(j\omega)] (1 + l_M(\omega)).$$

Auch diesen Bedingungen ist zu entnehmen, daß im nominellen Fall einzuhaltende Spezifikationen wie $S(j\omega) \stackrel{!}{\leq} 1/f(\omega)$, $\omega \in \Omega_{rd}$, oder $T(j\omega) \stackrel{!}{\leq} g(\omega)$, $\omega \in \Omega_\eta$, durch das Auftreten unstrukturierter Unsicherheit „verschärft“ werden. Es sei ausdrücklich betont, daß die verwendeten Abschätzungen nur für solche Frequenzen einen Sinn ergeben, bei denen $\bar{\sigma}[T] l_M$ einen genügenden Abstand zum Wert 1 besitzt – dies ist i.a. für sehr große und sehr kleine Frequenzen gewährleistet. Andernfalls wachsen die Fehlerschranken (6.47) und (6.48) stark an.

Im beschriebenen einfachsten Fall können Bedingungen für Robustheit von Stabilität (Satz 6.3) und quantitativen Eigenschaften offenbar mittels maximaler Singulärwerte von $S(j\omega)$ und $T(j\omega)$ ausgedrückt werden: In Bild 6.15 ist zusammengefaßt, wie die Spezifikationen $f(\omega)$ und $g(\omega)$ und eine typische multiplikative Fehlerschranke $l_M(\omega)$ den zulässigen Verlauf der maximalen Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix eingrenzen. Die Frequenz, bei der $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ (bzw. $\underline{\sigma}[T(j\omega)]$) die $-3dB$ -Linie schneidet, bezeichnen wir mit $\bar{\omega}_b$ (bzw. $\underline{\omega}_b$). Bei Eingrößensystemen verwendet man den Begriff der *Bandbreite des geschlossenen Kreises* für die Frequenz

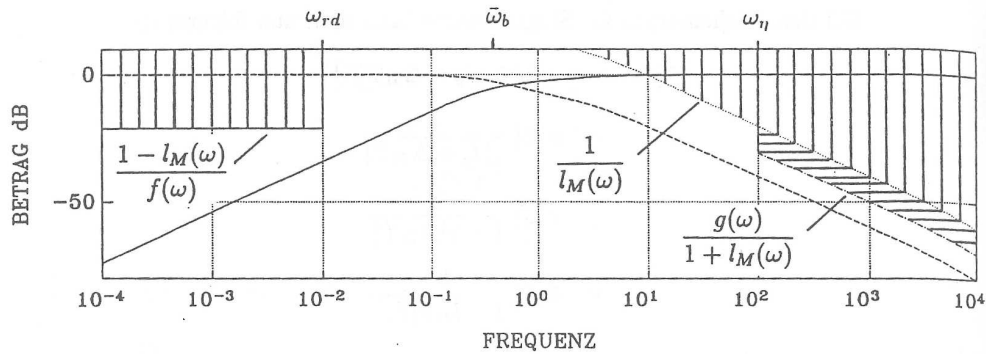


Bild 6.15: Obere Schranken für $\bar{\sigma}[S(j\omega)]$ und $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$.

ω_b , bei der der Betrag der komplementären Sensitivitätsfunktion kleiner als -3dB wird. Diese Frequenz kann im Eingrößenfall als ungefähre „Trennlinie“ zwischen den Bereichen Ω_{rd} und Ω_η angesehen werden muß. Sie muß im Mehrgrößen-Fall offenbar durch das Intervall $[\underline{\omega}_b, \bar{\omega}_b]$ ersetzt werden.

Bild 6.16 zeigt die Übersetzung der obigen Forderungen auf die Frequenzgangmatrix des offenen Kreises (vgl. (6.45) und (6.46)). Ein Ersetzen des Robustheitskriteriums aus Satz 6.3 durch $\bar{\sigma}[Q] < 1/l_M$ ist natürlich nur für große l_M erlaubt. Bild 6.16 verdeutlicht, daß die klassische Entwurfsstrategie für

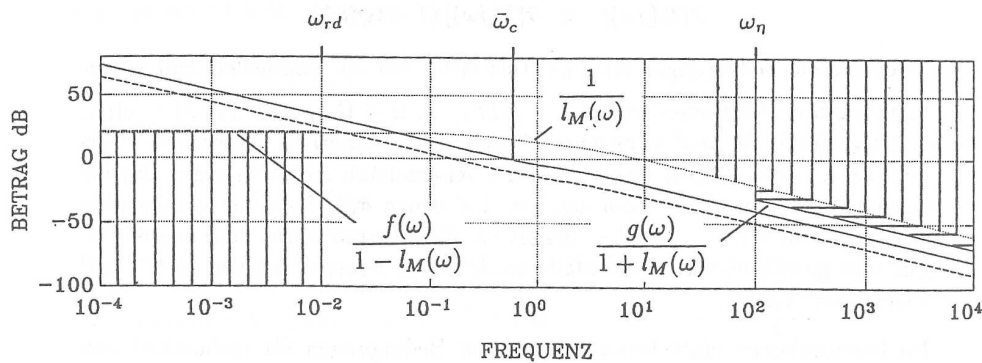


Bild 6.16: Obere und untere Schranken für $\bar{\sigma}[Q(j\omega)]$ und $\underline{\sigma}[Q(j\omega)]$.

Eingrößensysteme („Verwendung kleiner Kreisverstärkungen in Frequenzbereichen, in denen mit hoher Modellgenauigkeit oder Meßrauschen gerechnet werden muß“) direkt auf Mehrgrößensysteme übertragen werden kann. Mit $\bar{\omega}_c$ (bzw. $\underline{\omega}_c$) bezeichnen wir diejenigen Frequenzen, bei denen $\bar{\sigma}[Q(j\omega)]$ (bzw. $\underline{\sigma}[Q(j\omega)]$) die 0dB-Linie schneidet. Der Frequenzbereich $[\underline{\omega}_c, \bar{\omega}_c]$ stellt also eine Verallgemeinerung des bei Eingrößensystemen geläufigen Begriffes der *Durchtrittsfrequenz* dar.

Ein beliebig schnelles Verringern der Kreisverstärkungen $\sigma_i[Q]$ über der Frequenz ist – ein weiteres Analogon zum Eingrößenfall – nicht möglich. Je strenger die Spezifikationen $\frac{f}{1-l_M}$ und $\frac{g}{1+l_M}$, desto weiter müssen die Frequenzen ω_{rd} und ω_η auseinanderliegen. Diese und andere analytische Einschränkungen für die Singulärwerte von $Q(j\omega)$, $S(j\omega)$ und $T(j\omega)$ werden in Kapitel 7 behandelt.

6.3.2 Robustheit quantitativer Eigenschaften – Fall 2

Wie wir in Kapitel 4 und Abschnitt 5.2 besprochen haben, können wir verschiedenste Anforderungen bezüglich des Führungs- und Störverhaltens, der Unterdrückung von Meßrauschen und der Stellgliedaktivität durch eine Normbedingung für die Frequenzgangmatrix $R(j\omega) = \mathcal{F}_L(P(j\omega), K(j\omega))$ eines geeignet definierten verallgemeinerten Regelkreises formulieren. Das verallgemeinerte Streckenmodell P und damit die Matrix R hängen natürlich vom Entwurfsmodell G ab. Im Unterschied zu Abschnitt 5.2 beschäftigen wir uns jetzt mit fehlerbehafteten Streckenmodellen $G_r \in \mathcal{G}_s$. Wir wollen also sicherstellen, daß für alle Frequenzen ω und alle zulässigen Fehler $\Delta_s \in \mathcal{D}_s$ gilt:

$$\bar{\sigma}[R_r(j\omega)] \leq 1. \quad (6.49)$$

Beispiel: Die gewünschten quantitativen Eigenschaften lassen sich als Normbedingung für eine gewichtete Kombination von Sensitivitätsmatrix, komplementärer Sensitivitätsmatrix und KS_r ausdrücken:

$$R_r := \begin{bmatrix} W_S S_r \\ W_{KS} K S_r \\ W_T T_r \end{bmatrix} W_i$$

$$S_r = (I_p + G_r K)^{-1}$$

$$T_r = (I_p + G_r K)^{-1} G_r K$$

$$G_r = \mathcal{F}_U(\Theta, \Delta_s).$$

Dieser Sachverhalt ist in Bild 6.17 dargestellt.

Der allgemeinen Version (Bild 6.18) kann man entnehmen, daß sich R_r und R (die Übertragungsmatrizen des fehlerbehafteten und des nominellen verallgemeinerten Regelkreises) als „Upper linear fractional transformation“ von Fehlerterm Δ_s bzw. 0 bezüglich einer Matrix \hat{R} schreiben lassen:

$$R = \mathcal{F}_U(\hat{R}, 0), \quad (6.50)$$

$$R_r = \mathcal{F}_U(\hat{R}, \Delta_s). \quad (6.51)$$

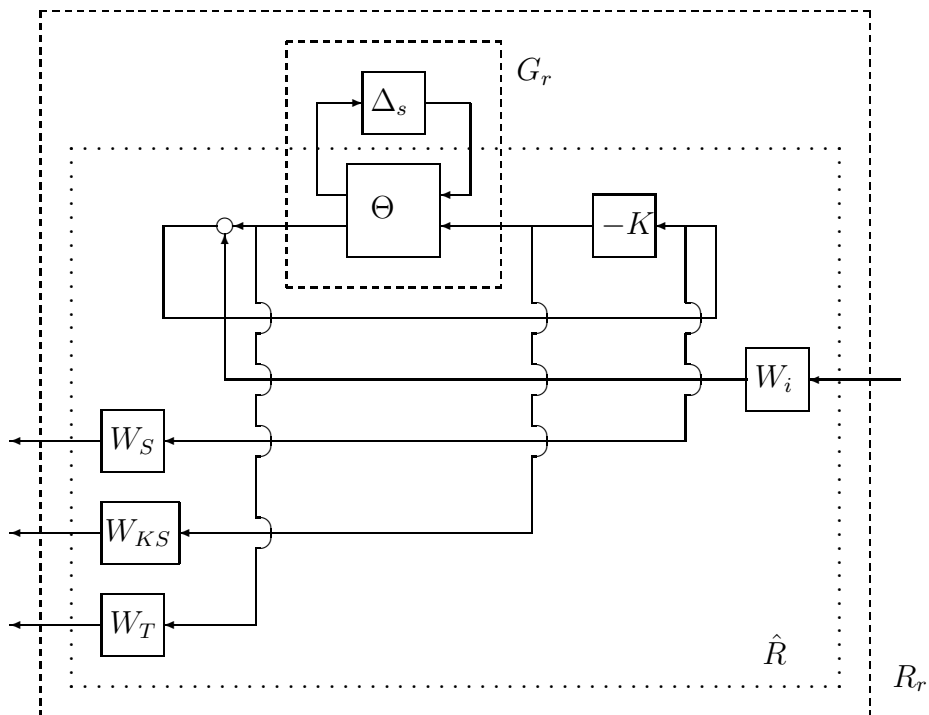


Bild 6.17: Beispiel für verallgemeinerten Regelkreis mit Modellfehler.

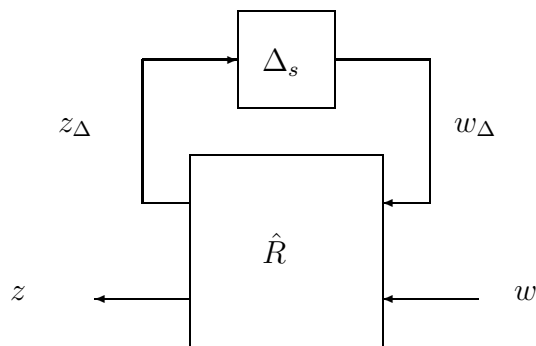


Bild 6.18: Verallgemeinerter Regelkreis mit Modellfehler.

Robustheit der gewünschten quantitativen Regelkreiseigenschaften ist also gleichbedeutend mit:

$$\bar{\sigma}[\mathcal{F}_U(\hat{R}(j\omega), \Delta_s(j\omega))] \leq 1 \quad \text{für alle } \omega \quad (6.52)$$

und alle $\Delta_s \in \mathcal{D}_s$.

Zur Erinnerung sei angemerkt: Notwendig und hinreichend für Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ bezüglich der Fehlerklasse \mathcal{D}_s ist, daß der strukturier-

te Singulärwert der von Δ_s aus „sichtbaren“ Frequenzgangmatrix kleiner oder gleich 1 bleibt (Satz 6.7):

$$\mu_{\Delta_s}[\hat{R}_{11}(j\omega)] = \mu_{\Delta_s}[\mathcal{F}_L(\Theta(j\omega), -K(j\omega))] \quad (6.53)$$

$$\leq 1 \quad \text{für alle } \omega. \quad (6.54)$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für (6.54) und (6.52) läßt sich leicht herleiten, wenn man eine „neue“ Blockstruktur definiert (l und m bezeichnen die Dimensionen der Vektoren z und w):

$$\bar{\Delta}_s := \left\{ \left[\begin{array}{cc} \Delta_s & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta} \end{array} \right] \mid \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \tilde{\Delta} \in \mathbb{C}^{m \times l} \right\}. \quad (6.55)$$

Satz 6.11 (Robustheit von quantitativen Eigenschaften und Stabilität für $G_r \in \mathcal{G}_s$) _____

(6.54) und (6.52) gelten genau dann, wenn

$$\mu_{\bar{\Delta}_s}[\hat{R}(j\omega)] \leq 1 \quad \text{für alle } \omega. \quad (6.56)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß Satz 6.11 eine hinreichende Bedingung darstellt:

$$\mu_{\bar{\Delta}_s}[\hat{R}] \leq 1$$

$$\implies \det \left\{ I_{l_{\Delta}+l} - \hat{R} \begin{bmatrix} \Delta_s & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta} \end{bmatrix} \right\} \neq 0 \quad (6.57)$$

für alle $\Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s$, $\bar{\sigma}[\Delta_s] < 1$ und alle $\tilde{\Delta} \in \mathbb{C}^{m \times l}$, $\bar{\sigma}[\tilde{\Delta}] < 1$

$$\implies \det \left\{ I_{l_{\Delta}+l} - \hat{R} \begin{bmatrix} \Delta_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \neq 0 \quad \text{für alle } \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1$$

$$\implies \det \{ I_{l_{\Delta}} - \hat{R}_{11} \Delta_s \} \neq 0 \quad \text{für alle } \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1 \quad (6.58)$$

$$\implies \mu_{\Delta_s}[\hat{R}_{11}] \leq 1,$$

i.e. (6.54) gilt.

Wegen (6.58) können wir auf die linke Seite der Ungleichung (6.57) die *Schur-Formel*² anwenden und erhalten:

$$\det \{ I_{l_{\Delta}} - \hat{R}_{11} \Delta_s \} \det \{ I_l - \hat{R}_{22} \tilde{\Delta} - \hat{R}_{21} \Delta_s (I_{l_{\Delta}} - \hat{R}_{11} \Delta_s)^{-1} \hat{R}_{12} \tilde{\Delta} \} \neq 0$$

²s. Anhang A.

$$\begin{aligned}
& \text{für alle } \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1 \text{ und alle } \tilde{\Delta} \in \mathbb{C}^{m \times l}, \bar{\sigma}[\tilde{\Delta}] < 1 \\
\implies \det \underbrace{\left\{ I_l - \hat{R}_{22}\tilde{\Delta} - \hat{R}_{21}\Delta_s(I_{l_\Delta} - \hat{R}_{11}\Delta_s)^{-1}\hat{R}_{12}\tilde{\Delta} \right\}}_{I_l - \mathcal{F}_U(\hat{R}, \Delta_s)\tilde{\Delta}} & \neq 0 \\
& \text{für alle } \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1 \text{ und alle } \tilde{\Delta} \in \mathbb{C}^{m \times l}, \bar{\sigma}[\tilde{\Delta}] < 1 \\
\implies \bar{\sigma}[\mathcal{F}_U(\hat{R}, \Delta_s)] \leq 1 & \text{ für alle } \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1,
\end{aligned}$$

i.e. (6.52) gilt.

Notwendigkeit zeigt man durch nochmaliges Anwenden der Schur-Formel: (6.54) impliziert

$$\det \{I_{l_\Delta} - \hat{R}_{11}\Delta_s\} \neq 0 \quad \text{für alle } \Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s, \bar{\sigma}[\Delta_s] < 1.$$

Deshalb kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
\det \left\{ I_{l_\Delta+l} - \hat{R} \begin{bmatrix} \Delta_s & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta} \end{bmatrix} \right\} &= \\
= \det \left\{ \begin{bmatrix} I_{l_\Delta} - \hat{R}_{11}\Delta_s & -\hat{R}_{12}\tilde{\Delta} \\ -\hat{R}_{21}\Delta_s & I_l - \hat{R}_{22}\tilde{\Delta} \end{bmatrix} \right\} & \\
= \det \{I_{l_\Delta} - \hat{R}_{11}\Delta_s\} \dots & \\
\dots \det \underbrace{\left\{ I_l - \hat{R}_{22}\tilde{\Delta} - \hat{R}_{21}\Delta_s(I_{l_\Delta} - \hat{R}_{11}\Delta_s)^{-1}\hat{R}_{12}\tilde{\Delta} \right\}}_{I_l - \mathcal{F}_U(\hat{R}, \Delta_s)\tilde{\Delta}} &.
\end{aligned}$$

Wegen (6.52) ist auch der zweite Term auf der rechten Seite für alle $\Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s$, $\bar{\sigma}[\Delta_s] < 1$ und alle $\tilde{\Delta} \in \mathbb{C}^{m \times l}$, $\bar{\sigma}[\tilde{\Delta}] < 1$ ungleich Null. Damit ist gezeigt, daß

$$\det \left\{ I_{l_\Delta+l} - \hat{R} \begin{bmatrix} \Delta_s & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta} \end{bmatrix} \right\} \neq 0$$

für alle $\Delta_s \in \mathbf{\Delta}_s$, $\bar{\sigma}[\Delta_s] < 1$ und alle $\tilde{\Delta} \in \mathbb{C}^{m \times l}$, $\bar{\sigma}[\tilde{\Delta}] < 1$ und somit

$$\mu_{\mathbf{\Delta}_s}[\hat{R}] \leq 1.$$

□

Anmerkung: Mittels Satz 6.11 kann man natürlich auch Robustheit bezüglich unstrukturierter verallgemeinerter Fehler überprüfen: Man muß lediglich die blockdiagonale Struktur Δ_s durch

eine vollbesetzte $m_\Delta \times l_\Delta$ -Struktur Δ ersetzen. Die Bedingung (6.56) ist dann (für jede Frequenz) äquivalent zu

$$\bar{\sigma}[\mathcal{F}_U(\hat{R}, \Delta)] \leq 1 \quad \text{für alle } \Delta \in \mathbb{C}^{m_\Delta \times l_\Delta}, \bar{\sigma}[\Delta] < 1$$

(Robustheit der geforderten quantitativen Eigenschaften) und

$$\bar{\sigma}[\hat{R}_{11}] = \bar{\sigma}[\mathcal{F}_L(\Theta, -K)] \leq 1$$

(Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ für alle asymptotisch stabilen $\Delta(s)$ mit $\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1$).

Anmerkung: Da der strukturierte Singulärwert μ einer jeden Matrix kleiner oder gleich ihrem maximalen Singulärwert $\bar{\sigma}$ ist, kann man leicht eine hinreichende, rechnerisch einfacher zu überprüfende Bedingung für (6.56) angeben:

$$\bar{\sigma}[\hat{R}(j\omega)] \leq 1 \quad \implies \quad \mu_{\hat{\Delta}_s}[\hat{R}(j\omega)] \leq 1. \quad (6.59)$$

6.3.3 Robustheit quantitativer Eigenschaften – Fall 3

Satz 6.12

Wir betrachten den Regelkreis (G_r, K) mit $G_r \in \mathcal{G}_{Ae}$. Bedingung 2.(b) in Satz 6.6 sei erfüllt. Dann gilt für Sensitivitätsmatrix $S_r = (I_p + G_r K)^{-1}$ und komplementäre Sensitivitätsmatrix $T_r = (I_p + G_r K)^{-1} G_r K$:

$$|S_r|_e \leq_e |S|_e (I_p - L_{Ae} |K S|_e)^{-1} \quad \text{für alle } \omega \quad (6.60)$$

$$|T_r|_e \leq_e \left(I_p + L_{Ae} |G^{-1}|_e \right) |T|_e (I_p - L_{Ae} |K S|_e)^{-1} \quad (6.61)$$

für alle ω , für die $\det\{G(j\omega)\} \neq 0$.

Ist das Entwurfsmodell G invertierbar und Bedingung 2.(c) in Satz 6.6 erfüllt, so gilt:

$$|S_r|_e \leq_e |S|_e \left(I_p - |\Delta_{Ae} G^{-1}|_e |T|_e \right)^{-1} \quad \text{für alle } \omega \quad (6.62)$$

$$|T_r|_e \leq_e \left(I_p + |\Delta_{Ae} G^{-1}|_e \right) |T|_e \left(I_p - |\Delta_{Ae} G^{-1}|_e |T|_e \right)^{-1} \quad \text{für alle } \omega. \quad (6.63)$$

Anmerkung: Die Ungleichungen (6.62) und (6.63) stellen keine Robustheitskriterien im eigentlichen Sinne dar, da sie die (unbekannte) Fehlermatrix und nicht die (bekannte) Matrix L_{Ae} der Fehlerschranken enthalten. Sie werden an dieser Stelle aufgeführt,

da bei den in Kapitel 9 eingeführten Nyquist-Array Entwurfsverfahren außerhalb der Hauptdiagonalen stehende Elemente vernachlässigt und damit wie *bekannte* Modellfehler behandelt werden. In diesem Zusammenhang können beide Bedingungen Anwendung finden. Man beachte, daß die Kriterien (6.60) und (6.61) in erster Linie bei „kleinen“ Fehlerschranken sinnvoll sind. Andernfalls können die Elemente der Matrix $(I_p - L_{Ae}|KS|_e)^{-1}$ betragsmäßig sehr groß, die Abschätzungen für $|S_r|_e$ und $|T_r|_e$ unbrauchbar werden.

Beweis: Wir beweisen nur die Gültigkeit der Abschätzung (6.60) für die Sensitivitätsmatrix. (6.62) sowie die Beziehungen für die komplementäre Sensitivitätsmatrix zeigt man auf analoge Weise.

$$\begin{aligned} S_r &= (I_p + GK + \Delta_{Ae}K)^{-1} \\ &= \underbrace{(I_p + GK)^{-1}}_S \left(I_p + \Delta_{Ae}K \underbrace{(I_p + GK)^{-1}}_S \right)^{-1} \end{aligned}$$

Aus $|XY|_e \leq_e |X|_e|Y|_e$, den Eigenschaften des Perron-Frobenius-Eigenwertes (s. Seite 197) und der Bedingung für Robustheit der Eigenschaft Stabilität in Satz 6.6 folgt für den Spektralradius ρ der Matrix $\Delta_{Ae}KS$:

$$\begin{aligned} \rho[\Delta_{Ae}KS] &\leq \lambda_{PF}[|\Delta_{Ae}KS|_e] \\ &\leq \lambda_{PF}[L_{Ae}|KS|_e] \\ &< 1. \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$S_r = S \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta_{Ae}KS)^i$$

und

$$\begin{aligned} |S_r|_e &\leq_e |S|_e \sum_{i=0}^{\infty} (L_{Ae}|KS|_e)^i \\ &= |S|_e (I_p - L_{Ae}|KS|_e)^{-1}. \end{aligned}$$

□

6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel behandelten wir verschiedene Möglichkeiten, Modellunsicherheit darzustellen. Wir unterschieden unstrukturierte und strukturierte Fehler. Im ersten Fall kennen wir lediglich eine frequenzabhängige obere Schranke für die Fehler-Matrix; im zweiten Fall kann man Schranken für einzelne Elemente des Fehlermodells angeben. Sowohl im strukturierten als auch im unstrukturierten Fall betrachteten wir verallgemeinerte Fehlermodelle, in die wir andere Fehlerklassen einbetten konnten. Schließlich untersuchten wir Robustheitsbedingungen, mit deren Hilfe sich überprüfen läßt, ob Stabilität und gewünschte quantitative Regelkreiseigenschaften für alle Elemente einer gegebenen Fehlerklasse garantiert werden.

6.5 Literaturhinweise

Eine schöne einführende Übersicht über Robustheitsuntersuchungen im Frequenzbereich geben *Doyle* und *Stein* [21]. Dort wird auch Satz 6.3 und 6.8 bewiesen. Eine Herleitung von Satz 6.2 findet man bei *Cruz et al.* [11]. Faktorierte Modellfehler wurden von *Vidyasagar* [110] und *Vidyasagar* und *Kimura* [112] untersucht. Verallgemeinerte unstrukturierte Modellunsicherheit wurde von *McFarlane* und *Glover* [74] behandelt – sie bewiesen u.a. Satz 6.1. Robustheitsuntersuchungen für die Fehlerklasse \mathcal{D}_{Ae} gehen in erster Linie auf die Arbeiten von *Owens* und *Chotai* [83][84], *Lunze* [60] [61] sowie *Kantor* und *Andres* [50] zurück. Verallgemeinerte strukturierte Modellfehler und der strukturierte Singulärwert wurden von *Doyle* [17] eingeführt. Die notwendige und hinreichende Robustheitsbedingung in Satz 6.11 wurde von *Doyle et al.* [22], die Abschätzungen in Satz 6.12 von *Lunze* [60][61] bewiesen. Eine Fülle weiterer Informationen über den strukturierten Singulärwert findet man bei *Packard* und *Doyle* [86].

Kapitel 7

Grenzen quantitativer Regelkreiseigenschaften

7.1 Algebraische Einschränkungen

Quantitative Eigenschaften eines Regelkreises werden im wesentlichen durch Sensitivitätsmatrix und komplementäre Sensitivitätsmatrix bestimmt. Es ist jedoch nicht möglich, beide Größen *zugleich* im gesamten Frequenzbereich beliebig vorzugeben. Eine *algebraische Einschränkung* wurde bereits in Abschnitt 5.2 angesprochen: Wegen

$$S(j\omega) + T(j\omega) = I_p \quad (7.1)$$

lassen sich für jede Frequenz ω entweder $\bar{\sigma}[S] \ll 1$ („gutes“ Führungs- und Störverhalten für beliebige räumliche Ausrichtung der Vektoren $d(j\omega), r(j\omega)$) oder $\bar{\sigma}[T] \ll 1$ (weitgehende Unterdrückung von Meßrauschen) erreichen.

Zwei weitere algebraische Einschränkungen folgen ebenfalls unmittelbar aus der Definition von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix: $s = p$ sei ein *in der abgeschlossenen rechten Halbebene liegender* Übertragungspol des Streckenmodells $G = \tilde{M}_{PG}^{-1} \tilde{N}_{PG}$ oder des Reglers $K = N_{PK} M_{PK}^{-1}$, d.h. eine Wurzel des Pol-Polynoms des offenen Kreises

$$p_{PoK}(s) = \det \tilde{M}_{PG}(s) \det M_{PK}(s).$$

Mit Hilfe links- und rechtskoprimen Polynom-Matrizenbruchdarstellungen von Streckenmodell und Regler-Übertragungsmatrix kann man die Sensitivitätsmatrix folgendermaßen ausdrücken:

$$S = (I_p + GK)^{-1}$$

$$= M_{PK} \left(\underbrace{\widetilde{M}_{PG}M_{PK} + \widetilde{N}_{PG}N_{PK}}_{\alpha_P} \right)^{-1} \widetilde{M}_{PG}.$$

Da der geschlossene Kreis asymptotisch stabil sein soll, kann sein charakteristisches Polynom $p_{PgK}(s) = \det \alpha_P(s)$ keine Wurzel an der Stelle $s = p$ besitzen. Demzufolge gilt für die Determinante der Sensitivitätsmatrix:

$$\det S(s = p) = 0,$$

S besitzt also an der Stelle $s = p$ eine Übertragungsnullstelle. Umgekehrt können wir festhalten: Sind Streckenmodell und Regler asymptotisch stabil, so ist die Sensitivitätsmatrix minimalphasig.

$s = z$ sei eine *auf oder rechts der imaginären Achse liegende* Übertragungsnullstelle (aber kein Übertragungspol) der Matrix $Q(s) = G(s)K(s)$; $\det Q(z)$ verschwindet also. Da $(I_p + Q)^{-1}$ voraussetzungsgemäß eine asymptotisch stabile Übertragungsmatrix ist, muß gelten:

$$\det T(z) = \det \{(I_p + Q(z))^{-1}Q(z)\} = 0;$$

die komplementäre Sensitivitätsmatrix besitzt also an der Stelle $s = z$ eine Übertragungsnullstelle.

Analytische Einschränkungen verknüpfen die Eigenschaften eines Regelsystems in verschiedenen Frequenzbereichen und bewirken somit weitere Restriktionen. Sie verhindern beispielsweise, daß der Übergang vom Bereich guten Führungs- und Störverhaltens zum Frequenzbereich Ω_η (wo $\bar{\sigma}[T(j\omega)] \ll 1$) beliebig schnell erfolgen kann. Solche analytischen Einschränkungen sollen im folgenden kurz angerissen werden.

7.2 Analytische Einschränkungen

7.2.1 Bodesche Amplituden-Phasen-Beziehung

7.2.1.1 Der Eingrößenfall

Im Eingrößenfall gibt die bekannte Bodesche Amplituden-Phasenbeziehung den Zusammenhang zwischen der Änderung des Betrags über der Frequenz und der Phase eines Frequenzgangs an: Liegen alle Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion $Q(s)$ des offenen Kreises links der imaginären Achse, so gilt für eine beliebige Frequenz ω :

$$\angle Q(j\omega) - \angle Q(j0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |Q(j\tilde{\omega})|}{d\nu} \underbrace{\ln \coth \frac{|\nu|}{2}}_{:=w(\nu)} d\nu$$

mit:

$$\nu = \ln \frac{\tilde{\omega}}{\omega}.$$

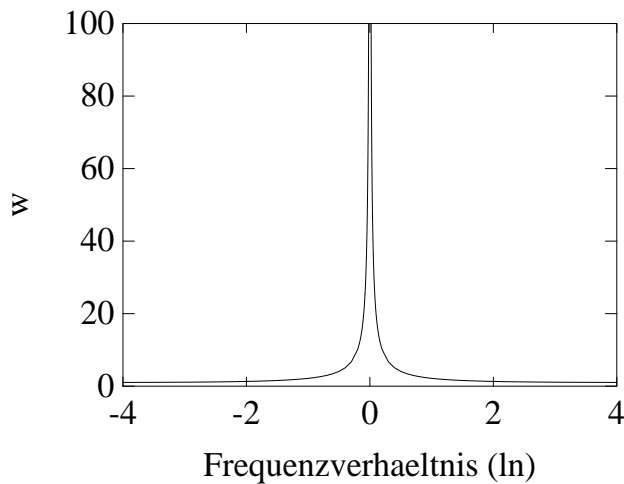


Bild 7.1: Gewichtungsfunktion $w(\nu)$.

Aus dem Verlauf der Gewichtungsfunktion $w(\nu)$ in Bild 7.1 ist ersichtlich, daß die Phasendrehung des Frequenzganges an einer Stelle ω in erster Linie von der Steigung des Amplitudenganges an dieser einen Frequenz bestimmt wird: $w(\nu)$ verhält sich in grober Näherung wie $\frac{1}{2}\pi^2\delta(\nu)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(\nu) d\nu = \frac{1}{2}\pi^2.$$

In erster Näherung läßt sich der Zusammenhang zwischen Betrag und Phase deshalb auf folgende Faustformel reduzieren: Gilt $Q(j\omega) > 0$ (und damit $\angle Q(j\omega) = 0$) und besitzt der (logarithmisch aufgetragene) Amplitudengang in einer (nicht zu kleinen) Umgebung der betrachteten Frequenz ω eine Steigung von

$$\begin{aligned} \frac{d \ln |Q|}{d\nu} &= \frac{d \lg |Q|}{d\tilde{\nu}}, & \tilde{\nu} &:= \lg \frac{\tilde{\omega}}{\omega} \\ &= -n \end{aligned}$$

(i.e. der Amplitudengang „fällt mit $n20$ dB/Dekade ab“), so erhält man für die Phase $\angle Q(j\omega) \approx -n\frac{\pi}{2}$. Beträgt der Amplitudenabfall insbesondere in der Nähe der Durchtrittsfrequenz ω_c 40 dB/Dekade, so ergibt sich

$$\left. \begin{array}{l} |Q(j\omega_c)| = 1 \\ \angle Q(j\omega_c) \approx -\pi \end{array} \right\} \implies Q(j\omega_c) \approx -1;$$

die Phasenreserve des zugehörigen Regelkreises wird in diesem Fall verschwindend klein, Sensitivitätsfunktion $(1 + Q(j\omega_c))^{-1}$ und komplementäre Sensitivitätsfunktion $Q(j\omega_c)(1 + Q(j\omega_c))^{-1}$ wachsen betragsmäßig sehr stark an.

7.2.1.2 Der Mehrgrößenfall

Eine Verallgemeinerung der Bodeschen Amplituden-Phasen-Beziehung auf Mehrgrößensysteme ist prinzipiell möglich. Ein Zusammenhang mit den Singulärwerten der Frequenzgangmatrix $Q(j\omega)$ läßt sich allerdings nur mittelbar – über die Beträge der Eigenwerte von $Q(j\omega)$ und die Abschätzung

$$\underline{\sigma}[Q] \leq |\lambda_{Q_i}| \leq \bar{\sigma}[Q]$$

– angeben. Aussagen über mögliche Verläufe der $|\lambda_{Q_i}(j\omega)|$ werden offenbar umso genauer in Aussagen über die Singulärwerte der Matrix $Q(j\omega)$ zu übersetzen sein, je kleiner die Konditionszahl dieser Matrix

$$\kappa[Q(j\omega)] := \frac{\bar{\sigma}[Q(j\omega)]}{\underline{\sigma}[Q(j\omega)]}$$

ist¹. Allerdings können wir die skalare Amplituden-Phasen-Beziehung i.a. nicht direkt auf den einzelnen Eigenwert λ_{Q_i} anwenden, da dieser nicht reell-rational zu sein braucht (ein einfaches Beispiel für diesen Sachverhalt findet man in Abschnitt 9.2). Wir können aber zumindest eine Beziehung für die Summe der Phasenänderungen aller frequenzabhängigen Eigenwerte angeben. Im folgenden setzen wir Nichtsingularität von $Q(s)$ (d.h. $\det Q(s) \neq 0$) voraus.

Satz 7.1 (Amplituden-Phasen Beziehung für Mehrgrößensysteme). *Besitzen sämtliche Übertragungspole und -nullstellen von $Q(s)$ negativen Realteil, so gilt:*

$$\sum_{i=1}^p (\angle \lambda_{Q_i}(j\omega) - \angle \lambda_{Q_i}(j0)) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |\lambda_{Q_i}|}{d\nu} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu. \quad (7.2)$$

¹Eine „gut konditionierte“ Frequenzgangmatrix $Q(j\omega)$ ($\kappa[Q] \approx 1$) stellt in manchen Anwendungsfällen ein erklärtes Ziel des Reglerentwurfs dar. Hierdurch erhält man ein von der Richtung vektorieller Störgrößen und vektoriellen Meßrauschens näherungsweise unabhängiges Regelkreisverhalten. Dies ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn sich die quantitativen Anforderungen und – falls eine strukturierte Beschreibung der Modellunsicherheit vorliegt – die „Größe“ der Modellfehler in verschiedenen „Kanälen“ des mehrschleifigen Regelkreises ähneln.

Beweis: Die Determinante einer quadratischen Matrix mit reell-rationalen Elementen in s ist wiederum eine reell-rationale Funktion in s . Liegen alle Pole und Nullstellen einer Übertragungsmatrix links der imaginären Achse, so gilt dies auch für die Wurzeln von Zähler- und Nennerpolynom ihrer Determinanten. Wir können deshalb auf

$$\det\{Q(s)\} = \prod_{i=1}^p \lambda_{Q_i}(s)$$

die skalare Amplituden-Phasen-Beziehung anwenden und erhalten (7.2). \square

ω_{c_i} sei die (einzige) Durchtrittsfrequenz von $\lambda_{Q_i}(j\omega)$ (i.e. $|\lambda_{Q_i}(j\omega_{c_i})| = 1$ und $|\lambda_{Q_i}(j\omega)| < 1$ bzw. > 1 für $\omega > \omega_{c_i}$ bzw. $< \omega_{c_i}$). Dann folgt aus dem verallgemeinerten Nyquist-Kriterium (Satz 5.3) die Forderung

$$\sum_{i=1}^p (\angle \lambda_{Q_i}(j\omega_{c_i}) - \angle \lambda_{Q_i}(0)) \stackrel{!}{>} -p\pi. \quad (7.3)$$

Nehmen wir an, $Q(j\omega)$ sei in der Umgebung der Durchtrittsfrequenzen ω_{c_i} „gut“ konditioniert. Dort gelte also $\sigma[Q] \approx |\lambda_{Q_i}| \approx \bar{\sigma}[Q]$; $i = 1 \dots p$, und damit $\omega_{c_1} \approx \dots \approx \omega_{c_p}$. Kontinuitätseigenschaften für Singulärwerte und Eigenwerte von Frequenzgangmatrizen bewirken in diesem Frequenzbereich außerdem:

$$\frac{d \ln \sigma_k[Q]}{d\nu} \approx \frac{d \ln |\lambda_{Q_i}|}{d\nu}, \quad i, k = 1, \dots, p.$$

Wir können in diesem Fall offenbar die Faustregel für Eingrößensysteme übernehmen und feststellen, daß der Regelkreis instabil wird, wenn die Singulärwerte von $Q(j\omega)$ in der Nähe der Durchtrittsfrequenz schneller als 40 dB pro Dekade abfallen.

Obige Ausführungen beziehen sich ausschließlich auf Systeme, deren Übertragungspole und -nullstellen sämtlich links der imaginären Achse liegen. Nullstellen in der rechten Halbebene verschärfen das Problem. Dies ist einfach zu sehen, wenn wir Q in einen minimalphasigen Anteil Q_m und einen verlustfreien Anteil Q_v aufspalten (vgl. Abschnitt 3.3):

$$Q(s) = Q_v(s)Q_m(s).$$

Der verlustfreie Anteil läßt die Singulärwerte der Matrix $Q(j\omega)$ unverändert:

$$\begin{aligned} \sigma_i[Q(j\omega)] &= \sqrt{\lambda_i[Q(j\omega)^*Q(j\omega)]} \\ &= \sqrt{\lambda_i[Q_m(j\omega)^* \underbrace{Q_v(j\omega)^*Q_v(j\omega)}_{=I_p} Q_m(j\omega)]} \\ &= \sigma_i[Q_m(j\omega)]; \end{aligned}$$

er bewirkt aber eine zusätzliche Phasenabsenkung ihrer Determinante:

$$\begin{aligned}\det Q(s) &= \det Q_v(s) \det Q_m(s) \\ &= \frac{z_{P_v}(s)}{p_{P_v}(s)} \det Q_m(s).\end{aligned}$$

Man beachte, daß das Polpolynom $p_{P_v}(s)$ einer quadratischen verlustfreien Übertragungsmatrix (alle Wurzeln liegen links der imaginären Achse) und ihr Nullstellenpolynom $z_{P_v}(s)$ (alle Wurzeln liegen rechts der imaginären Achse) ein koprimales Paar bilden und deswegen beim Übergang zur Determinante keine Kürzungen auftreten können.

Auch die Existenz instabiler Pole kann die durch (7.2) formulierte Einschränkung nicht abmildern. Das durch instabile Pole verursachte Anheben der Phase von $\det\{Q(j\omega)\}$ wird durch die zur Stabilisierung des Regelkreises erforderliche zusätzliche Phasendrehung „aufgebraucht“ (vgl. Satz 5.3).

Zusammenfassend können wir feststellen: Das Verallgemeinern der Bodeschen Amplituden-Phasen-Beziehung zeigt, daß auch im Mehrgrößenfall der Übergang vom Frequenzbereich Ω_{rd} (gutes Führungs- und Störverhalten) zum Bereich Ω_η (weitgehende Unterdrückung von Meßrauschen) nicht beliebig schnell erfolgen kann, daß also ein „Mindestabstand“ zwischen beiden Frequenzbereichen zu wahren ist.

7.2.2 Wasserbett-Effekt

Besitzt $Q(s)$ mindestens eine Nullstelle rechts der imaginären Achse, so bewirkt eine in einem Frequenzbereich Ω_{rd} sehr kleine Sensitivitätsmatrix ein Anwachsen von $\bar{\sigma}[S(j\omega)]$ außerhalb dieses Frequenzbereichs. Dieses Phänomen wird als *Wasserbett-Effekt* bezeichnet.

Satz 7.2 (Wasserbett-Effekt)

$Q(s)$ besitze mindestens eine Nullstelle rechts der imaginären Achse; der geschlossene Regelkreis sei asymptotisch stabil. Dann existiert eine positive reelle Zahl a , so daß die Sensitivitätsmatrix für jeden stabilisierenden Regler folgender Beziehung genügt:

$$\left(\sup_{\omega} \bar{\sigma}[S(j\omega)]\right)^a \geq \frac{1}{\sup_{\omega \in \Omega_{rd}} \bar{\sigma}[S(j\omega)]}. \quad (7.4)$$

Beweis: s. [26].

Beispiel: Bild 7.2 zeigt den Verlauf von $|S(j\omega)|$ für

$$Q(s) = Q_1(s) = 0.4 \frac{s-1}{(s+1)(\frac{s}{10}+1)}$$

und

$$Q(s) = Q_2(s) = 0.8 \frac{s-1}{(s+1)(\frac{s}{10}+1)}.$$

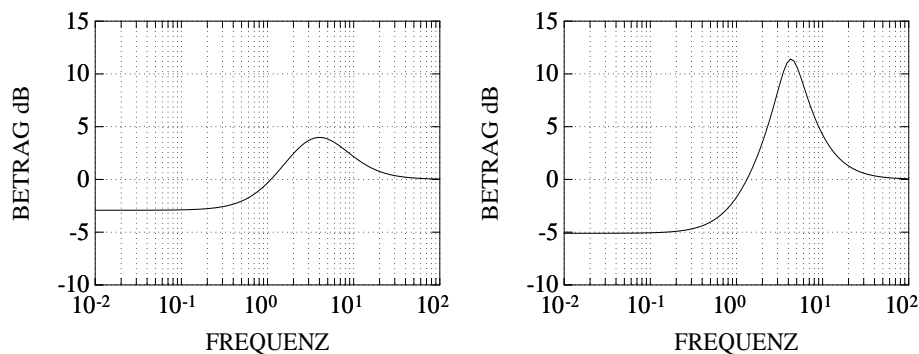


Bild 7.2: Der Wasserbett-Effekt: $|S(j\omega)|$ für $Q = Q_1$ (links) und $Q = Q_2$ (rechts).

7.2.3 Sensitivitätsintegral

Selbst bei minimalphasigen Systemen ist es oft nicht möglich, im gesamten Frequenzbereich $\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq 1$ zu erreichen. Dies wird an folgendem Beispiel klar:

Beispiel: Wir betrachten ein asymptotisch stabiles Eingrößensystem Q mit einem Pol-Nullstellenüberschuß von 2:

$$Q(s) = 4 \frac{1}{(s+1)(\frac{s}{4}+1)}.$$

Die linke Hälfte von Bild 7.3 zeigt die Nyquist-Ortskurve von $Q(s)$ und den Ausschnitt eines Kreises um den kritischen Punkt mit Radius 1. Offenbar gilt innerhalb dieses Kreises $|1+Q| < 1$ und damit – wie auf der rechten Seite abgebildet – $|S| = |1+Q|^{-1} > 1$.

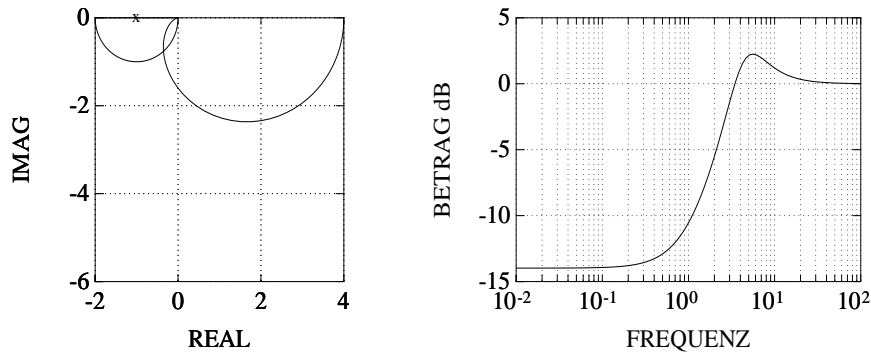


Bild 7.3: Beispiel für Sensitivitätsüberhöhung: Nyquist-Ortskurve des offenen Kreises (links) und Amplitudengang der zugehörigen Sensitivitätsfunktion (rechts).

Diese Aussage wurde von *Bode* [5] formalisiert und von *Freudenberg* und *Looze* [30] auf Mehrgrößensysteme übertragen:

Satz 7.3 (Sensitivitätsintegral für Mehrgrößensysteme) _____

Jedes Element der $p \times p$ -Übertragungsmatrix $Q(s)$ weise einen Pol-Nullstellenüberschuß von mindestens 2 auf. $Q(s)$ besitze m_Q Pole p_i , $i = 1, \dots, m_Q$, rechts der imaginären Achse (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt). Wenn der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist, gilt:

$$\sum_{i=1}^p \int_0^{\infty} \lg \sigma_i[S(j\omega)] d\omega = \pi (\lg e) \sum_{i=1}^{m_Q} \operatorname{Re}[p_i] \geq 0. \quad (7.5)$$

Beweis: s. [30].

Aus (7.5) folgt unmittelbar:

$$\int_0^{\infty} \lg \bar{\sigma}[S(j\omega)] d\omega \geq \frac{\pi}{p} (\lg e) \sum_{i=1}^{m_Q} \operatorname{Re}[p_i] \geq 0. \quad (7.6)$$

Der negative Integralanteil (Abschwächung von Störungen, „Nutzen der Rückführung“) wird offenbar durch den positiven Anteil (Verstärkung von Störungen, „Kosten der Rückführung“) aufgewogen oder gar übertroffen. Instabile

Pole (besonders von der imaginären Achse weit entfernte) erhöhen die „Kosten“. In diesem Fall wird – salopp formuliert – ein „Teil der Rückführung“ für die Stabilisierung des Regelkreises „aufgebraucht“ und steht nicht mehr zur Unterdrückung von Störungen zur Verfügung (vgl. [30]).

Zur Illustration von (7.6) können wir wiederum das vorangehende Beispiel heranziehen:

Beispiel: Wir betrachten nochmals die Übertragungsfunktion

$$Q(s) = 4 \frac{1}{(s+1)\left(\frac{s}{4}+1\right)}.$$

Bild 7.4 zeigt den Verlauf des (logarithmisch aufgetragenen) Betrags der Sensitivitätsfunktion über der (linearen) Frequenzachse.

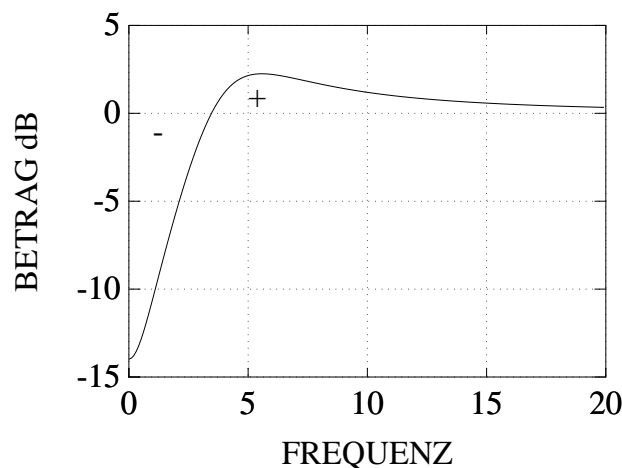


Bild 7.4: Betrag der Sensitivitätsfunktion, lineare Frequenzachse.

(7.6) kann man überdies entnehmen, warum ein Wasserbett-ähnlicher Effekt auch dann auftreten kann, wenn keine Nullstellen in der rechten Halbebene vorliegen: Die in diesem Abschnitt getroffene Annahme eines Pol-Nullstellen-Überschusses von mindestens 2 garantiert, daß $\bar{\sigma}[Q]$ für große Frequenzen mit mindestens 40 dB pro Dekade abfällt. Beschränken wir die Verstärkung des Systems, so existiert offenbar eine positive reelle Zahl a und eine Frequenz $\omega_1 > a$, so daß gilt:

$$\bar{\sigma}[Q(j\omega)] \leq \frac{a}{\omega^2} < 1, \quad \omega > \omega_1. \quad (7.7)$$

Deshalb:

$$\begin{aligned}
 \int_{\omega_1}^{\infty} \lg \bar{\sigma}[S(j\omega)] d\omega &= \int_{\omega_1}^{\infty} \lg \frac{1}{\underline{\sigma}[I_p + Q(j\omega)]} d\omega \\
 &\leq \int_{\omega_1}^{\infty} \lg \frac{1}{1 - \bar{\sigma}[Q(j\omega)]} d\omega \\
 &\leq \int_{\omega_1}^{\infty} \lg \frac{1}{1 - \frac{a}{\omega^2}} d\omega \\
 &= -(\lg e) \int_{\omega_1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{a}{\omega^2}\right) d\omega \\
 &= (\lg e) \int_{\omega_1}^{\infty} \left(\frac{a}{\omega^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{\omega^2}\right)^3 + \dots \right) d\omega \\
 &= (\lg e) \left(\frac{a}{\omega_1} + \frac{1}{6} \left(\frac{a^2}{\omega_1^3}\right) + \frac{1}{15} \left(\frac{a^3}{\omega_1^5}\right) + \dots \right) \\
 &:= b(a, \omega_1) < \infty.
 \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, daß ab einer bestimmten Frequenz ω_1 der Integralanteil unter der Kurve von $\lg \bar{\sigma}[S(j\omega)]$ endlich ist. Eine obere Schranke b dieses Anteils hängt nur von der „Bandbreiten-Bedingung“ (7.7) ab. Machen wir $\lg \bar{\sigma}[S(j\omega)]$ also im Frequenzbereich $\Omega_{rd} = [0, \omega_{rd}]$ mit $\omega_{rd} < \omega_1$ sehr klein (geht der negative Integralanteil in diesem Bereich gegen $-\infty$), so muß der positive Integralanteil im Intervall (ω_{rd}, ω_1) sehr groß werden: Wir erhalten in diesem Bereich ein dem Wasserbett-Effekt ähnliches „Aufwölben“ von $\lg \bar{\sigma}[S(j\omega)]$.

7.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel kamen Einschränkungen des erreichbaren Regelkreisverhaltens zur Sprache. Neben der algebraischen Einschränkung (7.1), die für jede Frequenz ein Abwägen zwischen „kleinem“ S und „kleinem“ T impliziert, sind analytische Einschränkungen zu beachten. Letztere verknüpfen Eigenschaften des Regelkreises in verschiedenen Frequenzbereichen. Beispiele sind die Bode'sche Amplituden-Phasen-Beziehung, der Wasserbett-Effekt und die unter der Bezeichnung „Sensitivitätsintegral“ bekannte Beziehung (7.5).

7.4 Literaturhinweise

Die Beziehung zwischen Phase und Amplitudenabfall eines linearen zeitinvarianten Übertragungssystems wurde im Eingrößenfall von *Bode* [5] angegeben.

Ein Beweis findet sich auch in dem kürzlich erschienenen Lehrbuch von *Doyle et al.* [19]. Die Verallgemeinerung auf Mehrgrößensysteme stammt von *Doyle* und *Stein* [21], die in Satz 7.2 wiedergegebene Formulierung des Wasserbett-Effekts von *Francis* [26]. Ein Beweis für Satz 7.3 wird von *Freudenberg* und *Looze* [30] geführt. Die Begründung eines Wasserbett-ähnlichen Effekts bei minimalphasigen Systemen mit Pol-Nullstellen-Überschuß von mindestens 2 folgt dem in [19] für den Eingrößenfall dargelegten Argument.

Weitere Informationen zu diesem Themenkreis findet man u.a. bei *O'Young* und *Francis* [85], *Freudenberg* und *Looze* [30] und *Engell* [24].

„Is a zebra a white animal with black stripes,
or a black animal with white stripes?“
– in P. Greenaway’s „A Zed and Two
Naughts“

III Entwurfsverfahren

Kapitel 8

Einordnung von Entwurfsverfahren

Der Entwurf eines Reglers stellt im wesentlichen die Umsetzung vorgegebener Ziele in einen Regelalgorithmus dar. Regelungstechnische Ziele können – wie in Kapitel 5 und 6 ausgeführt – mittels der Frequenzgangmatrix $Q(j\omega)$ des offenen Kreises oder anhand von dem geschlossenen Kreis zugeordneten Frequenzgangmatrizen (Sensitivitätsmatrix S , komplementäre Sensitivitätsmatrix T) formuliert werden. Der Entwurfsvorgang kann deshalb als geeignetes Manipulieren des offenen („open loop shaping“) oder des geschlossenen Kreises („closed loop shaping“) interpretiert werden. Mit etwas gutem Willen kann man alle bekannten Mehrgrößen-Frequenzbereichsverfahren einer der beiden Entwurfsklassen zuordnen. Die folgende Tabelle zeigt eine solche Klassifikation.

open loop shaping	closed loop shaping
Direct Nyquist Array (DNA) Entwurf	H_∞ - $S/KS/T$ -Entwurf
Inverse Nyquist Array (INA) Entwurf	H_2 - $S/KS/T$ -Entwurf
Characteristic Locus (CL) Entwurf	μ -Synthese
Reversed Frame Normalizing (RFN) Entwurf	
H_∞ -NLKF-Entwurf	

Die von *Rosenbrock*, *MacFarlane* und Mitarbeitern in Manchester und Cambridge entwickelten DNA, INA, CL und RFN Methoden werden oft als die „Britische Schule“ des Mehrgrößen-Entwurfs bezeichnet. Gemeinsames Kennzeichen ist die Reduzierung des Mehrgrößen-Problems auf eine Reihe von Eingrößen-Problemen, die dann mit Hilfe der klassischen Entwurfsverfahren angegangen werden können. Diese Methoden werden deshalb auch unter dem Oberbegriff „Quasi-klassische Verfahren“ zusammengefaßt. Dieser Kategorie

ist auch die von *Horowitz* propagierte *Quantitative Feedback Design Theory* (QFT) zuzuordnen. QFT wird in diesem Buch aus Mangel an praktischer Entwurfserfahrung (meinerseits) nicht behandelt.

Die anderen in obiger Tabelle aufgeführten Verfahren bilden regelungstechnische Ziele auf eine Norm (oder eine „Norm-ähnliche“ skalare Größe) ab, die dann über alle den nominellen Kreis stabilisierenden Regler-Übertragungsmatrizen minimiert wird. H_2 -Probleme entsprechen mathematisch den aus der Zustandstheorie bekannten LQG-Verfahren und lassen sich deshalb leicht lösen. H_∞ -Verfahren gehen hauptsächlich auf Arbeiten von *Zames*, *Francis*, *Doyle* und *Glover* zurück, μ -Synthese wurde (und wird) von *Doyle* und Mitarbeitern entwickelt.

Manchen Leserinnen und Lesern wird der folgende Teil als weniger „präzise“ erscheinen als vorangehende Abschnitte. Die Schuld hierfür liegt allerdings nicht vollständig beim Autor: Nicht von ungefähr bezeichnet man die Analyse von Regelsystemen oft als „Wissenschaft“, den Entwurf dagegen als „Kunst“.

Kapitel 9

Quasi-Klassische Verfahren

9.1 Das Direct Nyquist Array (DNA) Verfahren

Diese von *Rosenbrock* initiierte Methode kann als „Urahn“ aller Mehrgrößen-Frequenzbereichsverfahren gelten. Rosenbrocks Idee bestand darin, Kriterien zu suchen, die eine Reduktion des Mehrgrößenproblems auf eine Reihe unabhängiger skalarer Probleme erlauben. Ein solches Kriterium bildet die *Diagonaldominanz* der Rückführdifferenzenmatrix $I_p + Q$.

9.1.1 Diagonaldominanz und verallgemeinerte Diagonaldominanz

Definition 9.1 (Diagonaldominanz)

Eine komplexwertige $p \times p$ -Matrix A heißt zeilendiagonaldominant, wenn gilt

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, p.$$

Die Matrix A heißt spaltendiagonaldominant, wenn gilt

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, p.$$

Die Matrix A heißt diagonaldominant, wenn sie zeilen- oder spaltendiagonaldominant ist.

Alle Eigenwerte einer diagonaldominanten Matrix sind von Null verschieden. Dies folgt unmittelbar aus dem *Gershgorin-Theorem*:

Satz 9.1 (Gershgorin-Theorem) _____

A sei eine komplexwertige $p \times p$ -Matrix. Jeder Eigenwert von A liegt in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$|s - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, p.$$

Jeder Eigenwert von A ist außerdem in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$|s - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, p,$$

enthalten. _____

Beweis: s. [101].

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Man kann leicht nachprüfen, daß A sowohl zeilen- als auch spalten-diagonaldominant ist: In Bild 9.1 sind Kreise mit Mittelpunkt a_{ii} , $i = 1, 2, 3$, und Radien

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 |a_{ij}| \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 |a_{ji}|, \quad i = 1, 2, 3,$$

aufgetragen. Man bezeichnet sie als *Zeilen-* bzw. *Spalten-Gershgorin-Kreise*. Weder Zeilen- noch Spalten-Gershgorin-Kreise schließen den Ursprung ein. Das Gershgorin-Theorem garantiert deswegen, daß alle Eigenwerte von Null verschieden sind, die Matrix A also nichtsingulär ist.

Die Abschätzung der Eigenwerte durch Gershgorin-Kreise erweist sich allerdings in vielen Fällen als sehr konservativ.

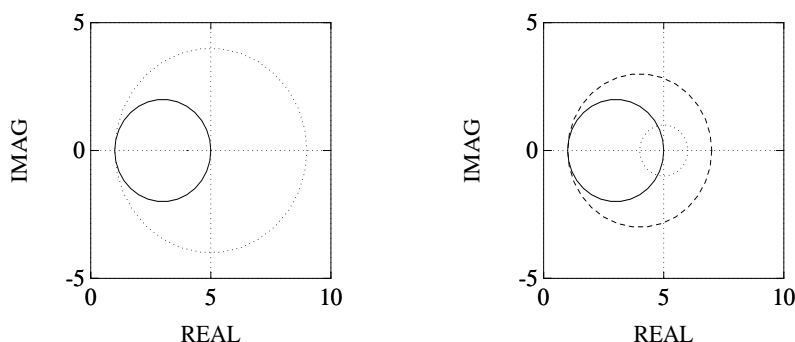


Bild 9.1: Zeilen-Gershgorin-Kreise (links) und Spalten-Gershgorin-Kreise (rechts) der Matrix A .

Beispiel: Für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ 10^{-12} & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt sich als „Abschätzungsgebiet“ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt 1 und Radius 10^6 . Man kann aber (ohne Rechnung) leicht erkennen, daß beide Eigenwerte der Matrix A „dicht“ bei 1 liegen müssen (A ist „nahezu“ dreiecksförmig, Eigenwerte und Diagonalelemente müssen deswegen „fast“ übereinstimmen).

Durch Ähnlichkeitstransformation mittels diagonalen Matrizen ändern sich weder Eigenwerte noch Diagonalelemente einer Matrix, wohl aber die Elemente außerhalb der Diagonalen und damit die Radien der Gershgorin-Kreise. Es liegt deshalb nahe, über eine solche Skalierung von Matrizen das Konzept einer *verallgemeinerten Diagonaldominanz* einzuführen und die Abschätzung der Eigenwerte zu verbessern.

Definition 9.2 (Verallgemeinerte Diagonaldominanz)_____

Eine quadratische komplexwertige Matrix heißt *verallgemeinert diagonaldominant*, wenn eine diagonale Matrix R mit positiven reellen Elementen¹ existiert, so daß

$$A' = RAR^{-1}$$

spalten- oder zeilendiagonaldominant ist. _____

Diese Eigenschaft kann auf bequeme Art und Weise überprüft werden:

¹es genügt, sich auf Diagonalmatrizen mit positiven reellen Elementen zu beschränken: Bei Verwendung von Diagonalmatrizen mit komplexen oder negativ reellen Elementen würden ohnehin nur die Betragsanteile in die Radien der Gershgorin-Kreise der transformierten Matrix A' eingehen.

Satz 9.2 (Kriterium für verallgemeinerte Diagonaldominanz)_____

A sei eine komplexwertige nichtreduzierbare² $p \times p$ -Matrix. A ist genau dann verallgemeinert diagonaldominant, wenn für den Perron-Frobenius-Eigenwert der „Vergleichsmatrix“

$$C_V(A) := \begin{pmatrix} 0 & \frac{|a_{12}|}{|a_{22}|} & \cdots & \frac{|a_{1p}|}{|a_{pp}|} \\ \frac{|a_{21}|}{|a_{11}|} & 0 & \cdots & \frac{|a_{2p}|}{|a_{pp}|} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{|a_{p1}|}{|a_{11}|} & \frac{|a_{p2}|}{|a_{22}|} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\lambda_{PF}[C_V(A)] < 1.$$

Beweis: s. [75], [58].

Anmerkung: Die Vergleichsmatrix ändert sich offenbar nicht, wenn wir die Matrix A von rechts mit einer nichtsingulären Diagonalmatrix multiplizieren. Die Eigenschaft der verallgemeinerten Diagonaldominanz ist demzufolge invariant bezüglich einer solchen Rechtsmultiplikation.

Aus Gershgorin-Theorem, Definition und Test von verallgemeinerter Diagonaldominanz läßt sich eine verbesserte Abschätzung für die Eigenwerte einer Matrix ableiten:

Satz 9.3 (Verallgemeinertes Gershgorin-Theorem)_____

A sei eine komplexwertige nichtreduzierbare $p \times p$ -Matrix. Sämtliche Eigenwerte der Matrix A liegen in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$|s - a_{ii}| \leq |a_{ii}| \lambda_{PF}[C_V(A)].$$

Kreise mit Mittelpunkt a_{ii} und Radius $|a_{ii}| \lambda_{PF}[C_V(A)]$, $i = 1, \dots, p$, werden *verallgemeinerte Gershgorin-Kreise* genannt. Um die mögliche Verbesserung der Eigenwert-Abschätzung durch solche verallgemeinerten Gershgorin-Kreise zu illustrieren, kehren wir nochmals zum vorigen Beispiel zurück:

²zur Definition einer nichtreduzierbaren Matrix s. Abschnitt 6.2.2.1.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10^6 \\ 10^{-12} & 1 \end{bmatrix}.$$

Die „Vergleichsmatrix“ $C_V(A)$ und ihr Perron-Frobenius-Eigenwert ergeben sich zu:

$$C_V(A) = \begin{bmatrix} 0 & 10^6 \\ 10^{-12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{PF}[C_V(A)] = 10^{-3}.$$

Sämtliche Eigenwerte der Matrix A liegen also auf oder innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt 1 und Radius 10^{-3} .

9.1.2 Entwurfsprinzip

Nun wenden wir das Konzept der verallgemeinerten Diagonaldominanz auf regelungstechnische Sachverhalte an. Ist die Rückführdifferenzenmatrix $I_p + Q(s)$ verallgemeinert diagonal dominant für alle $s \in \mathcal{N}_1$, so können wir das verallgemeinerte Nyquist-Kriterium (Satz 5.3) auf eine Betrachtung der Diagonalelemente von $I_p + Q$ bzw. Q reduzieren: Sämtliche Eigenwerte der Matrix $I_p + Q$ liegen innerhalb verallgemeinerter Gershgorin-Kreise um die Diagonalelemente. Da keiner dieser Kreise den Ursprung einschließt, besitzen die Ortskurven der Eigenwerte dieselbe Phasendrehung wie die Ortskurven der Diagonalelemente. Nominelle Stabilität kann deshalb anhand der Diagonalelemente beurteilt werden:

Satz 9.4 (Stabilität bei verallgemeinert diagonal dominanter Rückführdifferenzenmatrix) _____

$I_p + Q(s)$ sei verallgemeinert diagonal dominant für alle $s \in \mathcal{N}_1$. Unter dieser Voraussetzung gilt: Der Regelkreis (G, K) ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Summe der Phasendrehungen aller Diagonalelemente von $Q(s)$ bezüglich des kritischen Punktes $\pi(m_K + m_G)$ beträgt. s soll hierbei die Nyquist-Kontur \mathcal{N}_1 in der in Bild 5.2 gezeigten Richtung durchlaufen, m_G und m_K bezeichnen die Anzahl der Pole von G bzw. K rechts von \mathcal{N}_1 . _____

Beweis: folgt unmittelbar aus Satz 5.3 und Satz 9.3.

Die Überprüfung der verallgemeinerten Diagonaldominanz von $I_p + Q$ erfolgt üblicherweise auf graphischem Wege: Man überlagert den Ortskurven der Diagonalelemente $q_{ii}(s)$ für alle $s \in \mathcal{N}_1$ Kreise mit Mittelpunkt $q_{ii}(s)$ und Radius

$$r_i(s) := |q_{ii}(s)| \lambda_{PF}[C_V(Q(s))]. \quad (9.1)$$

Überdecken die aus diesen Kreisscheiben gebildeten (nominellen) *verallgemeinerten Gershgorin-Bänder* der Matrix Q den kritischen Punkt $(-1, 0)$ nicht, so ist verallgemeinerte Diagonaldominanz der Rückführdifferenzenmatrix für alle $s \in \mathcal{N}_1$ gewährleistet. Die Richtigkeit dieser Aussage erkennt man aus der folgenden Argumentationskette, die sich auf Eigenschaft (6.34) des Perron-Frobenius-Eigenwerts stützt:

$$\begin{aligned}
 & I_p + Q \dots \text{verallgemeinert diagonal dominant} \\
 & \iff \lambda_{PF}[C_V(I_p + Q)] < 1 \\
 & \iff \lambda_{PF} \left[\underbrace{C_V(I_p + Q)}_{C_V(Q)} \text{diag} \left\{ \frac{|1 + q_{ii}|}{|q_{ii}|} \right\} \right] < \frac{|1 + q_{ii}|}{|q_{ii}|}, \quad i = 1, \dots, p \\
 & \iff |q_{ii}| \lambda_{PF}[C_V(Q)] < |1 + q_{ii}|, \quad i = 1, \dots, p.
 \end{aligned}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß sich Radien r_i und Mittelpunkte q_{ii} der verallgemeinerten Gershgorin-Kreise um denselben Faktor ändern, wenn wir Q von rechts mit einer nichtsingulären Diagonalmatrix multiplizieren – die Vergleichsmatrix $C_V(Q)$ und damit auch ihr Perron-Frobenius-Eigenwert sind invariant bezüglich einer solchen Rechtsmultiplikation. Die „relative Breite“ der Gershgorin-Bänder (i.e. der frequenzabhängige Quotient aus Radius und Betrag des Mittelpunkts) bleibt also konstant.

Überdecken die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder den kritischen Punkt nicht, so kann man also die *tatsächliche* Phasendrehung der λ_{Q_i} anhand der Ortskurven der Diagonalelemente q_{ii} beurteilen. Gilt zusätzlich

$$\sum_{i=1}^p m_{q_{ii}} = m_G + m_K, \quad (9.2)$$

treten also alle auf oder rechts der imaginären Achse liegenden Strecken- oder Reglerpole in den Diagonalelementen von Q auf, so läßt sich zusätzlich die *geforderte* Phasendrehung aus den q_{ii} ablesen; für Stabilitätsuntersuchungen können dann die außerhalb der Diagonalen stehenden Elemente völlig vernachlässigt werden.

Beispiel: Wir wenden uns (zum wiederholten Male) dem einführenden Beispiel von Seite 32 zu:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{4}{s+8} \\ \frac{0.5}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Bild 9.2 zeigt das Nyquist array von G (d.h. die Nyquist-Ortskurven aller Elemente der Frequenzgangmatrix $G(j\omega)$); den Ortskurven der Diagonalelemente wurden zusätzlich die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von $G(j\omega)$ überlagert.

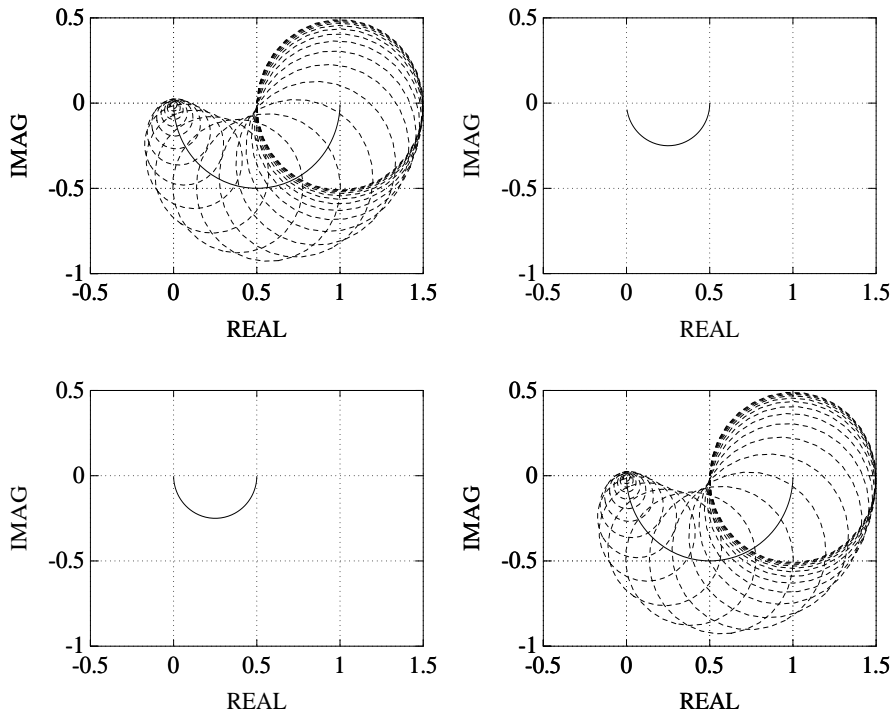


Bild 9.2: Nyquist array und verallgemeinerte Gershgorin-Bänder von $G(s)$.

Offenbar überdecken die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder den kritischen Punkt $(-1, 0)$ nicht. Wählen wir als Reglermatrix $K = I_2$ (und damit $Q = G$), so ist die Rückführdifferenzenmatrix $I_2 + Q(s)$ also verallgemeinert diagonaldominant. Da weder G noch K Pole in der rechten Halbebene besitzen, folgt aus Satz 9.4 asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Nun betrachten wir eine Vergrößerung der Ortskurven und der verallgemeinerten Ortskurven und der verallgemeinerten Gershgorin-Bänder in der Nähe des Ursprungs (Bild 9.3). Es ist leicht zu sehen, daß wir als Regler auch $K = 10I_2$ wählen (i.e. die Mittelpunkte und Radien der gezeigten Kreise mit 10 multiplizieren) können, ohne die Stabilität des Regelkreises zu gefährden. Vergrößern wir die Verstärkungsfaktoren dagegen weiter und setzen $K = 20I_2$, so überdecken die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder den kritischen Punkt, und Stabilität ist nicht mehr gewährleistet. In diesem Fall ermöglicht Satz 9.4 keine Aussage mehr, da die genannte Voraussetzung (verallgemeinerte Diagonalmi-

nanz der Rückfuhrdifferenzenmatrix) nicht mehr zutrifft. Um zu zeigen, daß tatsächlich Instabilität eintritt, können wir z.B. die frequenzabhängigen Eigenwerte $\lambda_{Q_i}(j\omega)$ berechnen und das verallgemeinerte Nyquist-Kriterium anwenden oder einfach die Pole des geschlossenen Kreises bestimmen.

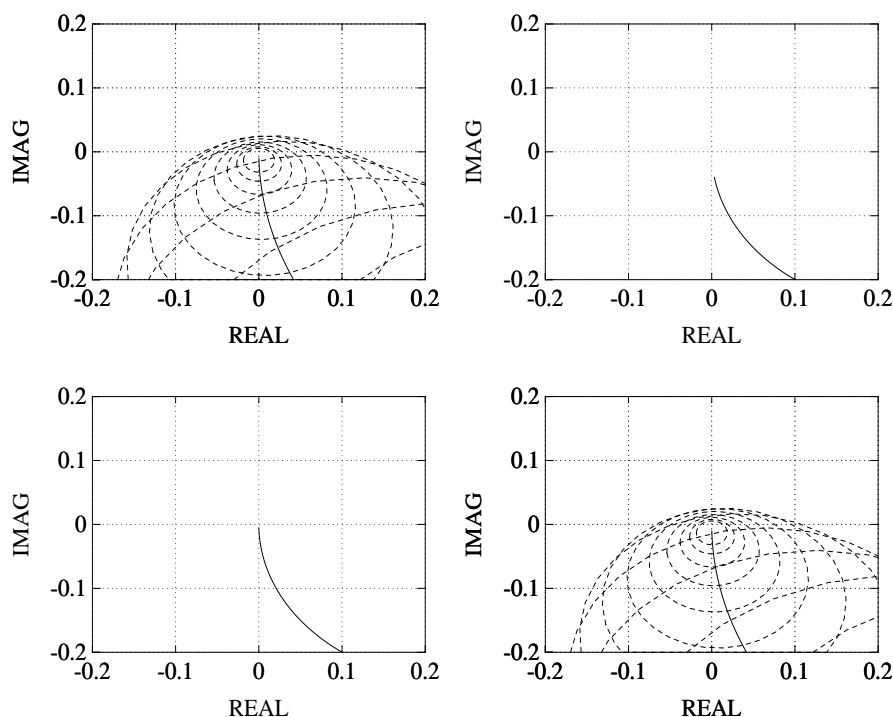


Bild 9.3: Nyquist array und verallgemeinerte Gershgorin-Bänder von $G(s)$ in der Nähe des Ursprungs.

Der eigentliche Entwurfsvorgang vollzieht sich in zwei Schritten:

1. Für quadratische Streckenmodelle überprüft man zuerst, ob der Mehrgrößenentwurf von vornherein durch den Entwurf skalarer Regler $k_i(s)$ für die Diagonalelemente $g_{ii}(s)$ ersetzt werden kann. Aus der vorangehenden Diskussion wissen wir, daß hierzu zwei Bedingungen erfüllt sein müssen:
 - (a) die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder des Streckenmodells G müssen so schmal sein, daß wir (ohne den kritischen Punkt zu überdecken) die Verstärkungsfaktoren der $k_i(s)$ weit genug erhöhen können, um alle angestrebten quantitativen Anforderungen zu verwirklichen.

- (b) $m_G = \sum_{i=1}^p m_{g_{ii}}$. Wenn zwischen g_{ii} und k_i keine Pol-Nullstellen-Kürzungen in der rechten Halbebene auftreten, ist dies äquivalent zu (9.2).

Liegen diese Voraussetzungen vor, gehen wir direkt zu Schritt 2 über. In diesem Fall erhalten wir eine diagonale Regler-Übertragungsmatrix – man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem *dezentralen* Mehrgrößen-Regler. Andernfalls bestimmt man eine Kompensationsmatrix $K_c(s)$, so daß die genannten Bedingungen für das kompensierte Streckenmodell

$$G' := GK_c \quad (9.3)$$

erfüllt werden. Diesen Schritt werden wir in Abschnitt 9.1.5 behandeln. An dieser Stelle sei lediglich vermerkt, daß wir in aller Regel eine möglichst einfache Kompensationsmatrix anstreben: Dies hat zwei wichtige Vorteile:

- Eine einfache Kompensationsmatrix führt auf einen Regler mit einfacher Struktur und Dynamik – in vielen Anwendungsfällen ein wichtiges Kriterium, weil z.B. ein möglichst „durchsichtiges“ Reglerverhalten gewünscht wird.
- Durch Beschränkung auf einfache Kompensationsmatrizen vermeidet man Probleme, die durch (näherungsweise) Kürzen der Streckendynamik verursacht werden.

In vielen Fällen genügt eine konstante Kompensationsmatrix und manchmal benötigt man sogar nur eine einfache Umordnung der Spalten von G (i.e. eine andere Zuordnung von Stell- und Regelgrößen).

2. Im zweiten Schritt können wir die außerhalb der Diagonalen stehenden Elemente $g'_{ij}(s)$, $i \neq j$, vernachlässigen und skalare Regler $k_i(s)$ für die Diagonalelemente $g'_{ii}(s)$ entwerfen. Die isoliert betrachteten skalaren Regelkreise (g'_{ii}, k_i) bezeichnen wir als *Hauptregelkreise*. Die $k_i(s)$ müssen so ausgelegt werden, daß

- (a) die Hauptregelkreise (g'_{ii}, k_i) asymptotisch stabil sind,
- (b) die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von $Q = G' \text{diag}\{k_i\}$ den kritischen Punkt nicht überdecken, nominelle Stabilität des Mehrgrößen-Regelkreises durch die beim Entwurf vernachlässigten Modellelemente g'_{ij} , $i \neq j$, also nicht gefährdet wird,
- (c) Robustheit der Stabilität des Mehrgrößen-Regelkreises gegenüber (additiven strukturierten) Modellfehlern gewährleistet ist und
- (d) die Hauptregelkreise gewünschtes Ein-/Ausgangsverhalten zeigen.

Als „Gesamt“-Regler-Übertragungsmatrix erhalten wir dann das Produkt

$$K(s) := K_c(s) \underbrace{\text{diag}\{k_i(s)\}}_{:=K_d(s)}. \quad (9.4)$$

Den Entwurf geeigneter Kompensationsmatrizen K_c verschieben wir auf Abschnitt 9.1.5. Im Augenblick wollen wir annehmen, wir hätten ein solches K_c gefunden. Wie lassen sich dann die in 2.(a) - (d) genannten Entwurfsziele erreichen? 2.(a) besteht aus einer Reihe skalarer Entwurfsaufgaben, die mit Hilfe des klassischen (Eingrößen-) Nyquist-Verfahrens angegangen werden können. Ein geeignetes Manipulieren der verallgemeinerten Gershgorin-Bänder (Schritt 2.(b)) bereitet ebenfalls keine Probleme, da die „relative Breite“ der Bänder (i.e. der frequenzabhängige Quotient aus Radius und Betrag des Mittelpunkts) durch die zu entwerfende Diagonalmatrix $K_d = \text{diag}\{k_i\}$ nicht beeinflusst wird:

$$\frac{r_i}{|q_{ii}|} = \lambda_{PF}[C_V(\underbrace{G'K_d}_Q)] = \lambda_{PF}[C_V(G')].$$

Anschaulich gesprochen „verbiegt“ $k_i(s)$ das i -te verallgemeinerte Gershgorin-Band ohne es „aufzublähen“ oder ihm „die Luft abzulassen“. Schritt 2.(c) und 2.(d) erweisen sich als etwas aufwendiger:

9.1.3 Robuste Stabilität mit dem DNA-Verfahren

Bevor wir uns der Frage nach Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ zuwenden, sei angemerkt, daß sich bereits Satz 9.4 als Sonderfall der Robustheitsresultate in Abschnitt 6.2 interpretieren läßt: Wir zerlegen die kompensierte Strecken-Übertragungsmatrix in auf und außerhalb der Diagonalen stehende Elemente

$$G' := \underbrace{\begin{bmatrix} g'_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g'_{pp} \end{bmatrix}}_{G'_d} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & g'_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{p1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{G'_o}, \quad (9.5)$$

deuten G'_d als vereinfachtes Entwurfsmodell, G'_o als (bekannten) Modellfehler und die Diagonalmatrix K_d als zu entwerfenden Regler. Wir nehmen an, G'_d und G' besitzen dieselbe Zahl grenz- und instabiler Pole. Dann gilt $G'_o \in \mathcal{D}_{Ae}$ und Satz 6.6 läßt sich anwenden: (G, K) bzw. (G', K_d) ist asymptotisch stabil, wenn

1. (G'_d, K_d) (und damit jeder isoliert betrachtete skalare Regelkreis (g'_{ii}, k_i)) asymptotisch stabil ist, und

2.

$$\lambda_{PF} \left[|G'_o K_d (I_p + G'_d K_d)^{-1}|_e \right] = \lambda_{PF} \left[\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \left| \frac{g'_{1p} k_p}{1+g'_{pp} k_p} \right| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left| \frac{g'_{p1} k_1}{1+g'_{11} k_1} \right| & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{=C_V(I_p+G'K_d)=C_V(I_p+Q)} \right] < 1.$$

Unter der genannten Bedingung bezüglich der Zahl instabiler Pole von G'_d und G_d stimmt dieses Ergebnis genau mit Satz 9.4 überein.

Beim DNA-Verfahren werden Nicht-Diagonalelemente also wie additive strukturierte Modellfehler behandelt. Deswegen überrascht es nicht weiter, daß diese Entwurfsmethode leicht erweitert werden kann, um asymptotische Stabilität für eine fehlerbehaftete Klasse von kompensierten Strecken-Übertragungsmatrizen $\{G'_r\} = \{G' + \Delta'_{Ae}\}$, $\Delta'_{Ae} \in \mathcal{D}_{Ae}$, zu garantieren. Fehlerschranken L'_{Ae} für Δ'_{Ae} lassen sich aus Schranken L_{Ae} des (unkompensierten) Modellfehlers Δ_{Ae} berechnen:

$$\begin{aligned} |\Delta'_{Ae}(j\omega)|_e &= |\Delta_{Ae}(j\omega)K_c(j\omega)|_e \\ &\leq_e |\Delta_{Ae}(j\omega)|_e |K_c(j\omega)|_e \\ &\leq_e L_{Ae}(\omega) |K_c(j\omega)|_e \\ &:= L'_{Ae}(\omega). \end{aligned}$$

Man sollte sich allerdings vor Augen halten, daß durch diese Abschätzung die betrachtete Fehlerklasse unter Umständen künstlich „aufgebläht“, der entworfene Regler somit unnötig konservativ wird. Dieses Problem stellt sich natürlich nicht, wenn K_c als Einheits- oder Permutationsmatrix gewählt werden kann.

Für unsere Untersuchungen führen wir *robuste verallgemeinerte Gershgorin-Bänder* ein:

Definition 9.3 (Robuste verallgemeinerte Gershgorin-Bänder)_____

Die Kreisscheiben mit Mittelpunkt $q_{ii}(s)$, $s \in \mathcal{N}_1$, $i = 1, \dots, p$, und Radius

$$r_{r_i}(s) := |q_{ii}(s)| \lambda_{PF} \left[\underbrace{C_V(Q(s))}_{=C_V(G'(s))} + L'_{Ae} \text{diag}\left\{ \frac{1}{|g'_{ii}(s)|} \right\} \right]$$

$$s \in \mathcal{N}_1,$$

$$i = 1, \dots, p,$$

bilden die robusten verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von $Q = G'K_d$. _____

Satz 9.5 (Robuste Stabilität mit dem DNA-Verfahren)

Die Anzahl der grenz- und instabilen Pole von G' und $\text{diag}\{g'_{ii}\}$ stimme überein. Die isoliert betrachteten nominellen Eingrößen-Regelkreise (g'_{ii}, k_i) seien asymptotisch stabil. Dann gilt: Der Regelkreis (G_r, K) bzw. (G'_r, K_d) ist für alle

$$G'_r = G' + \Delta'_{Ae}, \quad \Delta'_{Ae} \in \mathcal{D}_{Ae}, \quad |\Delta'_{Ae}|_e \leq L'_{Ae},$$

asymptotisch stabil, wenn die robusten verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von $Q = G'K_d$ den kritischen Punkt nicht überdecken. _____

Beweis: Wir betrachten die Zerlegung

$$\begin{aligned} G'_r &= G' + \Delta'_{Ae} \\ &= G'_d + \underbrace{G'_o + \Delta'_{Ae}}_{:=\Delta'_{Ag}}, \end{aligned}$$

interpretieren G'_d als reduziertes Entwurfsmodell und Δ'_{Ag} als additiven Gesamtfehler. Nun können wir wiederum das Robustheitskriterium 6.6 anwenden und erhalten als hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität des untersuchten Regelkreises:

1. (G'_d, K_d) und damit alle (isoliert betrachteten) Hauptregelkreise (g'_{ii}, k_i) sind asymptotisch stabil.
- 2.

$$\begin{aligned} \lambda_{PF} \left[\begin{array}{c} |\Delta_{Ag} G'_d{}^{-1}|_e \\ \underbrace{|G'_d K_d (I_p + G'_d K_d)^{-1}|_e}_{\text{diag} \frac{|q_{ii}|}{|1+q_{ii}|}} \end{array} \right] &< 1 \\ \Leftrightarrow \lambda_{PF} \left[|\Delta_{Ag} G'_d{}^{-1}|_e \right] &< \frac{|1+q_{ii}|}{|q_{ii}|}, \quad i = 1, \dots, p \\ \Leftrightarrow \underbrace{|q_{ii}| \lambda_{PF} \left[\begin{array}{c} \underbrace{|G'_o G'_d{}^{-1}|_e}_{=C_V(G')} + L'_{Ae} \underbrace{|G'_d{}^{-1}|_e}_{\text{diag} \frac{1}{|g'_{ii}|}} \end{array} \right]}_{r_{r_i}} &< |1+q_{ii}|, \\ &i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Zeilen folgen aus $|XY|_e \leq |X|_e |Y|_e$, $|X+Y|_e \leq |X|_e + |Y|_e$ und den Eigenschaften (6.32) und (6.34) des Perron-Frobenius-Eigenwertes. \square

Anmerkung: Da außerhalb der Diagonalen stehende Elemente der Übertragungsmatrix $G'(s)$ wie Modellfehler behandelt werden, leuchtet unmittelbar ein, daß „starke“ Kopplungen zwischen den Hauptregelkreisen („breite“ nominelle verallgemeinerte Gershgorin-Bänder) die Fehlertoleranz des Regelkreises verringern: Bereits vergleichsweise kleine Fehlerschranken L'_{Ae} und ein damit einhergehendes geringfügiges „Aufblähen“ der verallgemeinerten Gershgorin-Bänder können in diesem Fall dazu führen, daß der kritische Punkt überdeckt und Stabilität in Frage gestellt wird.

9.1.4 Quantitative Regelkreiseigenschaften

Wir wollen versuchen, angestrebte quantitative Regelkreiseigenschaften auf „klassische Art“ zu realisieren – konkret: wir wollen skalare Regler k_i entwerfen, so daß die Frequenzgänge zwischen der Fehlerkomponente e_i und der Ausgangsgröße y_i gewünschtes Aussehen zeigen. Im Unterschied zum klassischen Eingrößen-Entwurf besteht der zu manipulierende Frequenzgang aber nicht einfach aus dem Produkt $g'_{ii}k_i$; er hängt vielmehr von den Regler-Übertragungsfunktionen $k_j(s)$, $j \neq i$, in den anderen Hauptregelkreisen ab. Diese sind unter Umständen aber gar nicht bekannt – z.B. weil sie noch nicht entworfen wurden. Deshalb benötigen wir eine von $k_j(s)$ unabhängige Abschätzung des Übertragungsverhaltens

$$h_i := \frac{y_i}{u'_i}$$

(u' bezeichnet die vektorielle Eingangsgröße des kompensierten Streckenmodells –vgl. Bild 9.4).

Satz 9.6 (Abschätzung des Übertragungsverhaltens h_i) _____
 Überdecken die (nominellen) verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von G' den kritischen Punkt nicht, so gilt für den Frequenzgang $h_i(j\omega)$:

$$|h_i(j\omega) - g'_{ii}(j\omega)| < |g'_{ii}(j\omega)| \lambda_{PF}[C_V(G'(j\omega))], \quad (9.6)$$

$h_i(j\omega)$ liegt also im Innern des i -ten verallgemeinerten Gershgorin-Bandes von G' . _____

Beweis: folgt unmittelbar aus Theorem 1 in [3], wenn die dort verwendete Matrix A als $\text{diag}\{|g'_{ii}| \lambda_{PF}[C_V(G')]\}$ gewählt wird.

Es ist nicht weiter überraschend, daß schwache Kopplungen zwischen den Hauptregelkreisen (i.e. ein kleines $C_V(G')$) die Genauigkeit der

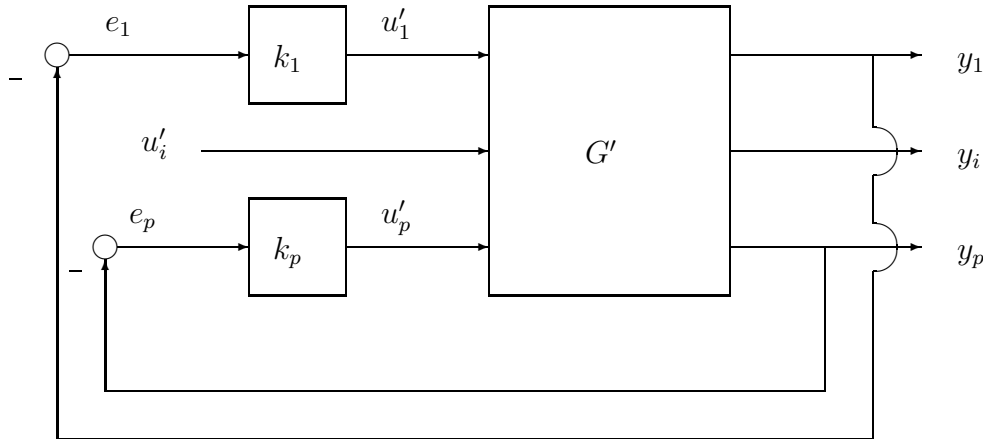


Bild 9.4: Übertragungsfunktion $h_i = \frac{y_i}{u'_i}$.

Abschätzung (9.6) erhöhen. Dies gilt natürlich auch, wenn wir Sensitivitätsmatrix und komplementäre Sensitivitätsmatrix (im nominellen Fall) durch das (isoliert betrachtete) Verhalten der Hauptregelkreise und die Vergleichsmatrix $C_V(G')$ abschätzen: Überdecken die (nominellen) verallgemeinerten Gershgorin-Bänder des offenen Kreises den kritischen Punkt nicht, so gilt:

$$|S|_e \leq_e \text{diag}\{|s_i|\} [I_p - C_V(G') \text{diag}\{|t_i|\}]^{-1} \quad (9.7)$$

$$|T|_e \leq_e (I_p + C_V(G')) \text{diag}\{|t_i|\} [I_p - C_V(G') \text{diag}\{|t_i|\}]^{-1} \quad (9.8)$$

wobei:

$$s_i := (1 + g'_{ii} k_i)^{-1}$$

$$t_i := (1 + g'_{ii} k_i)^{-1} g'_{ii} k_i.$$

(9.7) und (9.8) folgen unmittelbar aus Satz 6.12, wenn wir G'_d als nominelles Modell und G'_o als Modellfehler interpretieren. Deuten wir – wie bei den Untersuchungen zur Robustheit der Stabilität – $G'_o + \Delta'_{Ae}$ als (Gesamt-) Modellfehler, so erhalten wir eine entsprechende Abschätzung für die Elemente der Matrizen S_r und T_r (Sensitivitätsmatrix und komplementäre Sensitivitätsmatrix bei Vorliegen additiver strukturierter Modellunsicherheit); sie gilt, wenn der kritische Punkt außerhalb der (robusten) verallgemeinerten Gershgorin-Bänder liegt.

$$|S_r|_e \leq_e \text{diag}\{|s_i|\} \left(I_p - [C_V(G') + L'_{Ae} \text{diag}\{|g'_{ii}|^{-1}\}] \text{diag}\{|t_i|\} \right)^{-1} \quad (9.9)$$

$$|T_r|_e \leq_e \left(I_p + [C_V(G') + L'_{Ae} \text{diag}\{|g'_{ii}|^{-1}\}] \right) \text{diag}\{|t_i|\} \left(I_p - [C_V(G') + L'_{Ae} \text{diag}\{|g'_{ii}|^{-1}\}] \text{diag}\{|t_i|\} \right)^{-1}. \quad (9.10)$$

Nun wenden wir uns der Frage zu, wie geeignete Kompensationsmatrizen K_c zu finden sind:

9.1.5 Entwurf von Kompensationsmatrizen

Rechtsmultiplikation des Streckenmodells $G(s)$ mittels einer zufällig gewählten konstanten reellen Matrix bewirkt mit Wahrscheinlichkeit 1, daß alle Modellpole in den Diagonalelementen der kompensierten Matrix $G' = GK_c$ erscheinen. Diesen Aspekt der Kompensation brauchen wir im folgenden also nicht mehr zu betrachten: Wir beschäftigen uns nur noch mit dem Problem, schmale verallgemeinerte Gershgorin-Bänder zu erreichen.

9.1.5.1 Umordnung von Stell- und Regelgrößen

Wie bereits erwähnt, werden in vielen Anwendungsfällen Regler mit möglichst einfacher Struktur und Dynamik angestrebt. Deshalb sollte man zuerst überprüfen,

- ob überhaupt eine Kompensationsmatrix notwendig ist (sind die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder von G bereits „schmal genug“?),
- ob „genügend schmale“ verallgemeinerte Gershgorin-Bänder durch einfaches Umstellen der Spalten der Strecken-Übertragungsmatrix zu erreichen sind. In diesem Fall ist K_c eine Permutationsmatrix, enthält also pro Spalte und Zeile genau eine 1 und ansonsten lauter Nullen.

Ein Umstellen der Spalten von G entspricht einer Neu-Zuordnung von Stell- und Regelgrößen und wird oft als *Regler-Struktur-Bestimmung* bezeichnet. Zur Festlegung einer geeigneten Zuordnung existieren eine Reihe von (semi-) heuristischen Methoden – die bekannteste basiert auf der Auswertung des *Relative Gain Array (RGA)*. Für kleine p kann man natürlich auch die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder für alle möglichen Kombinationen von Stell- und Regelgrößen berechnen und diejenige Zuordnung wählen, die die schmalsten Bänder erzeugt. Wenn eine solche Vorgehensweise praktikabel ist ($p = 2, 3, 4$), stellt sie eine ausgezeichnete Methode zur Regler-Struktur-Bestimmung dar.

Beispiel: Wir betrachten das Entwurfsmodell

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+4} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{10}{s+8} & 0 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich führt ein einfaches Vertauschen der beiden Spalten, d.h.

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

auf ein kompensiertes Streckenmodell $G' = GK_c$ mit verallgemeinerten Gershgorin-Bändern der Breite 0 und damit auf zwei entkoppelte Eingrößenprobleme.

9.1.5.2 Konstante Kompensation

Als nächst-einfache Möglichkeit kommt die Verwendung einer (vollbesetzten) reellwertigen Kompensationsmatrix K_c in Betracht. Bei sehr einfachen – i.a. konstruierten – Modellen kann sich durch Rechtsmultiplikation mittels eines solchen K_c (d.h. durch Hinzuaddieren reeller Vielfacher von Spalten zu anderen Spalten) ein dreiecksförmiges G' erreichen lassen:

Beispiel: Wir betrachten wiederum das einführende Beispiel von Seite 32. Wir wollen annehmen, die in Bild 9.2 und 9.3 gezeigten verallgemeinerten Gershgorin-Bänder seien nicht schmal genug – d.h. die gewünschten quantitativen Anforderungen lassen sich nur mit großen Verstärkungen erreichen, die zu einer Überdeckung des kritischen Punktes durch die Gershgorin-Bänder führen würden. Eine Kompensation des Streckenmodells G ist also notwendig. Durch Hinzuaddieren des -0.5 -fachen der zweiten Spalte zur ersten Spalte erhält man:

$$G' = G \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}}_{K_c} = \begin{bmatrix} -\frac{s-6}{(s+1)(s+8)} & \frac{4}{s+8} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

– eine Übertragungsmatrix mit verallgemeinerten Gershgorin-Bändern der Breite 0. Rechtsmultiplikation mittels einer nicht-singulären quadratischen Matrix ändert weder die Übertragungspole noch die Übertragungsnulstellen eines Systems. Wie man sich leicht überzeugt, treten in diesem Beispiel sämtliche Übertragungspole und -nulstellen von G in den Diagonalelementen von G' auf (vgl. S. 97).

Meist wird es aber nicht möglich sein, durch eine konstante Kompensationsmatrix für alle Frequenzen schmale verallgemeinerte Gershgorin-Bänder zu

erzwingen. In einem solchen Fall überlegt man sich, in welchem Frequenzbereich schmale Bänder besonders wichtig sind – üblicherweise in der Nähe der gewünschten Durchtrittsfrequenzen der Diagonalelemente $q_{ii}(j\omega)$ (dort kommt man dem kritischen Punkt nahe und ist deswegen die Gefahr einer Überdeckung besonders groß). Man greift dann ein $\bar{\omega}$ aus diesem Frequenzbereich heraus und versucht, mittels eines konstanten K_c ein kleines $\lambda_{PF}[C_V(G(j\bar{\omega})K_c)]$ zu erreichen. Die Minimierung dieser Größe über der Matrix K_c stellt allerdings ein nichttriviales numerisches Problem dar. Deswegen weicht man meist darauf aus, die *Frobenius-Norm*³ der Vergleichsmatrix $C_V(G(j\bar{\omega})K_c)$ zu minimieren – dies erweist sich als einfaches verallgemeinertes Eigen-Problem. Wegen

$$\begin{aligned}\lambda_{PF}[C_V] &\leq \bar{\sigma}[C_V] \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^p \sigma_i^2[C_V]} \\ &= \|C_V\|_F\end{aligned}$$

garantiert ein kleiner Wert von $\|C_V(G(j\bar{\omega})K_c)\|_F$ schmale verallgemeinerte Gershgorin-Bänder in der Nähe der Frequenz $\bar{\omega}$.

Einen die Frobenius-Norm der Vergleichsmatrix minimierenden Kompensator findet man durch Verwendung des sogenannten *Align-Algorithmus* (g_{z_i} bezeichnet die i -te Zeile der komplexwertigen $p \times q$ -Matrix $G(j\bar{\omega})$, k_{s_k} die k -te Spalte der reellwertigen $q \times p$ -Matrix K_c):

$$\|C_V(G(j\bar{\omega})K_c)\|_F^2 = \sum_{k=1}^p \underbrace{\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \frac{|g_{z_i} k_{s_k}|^2}{|g_{z_k} k_{s_k}|^2} \right)}_{:= \tilde{J}_k}.$$

\tilde{J}_k hängt nur von der k -ten Spalte der gesuchten Matrix K_c ab; wir können unser Optimierungsproblem deshalb in p unabhängige Teilprobleme aufspalten und \tilde{J}_k bzw.

$$J_k := \tilde{J}_k + 1 = \sum_{i=1}^p \frac{|g_{z_i} k_{s_k}|^2}{|g_{z_k} k_{s_k}|^2}$$

³Die Frobenius-Norm einer $p \times q$ -Matrix A ist definiert als:

$$\|A\|_F := \sqrt{\text{Spur}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q |a_{ik}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{p,q\}} \sigma_i^2[A]}.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k_{s_k}^T \left(\sum_{i=1}^p g_{z_i}^* g_{z_i} \right) k_{s_k}}{k_{s_k}^T \left(g_{z_k}^* g_{z_k} \right) k_{s_k}} \\
&= \frac{k_{s_k}^T \overbrace{\operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^p g_{z_i}^* g_{z_i} \right)}^{:=E} k_{s_k}}{k_{s_k}^T \underbrace{\operatorname{Re} \left(g_{z_k}^* g_{z_k} \right)}_{:=F} k_{s_k}}
\end{aligned}$$

minimieren. Hierzu multiplizieren wir mit dem Nenner der rechten Seite und leiten nach k_{s_k} ab:

$$\underbrace{\frac{\partial J_k}{\partial k_{s_k}}}_{\stackrel{!}{=0}} k_{s_k}^T F k_{s_k} + 2J_k F k_{s_k} = 2E k_{s_k}.$$

Es ergibt sich also ein verallgemeinertes Eigenwertproblem mit zwei symmetrischen positiv-semidefiniten Matrizen E und F . Der kleinste Eigenwert ist das minimale J_k , der zugehörige Eigenvektor die gesuchte k -te Spalte von K_c . Sie kann mit einem beliebigen reellen Faktor skaliert werden, ohne daß sich die Vergleichsmatrix verändert. Bezeichnet $\bar{\omega}$ die gewünschte Durchtrittsfrequenz für q_{kk} , ist es natürlich sinnvoll, k_{s_k} so zu skalieren, daß $|g_{z_k} k_{s_k}| = 1$. Dann bleibt nur noch das Vorzeichen von k_{s_k} zu wählen.

Diese Überlegung führt auch unmittelbar auf eine alternative (aber gleichwertige) Formulierung unseres Minimierungsproblems, die sich in Abschnitt 9.2 als nützlich erweisen wird: Wenn wir k_{s_k} so skalieren, daß $|g_{z_k} k_{s_k}| = 1$, können wir offenbar anstatt \tilde{J}_k bzw. J_k über k_{s_k} zu minimieren auch

$$\min_{\phi_k, k_{s_k}} \left\{ |e^{j\phi_k} - g_{z_k} k_{s_k}|^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p |g_{z_i} k_{s_k}|^2 \right\}, \quad k = 1, \dots, p,$$

lösen. Fassen wir die p least-squares-Probleme für die Spalten der Kompensationsmatrix K_c zusammen, so ergibt sich:

$$K_{c_{\min}} := \arg \min_{K_c} \|C_V(G(j\bar{\omega})K_c)\|_F \quad (9.11)$$

$$= \arg \min_{K_c, \phi_i} \|G(j\bar{\omega})K_c - \operatorname{diag}\{e^{j\phi_i}\}\|_F \quad (9.12)$$

– dieselbe Matrix minimiert die Kostenfunktionen in (9.11) und (9.12). Wir suchen also nach einem reellen K_c , das die außerhalb der Diagonalen stehenden Elemente von $G(j\bar{\omega})K_c$ möglichst klein werden und die Beträge der

Diagonalelemente dicht bei 1 liegen läßt – K_c soll also die komplexwertige Matrix $G(j\bar{\omega})$ näherungsweise invertieren. Eine explizite Lösung dieses Problems findet man z.B. in [46] – sie stimmt natürlich bis auf die Skalierungen mit der über das verallgemeinerte Eigenproblem gewonnenen Lösung überein:

$$\Gamma := G^*(j\bar{\omega}) G(j\bar{\omega}) \quad (9.13)$$

$$X := G(j\bar{\omega}) \operatorname{Real}\{\Gamma\}^{-1} \Gamma^T \operatorname{Real}\{\Gamma\}^{-1} G^T(j\bar{\omega}) \quad (9.14)$$

$$K_{c_{\min}} = \operatorname{Real}\{\Gamma\}^{-1} \operatorname{Real}\left\{G^*(j\bar{\omega}) \operatorname{diag}\{e^{0.5j\angle x_{ii}}\}\right\}. \quad (9.15)$$

9.1.5.3 Dynamische Kompensationsmatrix

Wenn wir mit einer konstanten Kompensationsmatrix nicht ans Ziel gelangen oder über einen weiten Frequenzbereich schmale verallgemeinerte Gershgorin-Bänder erzwingen wollen, können wir auf eine dynamische Variante der obigen Methode zurückgreifen: Man wählt eine Kompensationsmatrix der Struktur

$$K_c(s) :=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11n_1}s^{n_1} + \dots a_{110} & \dots & a_{1pn_p}s^{n_p} + \dots a_{1p0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1n_1}s^{n_1} + \dots a_{q10} & \dots & a_{qp n_p}s^{n_p} + \dots a_{qp0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{P1}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{Pp}(s) \end{bmatrix}^{-1};$$

die Nenner-Polynome $m_{P_i}(s)$ besitzen mindestens Grad n_i . Da die $m_{P_i}(s)$ nicht in die Vergleichsmatrix eingehen (Invarianz bezüglich einer Rechtsmultiplikation mittels diagonalförmiger Matrizen), kann K_c ohne Verlust der Allgemeinheit als asymptotisch stabil angenommen werden. Dann minimieren wir

$$\sum_{i=1}^N w(\omega_i) \|C_V(G(j\omega_i)K_c(j\omega_i))\|_F$$

über die Zählerparameter a_{ik} von K_c . Die Parameter einer jeden Spalte der Kompensationsmatrix findet man wiederum durch Lösen eines verallgemeinerten Eigen-Problems. Die positiven reellen Gewichtungen $w(\omega_i)$ reflektieren die relative Wichtigkeit schmaler verallgemeinerter Gershgorin-Bänder im gewählten Frequenzbereich $\omega_1, \dots, \omega_N$.

Anmerkung: Man sollte stets im Auge behalten, daß die Chance von Pol-Nullstellenkürzungen zwischen Streckenmodell G und Kompensationsmatrix K_c zunimmt, wenn wir die Zahl der Freiheitsgrade erhöhen. Wenn die Zählergrade n_i groß genug gewählt werden, kann K_c das Entwurfsmodell G unter Umständen exakt

invertieren. Von einer solchen „blinden“ Pol-Nullstellenkürzung ist aber i.a. abzuraten; die n_i sollten deshalb kleinstmöglich angesetzt werden. Die Folgen einer unüberlegten Pol-Nullstellenkürzung kann man sich folgendermaßen veranschaulichen: Man nehme an, das Entwurfsmodell besitze ein Paar schwach gedämpfter Übertragungspole. Dieses Pol-Paar werde durch Übertragungsnullstellen des Reglers gekürzt. Eine exakte Kürzung wird i.a. aber nur im nominellen Fall möglich sein; in allen anderen Fällen werden die Streckenpole p_i und das Regler-Nullstellen-Paar z_i nicht exakt aufeinanderliegen. Man erhält demzufolge zwei Äste der Wurzelortskurve, die in unmittelbarer Nähe der imaginären Achse verlaufen (von p_i nach z_i) – der geschlossene Regelkreis besitzt also ebenfalls ein schwach gedämpftes Pol-Paar und neigt zu resonantem Verhalten.

9.1.6 Integrität

In vielen Anwendungsfällen spielt die folgende Frage eine wichtige Rolle: Angenommen ein Meßglied – oder allgemeiner eine beliebige Kombination von Sensoren – versagt. Die Ausfälle werden entdeckt und die entsprechenden Meßsignale auf Null gesetzt. Bleibt der Regelkreis unter diesen Umständen asymptotisch stabil? Läßt sich diese Frage positiv beantworten, so besitzt der Regelkreis die Eigenschaft *Integrität bezüglich Sensorausfällen*. Auf gleiche Art und Weise definiert man *Integrität bezüglich Stellgliedausfällen*. Notwendige Voraussetzung für diese Eigenschaften ist natürlich asymptotische Stabilität von Streckenmodell $G(s)$ und Regler $K(s)$.

Liegt diese Voraussetzung vor, so garantiert ein Anwenden der Entwurfschritte 1 und 2.(a) -(d) auf Seite 240 bis 241 Integrität bezüglich Sensorausfällen. Dies kann man sich anhand der folgenden Überlegung leicht klar machen: Wir betrachten den autonomen Regelkreis in Bild 9.5. Wir zerlegen die Komponenten $k_i(s)$ der Diagonalmatrix $K_d(s)$ in einen frequenzunabhängigen Verstärkungsfaktor \tilde{k}_i und einen dynamischen Anteil $\bar{k}_i(s)$ mit normierter stationärer Verstärkung:

$$k_i(s) = \bar{k}_i(s) \tilde{k}_i.$$

Ein Ausfall des i -ten Meßsignals ($y_i(t) \equiv 0$) entspricht einem Nullsetzen des Verstärkungsfaktors \tilde{k}_i bzw. einem Auftrennen des i -ten Hauptregelkreises. Dieser bleibt aber voraussetzungsgemäß asymptotisch stabil. Die verallgemeinerten Gershgorin-Bänder der anderen Hauptregelkreise hängen nicht von \tilde{k}_i ab und verändern sich also nicht. Deshalb bleibt asymptotische Stabilität des Mehrgrößen-Regelkreises gewahrt.

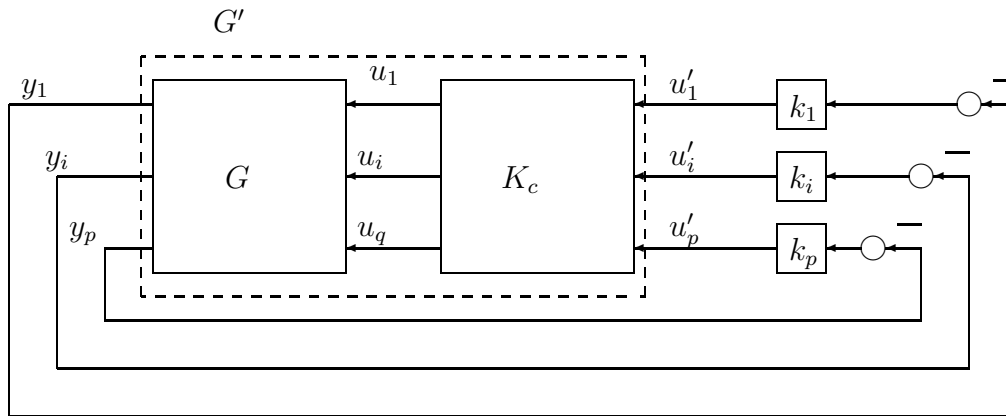


Bild 9.5: Überlegung zur Integrität eines Regelkreises.

Wenn außer einer möglichen Umordnung von Spalten des Streckenmodells G keine Kompensation benötigt wird – K_c in Bild 9.5 also als Einheits- oder Permutationsmatrix gewählt werden kann –, garantiert der DNA-Entwurf auch Integrität bezüglich Stellgliedausfällen.

Anmerkung: In vielen Anwendungsbeispielen enthalten die skalaren Regler $k_i(s)$ in den Hauptregelkreisen Integralglieder. Beantwortet man in diesem Fall ein Ausfallen eines Meß- bzw. Stellgliedes mit Nullsetzen des entsprechenden Signals *und* dem Abschalten des zugehörigen Integralanteils, so können obige Integritätsaussagen unverändert übernommen werden.

9.1.7 Die inverse Variante: Das INA-Verfahren

In [100] schlägt *Rosenbrock* zwei auf dem Konzept der (Spalten- bzw. Zeilen-) Diagonaldominanz basierende Versionen der Nyquist Array Methode vor: das DNA-Verfahren (in seiner ursprünglichen Gestalt) und das Inverse Nyquist Array (INA)-Verfahren. Ersteres arbeitet mit der Frequenzgangmatrix $G(j\omega)$ des Streckenmodells, letzteres mit der inversen Frequenzgangmatrix $G^{-1}(j\omega)$.

Der INA-Ansatz besitzt folgenden Vorteil: Nehmen wir an, eine geeignete Kompensationsmatrix K_c sei bereits bekannt, und wir stehen vor der Aufgabe, den skalaren Regler k_i im i -ten Hauptregelkreis zu entwerfen. Hierzu müssen wir bekanntlich den Frequenzgang h_i zwischen den Signalen u'_i und y_i abschätzen. Nehmen wir weiterhin an, wir hätten einige der anderen skalaren Regler k_j , $j \neq i$ bereits bestimmt. Mit dieser zusätzlichen Information sollten wir in der Lage sein, $h_i(j\omega)$ genauer einzugrenzen, als dies mit Hilfe von Gershgorin-Bändern möglich ist. Tatsächlich kann man zeigen, daß

für jede Frequenz die $h_i^{-1}(j\omega)$ im Innern sogenannter *Ostrowski-Kreise* mit Mittelpunkt $g_{ii}^{\prime-1}(j\omega)$ liegen. Diese Kreise sind in den Gershgorin-Kreisen enthalten; ihre Radien hängen von den Reglern k_j in den jeweils anderen Hauptregelkreisen (und damit der zusätzlich zur Verfügung stehenden Information) ab. Die Radien der Ostrowski-Kreise verkleinern sich (d.h. die $h_i^{-1}(j\omega)$ lassen sich präziser abschätzen), wenn die Verstärkungsfaktoren in den anderen Hauptregelkreisen erhöht werden. Ostrowski-Kreise kann man auch bei der DNA-Methode zur genaueren Abschätzung der $h_i(j\omega)$ verwenden. In diesem Fall vergrößern sich allerdings die Radien mit zunehmenden Verstärkungen in den anderen Regelkreisen und nähern sich den Radien der Gershgorin-Kreise. Ostrowski-Kreise sind deswegen beim DNA-Ansatz von untergeordneter Bedeutung.

Andererseits weist das INA-Verfahren auch eine Reihe von Nachteilen auf:

1. Das Streckenmodell muß quadratisch sein (mit der DNA-Methode können wir dagegen den Fall $p \leq q$ problemlos behandeln).
2. Die meisten Anwender sind von der klassischen Regelungstechnik her mit dem Nyquist-Verfahren vertraut, wissen also, wie die Frequenzgänge der Diagonalelemente manipuliert werden müssen, um gewünschte Effekte zur erzielen. Das bei der INA-Methode notwendige Umgehen mit inversen Frequenzgängen erfordert dagegen meist eine längere Gewöhnung.
3. Man entwirft die Matrizen $K_c^{-1}(s)$ und $K_d^{-1}(s)$, muß also ständig im Auge behalten, daß das Inverse der entworfenen Größen realisierbar (proper) zu sein hat.

Da die in den vorangehenden Abschnitten vorgestellte Version des DNA-Verfahrens mit *verallgemeinerten* anstatt der konservativeren Spalten- bzw. Zeilen-Gershgorin-Bändern arbeitet, besteht weniger Anlaß für eine Verbesserung der Abschätzung durch Ostrowski-Bänder als in der Rosenbrock-schen Formulierung und damit i.a. kein Grund, auf einen inversen Ansatz zurückzugreifen.

9.1.8 Beispiel: Entwurf eines Mehrgrößenreglers für eine Zweistoffdestillationskolonne

Der Entwurf mittels des DNA-Verfahrens soll – wie alle nachfolgend behandelten Entwurfsverfahren – anhand eines Beispiels aus der Verfahrenstechnik, einer Destillationskolonne, behandelt werden. Die Wahl fiel auf ein – wie sich herausstellen wird – einfaches Beispiel, so daß wir alle Entwurfsverfahren (jedes mit spezifischen Schwächen und Vorzügen) vergleichend auf dasselbe Problem anwenden können. Absichtlich wurde auch ein verfahrenstechnisches System gewählt, weil in diesem Anwendungsbereich regelungstechnische Anforderungen typischerweise im Zeitbereich beschrieben werden; dies gibt uns Gelegenheit, an einem Beispiel zu zeigen, wie die Übersetzung von Spezifikationen in den Frequenzbereich vorgenommen werden kann.

Destillationsprozessen kommt in der Verfahrenstechnik eine besondere Bedeutung zu. Sie sind das in der chemischen und petrochemischen Industrie am häufigsten eingesetzte Verfahren zur Trennung von Stoffgemischen. Das Prinzip der Destillation ist die thermische Flüssigkeitszerlegung: Der beim Destillieren eines Flüssigkeitsgemischs erzeugte Dampf wird im Gegenstrom zum Kondensat dieses Dampfes geleitet. Hierdurch nutzt man den physikalischen Effekt, daß sich die Zusammensetzung von Flüssig- und Dampfphase im Gleichgewicht unterscheidet; man erhält eine Anreicherung von leichter siedenden Komponenten in der Dampfphase und schwerer siedenden Gemischbestandteilen in der Flüssigphase. Zu einer einfachen Destillationskolonne gehören demnach ein Verdampfer zum Erzeugen des Gemischdampfes, eine Trennsäule, in der die Gemischauftrennung stattfindet, und ein Kondensator zum Niederschlagen der leichter siedenden Gemischdämpfe, die die Trennsäule verlassen.

Destillationskolonnen werden in der industriellen Praxis meist mit konventionell ausgelegten PI(D)-Reglern betrieben. Dies führt häufig zu unbefriedigenden Ergebnissen; um die Einhaltung der Produktspezifikationen auch bei Auftreten von Störungen garantieren zu können, müssen in einem solchen Fall die geforderten Reinheiten im Normalbetrieb beträchtlich übererfüllt werden. Dies kommt einer Erhöhung des Energieverbrauchs gleich. Aus diesem Grund ist der Einsatz von „ausgefeilteren“ Regelkonzepten, die die Kopplungen zwischen verschiedenen Stell- und Regelgrößen berücksichtigen, von praktischem Interesse.

9.1.8.1 Die Regelstrecke

Die zu regelnde Anlage ist im Technikumsmaßstab am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik (ISR) der Universität Stuttgart aufgebaut.

Sie besteht aus einer Trennsäule mit 40 Böden, Verdampfer und Kondensator (s. Bild 9.6). Sie wird über ein industrielles Prozeßleitsystem (PLS80 von IC Eckardt) angesteuert.

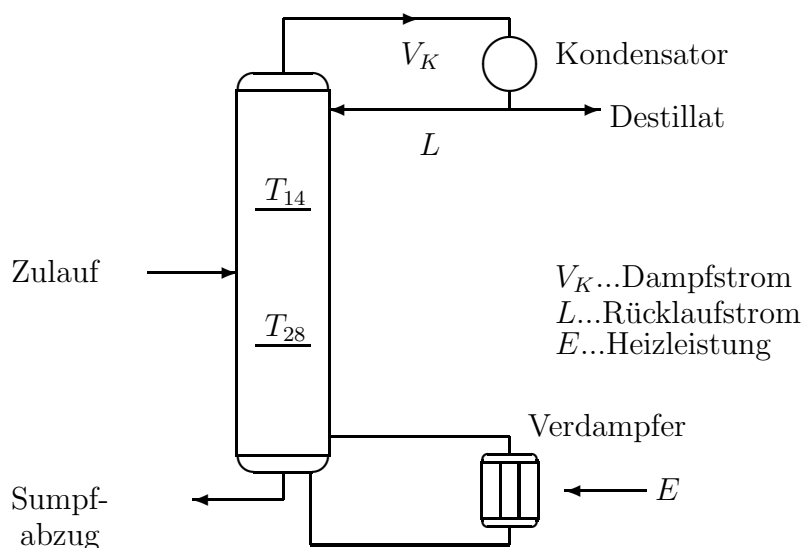


Bild 9.6: Destillationskolonne zur Zweistoff-Trennung.

Wir betrachten die Trennung eines Gemischs aus Methanol und Propanol, das der Kolonne kontinuierlich über einen Zulauf auf dem 22. Boden zugeführt wird. Ziel der Regelung ist, trotz möglicher Veränderungen von Zulaufvolumenstrom und Zulaufkonzentration von bis zu $\pm 20\%$ gewisse Mindestreinheiten in Kopf- und Sumpfprodukt aufrechtzuerhalten. Das Regelungsproblem dient in erster Linie als Test für die Anwendbarkeit von linearen Mehrgrößen-Entwurfsverfahren. Deshalb betrachten wir den „worst case“ und verzichten auf die in der industriellen Praxis übliche meßtechnische Erfassung des Zulaufstroms.

9.1.8.2 Wahl von Stell- und Regelgrößen

Die Produktreinheiten werden durch die Konzentrationen in Kopf und Sumpf der Kolonne definiert. Konzentrationsmessungen sind aber aufwendig und verursachen Totzeiten im Regelkreis. Für das betrachtete nicht-azeotrope Zweistoffgemisch existiert ein näherungsweise⁴ eindeutiger Zusammenhang zwischen Temperatur und Konzentrationen auf jedem Boden der Kolonne. Wir

⁴Der Einfluß des Drucks kann vernachlässigt werden.

können deshalb Temperaturen statt Konzentrationen messen und als (Ersatz-) Regelgrößen verwenden.

Mit Hilfe einer detaillierten Simulationsstudie kann ein geeigneter Arbeitspunkt bestimmt und die Auswirkung von Zulaufstörungen auf die Temperatur auf verschiedenen Böden abgeschätzt werden. Das Simulationsmodell basiert auf Material- und Energiebilanz sowie thermodynamischen Korrelationen für jeden Boden der Kolonne. Unter Berücksichtigung des Kondensator- und Verdampferverhaltens entsteht ein aus 332 gekoppelten Gleichungen bestehendes nichtlineares Differential/Algebra-System. Dieses Modell ist im Rahmen der Simulationsumgebung DIVA (z.B. [54]) implementiert. Bild 9.7 zeigt geeignete stationäre Profile für Konzentrationen und Temperatur.

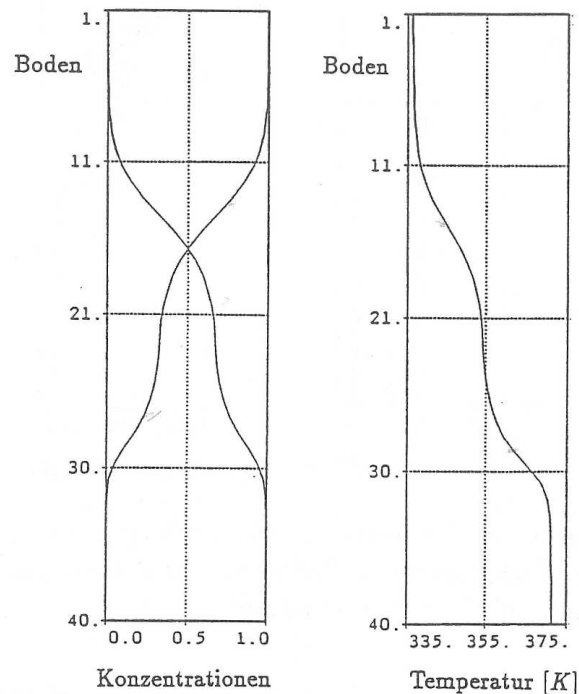


Bild 9.7: Stationäre Temperatur- und Konzentrationsprofile – nichtlineare Simulation.

Aus Bild 9.8 ist ersichtlich, daß Störungen im Zulaufvolumenstrom und den Zulaufkonzentrationen die „Fronten“ des Profils nach oben oder unten verschieben, die Form des Profils aber im wesentlichen unverändert bleibt. Unter „Fronten“ verstehen wir Bereiche, die durch hohen Stoffaustausch gekennzeichnet sind, in denen also ausgeprägte Änderungen von Konzentrationen (und damit Temperatur) bezüglich der (vertikalen) Ortskoordinate auftreten. Bild 9.8 kann auch entnommen werden, daß die Temperaturen auf dem 14. und

28. Boden der Kolonne (T_{14} , T_{28}) sehr empfindlich auf Zulaufstörungen reagieren. Diese Temperaturen werden deshalb als Meßgrößen ausgewählt. Wenn es gelingt, den zeitlichen Verlauf von T_{14} und T_{28} auf vorgegebene Bänder um die zugehörigen stationären Werte zu begrenzen, kann Einhaltung der Spezifikationen für die Produktreinheit in Kopf und Sumpf der Kolonne garantiert werden.

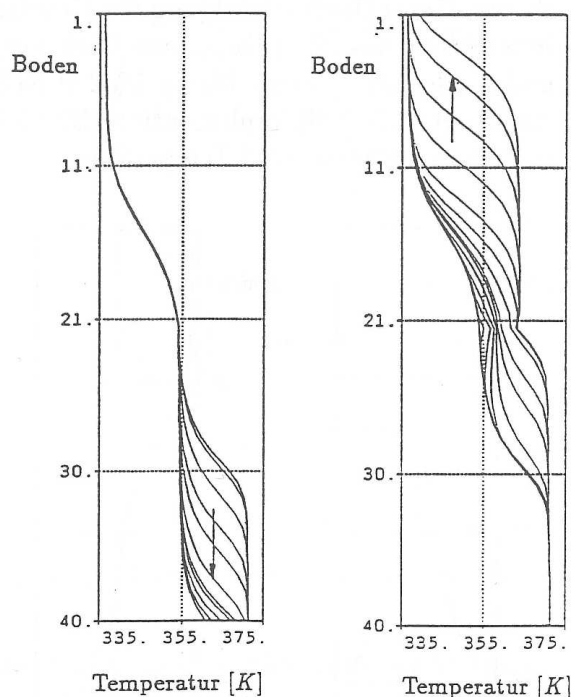


Bild 9.8: Änderungen des Temperaturprofils nach sprungförmigen Störungen von +20% im Zulaufvolumenstrom (links) und in der Propanolkonzentration im Zulauf (rechts) – nichtlineare Simulation.

Als Stellgrößen wählen wir Heizleistung E und Rücklaufverhältnis $\epsilon = \frac{L}{V_K}$. Diese Kombination hat sich in vielen Untersuchungen des Zweistoffdestillationsproblems bewährt.

9.1.8.3 Lineares Modell

Der Reglerentwurf basiert auf einer durch Aufnahmen von Sprungantworten identifizierten Übertragungsmatrix $G(s)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta T_{14} \\ \Delta T_{28} \end{pmatrix}}_y = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1220}{6.1s+1} & \frac{100}{(1.2s+1)(1.5s+1)} \\ -\frac{1500}{2.7s+1} & \frac{324}{1.6s+1} \end{pmatrix}}_{G(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \epsilon \\ \Delta E \end{pmatrix}}_u$$

Δ steht für „Abweichung vom Arbeitspunkt“. Die Heizleistung wird in kW, Temperaturen werden in K, Zeitkonstanten in Stunden angegeben. Die Linearitätsannahme hat mit der Realität wenig gemein. Am realen Prozeß hängen Zeitkonstanten und Verstärkungen jedes Übertragungselements stark von Höhe und Vorzeichen der sprungförmigen Anregung ab. Abweichungen vom linearen Modell sind besonders ausgeprägt, wenn die Fronten der Profile durch auftretende Störungen zum „Aufsitzen“ an den Kolonnenenden gebracht werden. Trotzdem kann – den Erfahrungen mit der realen Anlage zufolge – ein linearer Regler am realen Prozeß mit gutem Erfolg eingesetzt werden, wenn Robustheitseigenschaften während des Entwurfs genügend Beachtung beigemessen wird. Das vorliegende Modell ist asymptotisch stabil und minimalphasig.

9.1.8.4 Fehlermodelle

Die Bestimmung geeigneter Fehlermodelle ist ein Problem, das erst in letzter Zeit Beachtung gefunden hat. Einige neue Ergebnisse ermöglichen es, durch Auswertung experimenteller Daten nicht nur ein Entwurfsmodell, sondern auch ein mit den Daten konsistentes Fehlermodell zu finden. Hierfür müssen die Daten allerdings in aller Regel in Form von gemessenen Frequenzgängen, nicht in Gestalt von Sprungantworten vorliegen. Für die meisten verfahrenstechnischen Probleme mit Zeitkonstanten im Stundenbereich kommt eine solche Vorgehensweise natürlich nicht in Betracht. Wir müssen uns deshalb bei der Festlegung von Fehlermodellen von einer Kombination aus Intuition und Prozeßwissen leiten lassen. Wir werden im folgenden mit zwei verschiedenen Fehlermodellen – einem strukturierten und einem unstrukturierten – arbeiten.

Wenn der Regler die Strecke nahe genug am Auslegungspunkt halten und das erwähnte Aufsitzen der Profil-Fronten an den Kolonnenenden verhindern kann, haben sich folgende einfachen Fehlermodelle als adäquat erwiesen:

Strukturiertes Fehlermodell:

$$G_r(s) = G(s) + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{11}(s)g_{11}(s) & \delta_{12}(s)g_{12}(s) \\ \delta_{21}(s)g_{21}(s) & \delta_{22}(s)g_{22}(s) \end{bmatrix}}_{\Delta_{Ae}} \quad (9.16)$$

$$\delta_{ik}(s) \in \mathcal{RH}_\infty, \quad |\delta_{ik}(j\omega)| < 0.125 \frac{\left| \frac{j\omega}{7} + 1 \right|}{\left| \frac{j\omega}{200} + 1 \right|}, \quad i, k = 1, 2.$$

Der Verlauf der relativen Fehlerschranken ist in der linken Hälfte von Bild 9.9 wiedergegeben. Offenbar lassen wir in jedem Element der Strecken-Übertragungsmatrix einen (unabhängigen) stationären Fehler

von 12.5% zu und erklären das Entwurfsmodell im Bereich hoher Frequenzen als vollkommen unzuverlässig – dort können die relativen Fehler in jedem Element größer als 100% sein.

Unstrukturiertes Fehlermodell:

$$G_r(s) = (I_2 + \Delta_M(s)) G(s) \quad (9.17)$$

$$\Delta_M(s) \in \mathcal{RH}_\infty^{2 \times 2}, \quad \bar{\sigma}[\Delta_M(j\omega)] < 0.175 \frac{\left| \frac{j\omega}{7} + 1 \right|}{\left| \frac{j\omega}{200} + 1 \right|} = 1.4 \sup_{\delta_{ik}} |\delta_{ik}(j\omega)|.$$

Diese Fehlerschranke ist auf der rechten Seite von Bild 9.9 aufgetragen.

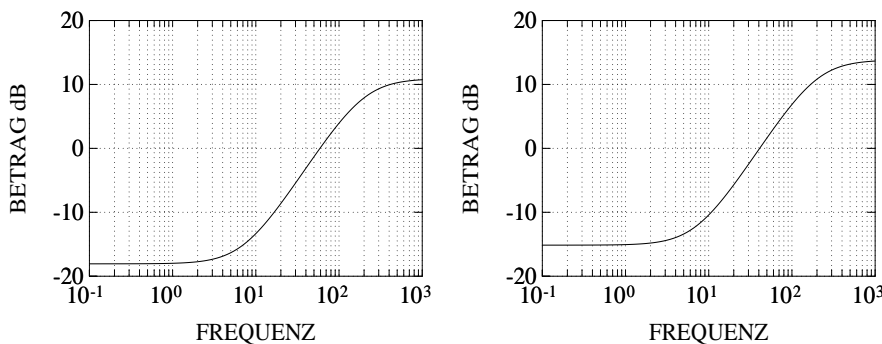


Bild 9.9: Schranken für die relativen Fehler δ_{ik} (links) und Δ_M (rechts).

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß beide Fehlerklassen *nicht* äquivalent sind. Auch enthält keine der beiden Klassen die andere vollständig: In jeder Klasse sind Fehler zu finden, die das jeweils andere Fehlermodell nicht zuläßt. So ist offensichtlich, daß sich nicht jedes zulässige Δ_M in obiger Form strukturierter Unsicherheit (9.16) schreiben läßt. Wollte man umgekehrt alle möglichen Modelle (9.16) in Form von (9.17) darstellen, müßte man die Schranke für den unstrukturierten Fehler Δ_M so groß wählen, daß kein Regler für alle erlaubten Δ_M Stabilität und gewünschte quantitative Regelkreiseigenschaften erreichen könnte.

Für den Regler-Entwurf mittels des DNA-Verfahrens verwenden wir die strukturierte Beschreibung (9.16) der Modellunsicherheit; für die restlichen in diesem Kapitel behandelten Entwurfsmethoden (CL- und RFN-Verfahren) werden wir auf das unstrukturierte Modell (9.17) zurückgreifen.

9.1.8.5 Gewünschte Regelkreiseigenschaften

Für betrachtete Zulaufstörungen (sprungförmige Änderungen von Zulaufvolumenstrom und Propanolkonzentration von bis zu $\pm 20\%$) fordern wir:

- Verschwindende bleibende Regeldifferenz $y_i(t) \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, für $t \rightarrow \infty$.
- Eine genügend schnelle Reaktion des Regelkreises, so daß ein Auflaufen der Fronten der Temperaturprofile an den Kolonnenenden verhindert wird. Die Einhaltung dieser Forderung garantiert gewünschte Mindestreinheiten in Kopf- und Sumpfprodukt der Kolonne. Sie ist gewährleistet, wenn (vgl. Bild 9.8) für die zu regelnden Temperaturabweichungen gilt: $|y_i(t)| < 5$, $i = 1, 2$.
- Ein genügend schnelles Ausregeln, so daß die Temperaturabweichungen nach einer halben Stunde weniger als 1 Grad betragen: $|y_i(t)| < 1$, $t \geq 0.5$, $i = 1, 2$.

Beide Regelgrößen müssen also innerhalb des in Bild 9.10 gezeigten Bereiches verlaufen. Um diese Zeitbereichsspezifikationen in den Frequenzbereich

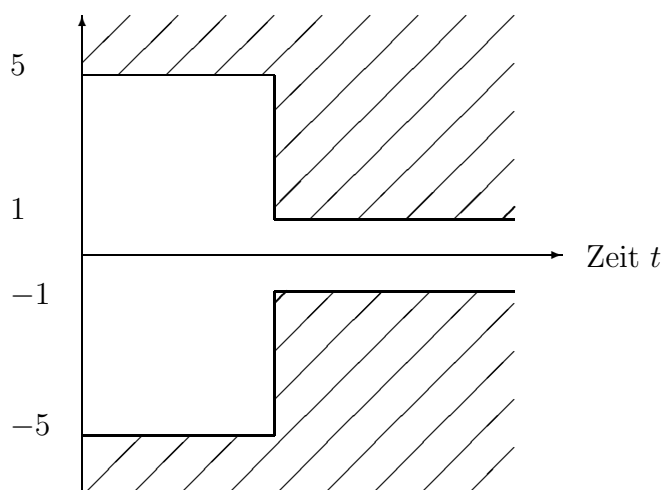


Bild 9.10: Zeitbereichsspezifikationen für die Regeldifferenzen.

übersetzen zu können, müssen wir – zumindest ungefähr – wissen, wie sich im unregulierten System sprungförmige Zulaufstörungen auf die Regelgrößen $y_i(t)$ auswirken. Hierzu benötigen wir streng genommen ein Störmodell. Wir wollen uns aber nicht die Mühe machen, alle vier Elemente einer solchen 2×2 -Übertragungsmatrix zu identifizieren und geben uns stattdessen mit einer groben Abschätzung (i.e. einem stark vereinfachten Störmodell) zufrieden. Sollte es sich herausstellen, daß wir aus diesem Grund die gegebenen Spezifikationen nicht erfüllen können, müßten wir diese Abschätzung verfeinern.

Die „schlimmste“ (weil schnellste) Auswirkung einer beliebigen Kombination von 20%-igen sprungförmigen Änderungen der Zulaufvariablen auf eine Re-

gelgröße (Temperaturabweichung) läßt sich in erster Näherung als Verzögerungsglied zweiter Ordnung

$$g_d(s) := \frac{10}{(0.025s + 1)(0.025s + 1)}$$

modellieren (20%-ige Änderungen wurden auf den Wert 1 normiert). Bild 9.11 zeigt die Sprungantwort, Bild 9.12 den Amplitudengang der Übertragungsfunktion g_d .

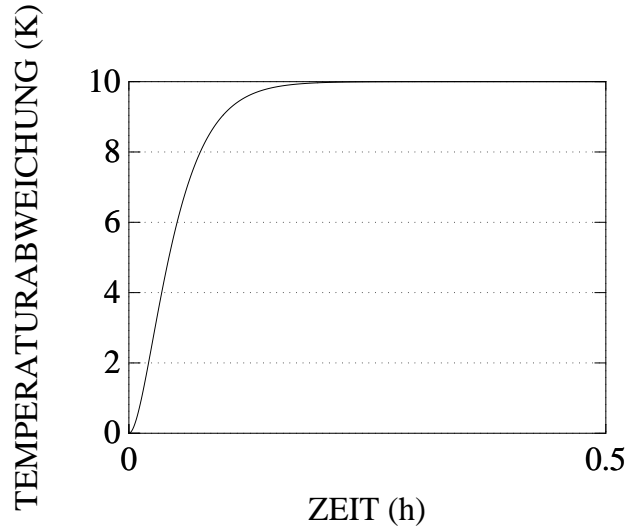


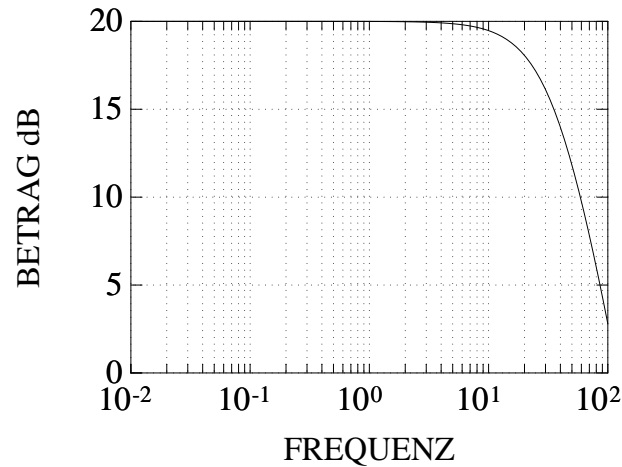
Bild 9.11: Sprungantwort von g_d : „Schlimmste“ Reaktion von Regelgrößen auf sprungförmige 20%-ige Änderungen von Zulaufvolumenstrom und/oder -konzentration (offener Regelkreis).

Eine pessimistische, aber überaus einfache Abschätzung des Störverhaltens lautet also

$$G_d(s) = \text{diag} \{g_d(s)\}.$$

Wenn wir dieses Störmodell akzeptieren, müssen wir überlegen, für welche Spezifikationen der Sensitivitätsmatrix die Antworten des Übertragungssystems $S_r G_d$ auf eine beliebige Kombination von Einheitssprüngen innerhalb der in Bild 9.10 gezeigten Schranken verlaufen. S_r steht für die Sensitivitätsmatrix im fehlerbehafteten Fall. Zur Verdeutlichung dieser heuristischen Vorgehensweise betrachten wir zunächst ein äquivalentes skalares Problem und fragen, wie die Amplitudengänge von *skalaren* Sensitivitätsfunktionen $s_r(j\omega)$ aussehen, wenn die Sprungantwort von $s_r g_d$ nicht in das schraffierte Gebiet in Bild 9.10 eindringt. In Frage kommen nur Sensitivitätsfunktionen, für die gilt:

- s_r ist asymptotisch stabil (Stabilität des Regelkreises!).

Bild 9.12: Amplitudengang von g_d .

- $s_r(0) = 0$, $s_r(s)$ besitzt also eine Nullstelle im Ursprung (verschwindende bleibende Regeldifferenz!).
- s_r besitzt keine weiteren Nullstellen auf oder rechts der imaginären Achse. (Als Nullstellen der Sensitivitätsfunktion kommen nur die Pole des offenen Kreises in Frage – vgl. die Diskussion in Abschnitt 7.1. Das Streckenmodell ist in unserem Fall aber asymptotisch stabil; grenz- oder instabile Reglerpole versuchen wir mit Ausnahme der zur Unterdrückung bleibender Regeldifferenzen notwendigen Integralanteile zu vermeiden⁵.)
- $s_r(\infty) = 1$ (das Entwurfsmodell ist streng proper).

Wir beschränken unsere Suche außerdem auf reell-rationale Funktionen s_r erster und zweiter Ordnung – die Einbeziehung von Übertragungsfunktionen höherer Ordnung ist im Rahmen dieses heuristischen Ansatzes wenig sinnvoll. Als „Kandidaten“ ergeben sich also:

$$\left\{ \frac{s}{s + m_1} \right\}, \quad m_1 \in \mathbb{R}^+$$

$$\left\{ \frac{s(s + n_1)}{s^2 + m_1 s + m_2} \right\}, \quad m_1, m_2, n_1 \in \mathbb{R}^+.$$

⁵Manche instabilen Streckenmodelle können allerdings nur mittels eines instabilen Reglers stabilisiert werden. Die umgekehrte Situation – Existenz eines stabilen stabilisierenden Reglers – liegt genau dann vor, wenn zwischen jedem in der rechten Halbebene liegendem Paar reeller Übertragungsnullstellen des Streckenmodells eine gerade Zahl von Übertragungspolen auftritt. Diese Eigenschaft wird als *parity interlacing property* bezeichnet [110].

Nun berechnen wir für eine repräsentative Auswahl von Parametern m_1 , m_2 und n_1 die Sprungantworten von $s_r g_d$. In Bild 9.13 sind die den Anforderungen genügenden Sprungantworten sowie die Amplitudengänge der zugehörigen Sensitivitätsfunktionen aufgetragen. Die obere Hälfte des Bildes zeigt die Resultate für Sensitivitätsfunktionen erster, die untere Hälfte für Funktionen zweiter Ordnung.

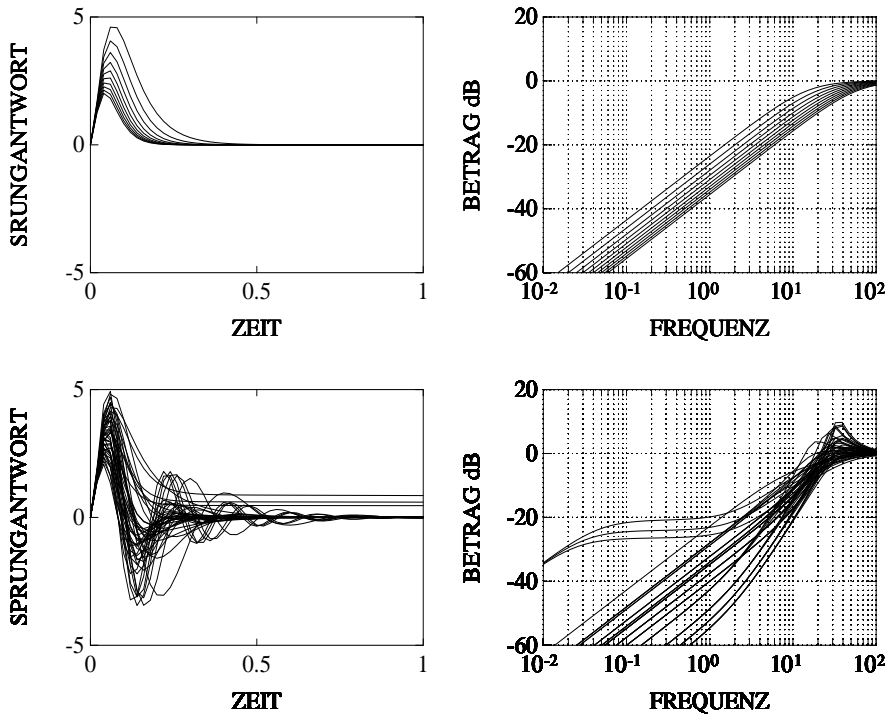


Bild 9.13: Sprungantworten von $s_r g_d$ (links) und Amplitudengänge von s_r (rechts).

Streng genommen reicht es natürlich nicht, zu verlangen, daß der Amplitudengang $|s_r|$ für alle zulässigen Modellfehler inner- oder unterhalb der in Bild 9.13 dargestellten Kurvenscharen liegt: Nicht *jedes* s_r , das dieser Forderung genügt, braucht die Zeitbereichsspezifikation zu erfüllen. Da unsere Entwurfsverfahren aber meist einen inhärenten „Sicherheitsfaktor“ besitzen (hinreichende, nicht aber notwendige Robustheitsbedingungen und/oder zu weit gefaßte Fehlermodelle), können wir uns mit einiger Zuversicht mit einem solchen Ergebnis begnügen. Man beachte, daß wir durch Festlegen einer oberen Schranke $os(\omega)$ für $|s_r(j\omega)|$ auch eine obere Schranke für den Betrag der (skalaren) Ausgangsgröße vorgeben:

$$|y(j\omega)| = \left| s_r(j\omega) g_d(j\omega) \frac{c}{j\omega} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |s_r(j\omega)| |g_d(j\omega)| \frac{|c|}{\omega} \\
&\leq os(\omega) |g_d(j\omega)| \frac{1}{\omega}, \quad \text{für alle } c \in [-1, 1] \text{ und } \omega \geq 0. \quad (9.18)
\end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise können wir nun ohne Schwierigkeiten auf unser Mehrgrößen-Problem übertragen, wenn wir das Störverhalten auf strukturierte Weise behandeln: Man fordert, daß für eine beliebige Kombination von reellen Konstanten $c_1, c_2 \in [-1, 1]$ für beide Komponenten des Ausgangsvektors

$$y(j\omega) = S_r G_d \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \frac{1}{j\omega}$$

(9.18) gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
|y_i| &= \left| s_{r_{i1}} g_d \frac{c_1}{j\omega} + s_{r_{i2}} g_d \frac{c_2}{j\omega} \right| \\
&\leq |s_{r_{i1}} c_1 + s_{r_{i2}} c_2| |g_d| \frac{1}{\omega} \\
&\leq (|s_{r_{i1}}| + |s_{r_{i2}}|) |g_d| \frac{1}{\omega} \quad \text{für alle } c_1, c_2 \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

reicht hierfür aus,

$$|s_{r_{i1}}| + |s_{r_{i2}}| \leq os(\omega), \quad i = 1, 2, \quad (9.19)$$

zu verlangen. $os(\omega)$ lesen wir wiederum aus Bild 9.13 ab. Mit dieser Formulierung werden wir beim Entwurf mittels der DNA-Methode arbeiten. Andere Verfahren verwenden aber eine unstrukturierte Beschreibung der gewünschten quantitativen Eigenschaften. In solchen Fällen müssen wir eine Schranke für $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)]$ herleiten. Hierzu gehen wir folgendermaßen vor: Wir wiederholen das in Bild 9.13 gezeigte skalare Experiment, tragen aber nur die Amplitudengänge von Sensitivitätsfunktionen s_r auf, wenn die Antwort des (skalaren!) Übertragungssystems $s_r g_d$ auf Sprünge der Höhe $\sqrt{2}$ die vorgegebenen Zeitbereichsspezifikationen erfüllt (Bild 9.14).

Die resultierende (obere Schranke für $|s_r|$ nennen wir $\bar{\sigma}(\omega)$. Sie entspricht wiederum einer oberen Schranke für die skalare Ausgangsgröße:

$$|y(j\omega)| \leq \bar{\sigma}(\omega) |g_d(j\omega)| \frac{1}{\omega} \sqrt{2}. \quad (9.20)$$

Man beachte, daß os und $\bar{\sigma}$ nicht einfach über einen konstanten multiplikativen Faktor $\sqrt{2}$ zusammenhängen. Nun betrachten wir wieder den Mehrgrößen-Fall und fordern, daß die Beträge beider Komponenten des Vektors $y(j\omega)$ der Ungleichung (9.20) genügen. Wegen

$$|y_i(j\omega)| \leq \|y(j\omega)\|$$

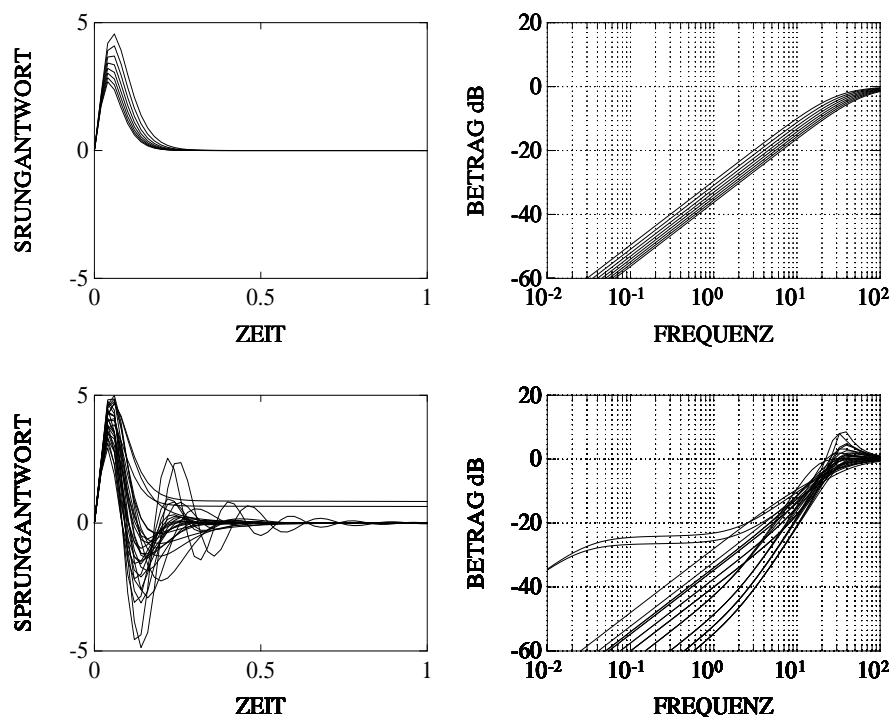


Bild 9.14: Antworten von $s_r g_d$ auf eine sprungförmige Anregung der Höhe 1.4142 (links) und Amplitudengänge von s_r (rechts).

$$\begin{aligned}
 &= \left\| S_r(j\omega) G_d(j\omega) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \frac{1}{j\omega} \right\| \\
 &\leq \bar{\sigma}[S_r(j\omega)] |g_d(j\omega)| \frac{1}{\omega} \left\| \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right\| \\
 &\leq \bar{\sigma}[S_r(j\omega)] |g_d(j\omega)| \frac{1}{\omega} \sqrt{2} \quad \text{für alle } c_1, c_2 \in [-1, 1]
 \end{aligned}$$

ist dies gewährleistet, wenn gilt

$$\bar{\sigma}[S_r(j\omega)] \leq \bar{\sigma}(\omega),$$

wenn $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)]$ also inner- oder unterhalb der in Bild 9.14 gezeigten Bänder verläuft.

Aus Versuchen an der realen Anlage weiß man, daß Stellgliedbegrenzungen in diesem Beispiel kein Problem darstellen: Ein Ansprechen der Begrenzungen kann bei jeder „vernünftigen“ Auslegung des Reglers ausgeschlossen werden. Diese in vielen Anwendungsfällen eminent wichtige Restriktion können wir also beim Entwurf vernachlässigen.

9.1.8.6 Der Entwurfsvorgang

Zunächst prüfen wir, ob die einfachst denkbare Möglichkeit – die Wahl von K_c als Einheits- oder 2×2 -Permutationsmatrix – zum Ziel führen kann. Die Verwendung einer Permutationsmatrix (i.e. das Vertauschen der Spalten des Streckenmodells bzw. eine Umordnung von Stell- und Regelgrößen) können wir von vornherein ausschließen: Physikalische Überlegungen, Analyse des Relative Gain Array und ein Inspizieren der verallgemeinerten Gershgorin-Bänder zeigen, daß diese Alternative keinen Sinn ergibt. Es bleibt also nur zu prüfen, ob sich die Entwurfsziele mit $K_c = I_2$, d.h. mittels einer diagonalen Reglermatrix erreichen lassen: Zunächst betrachten wir nur die Diagonalelemente des Streckenmodells und versuchen, die formulierten Forderungen (Stabilität, verschwindende bleibende Regeldifferenz, „genügend schnelle“ Reaktion i.e. „genügend große“ Durchtrittsfrequenz) für die Hauptregelkreise (g_{11} , k_1) und (g_{22} , k_2) zu verwirklichen. Dies gelingt sicher, wenn wir für k_i PI-Regler der Form

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \frac{1}{g_{11}(s)} \frac{40}{s} \\ &= -\frac{244s + 40}{1220s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(s) &= \frac{1}{g_{22}(s)} \frac{40}{s} \\ &= \frac{64s + 40}{324s} \end{aligned}$$

wählen. Nun untersuchen wir anhand der robusten verallgemeinerten Gershgorin-Bänder (Bild 9.15 zeigt einen Ausschnitt um den Ursprung), ob diese Wahl der Reglerelemente trotz Vernachlässigung von Kopplungen und Existenz von Modellunsicherheit Stabilität des Gesamtregelkreises garantiert. Offenbar überdecken die Bänder den kritischen Punkt und robuste Stabilität ist deswegen nicht sichergestellt. Durch einfaches Reduzieren der Verstärkungsfaktoren beider Teilregler können wir zwar die (Radien und Mittelpunkte der) gezeigten Gershgorin-Kreise soweit verkleinern, daß robuste Stabilität gewährleistet wird, wir erhalten aber einen viel zu langsamen Regelkreis: Selbst im nominellen Fall können die gewünschten quantitativen Eigenschaften nicht realisiert werden. Bild 9.16 zeigt die Reaktion der Regelgrößen im nominellen Kreis (nach Reduktion der Verstärkungsfaktoren) auf eine sprungförmige Erhöhung des Zulaufvolumenstroms um +20% (dies entspricht dem Fall, daß die in Bild 9.11 gezeigte Störung mit negativem Vorzeichen auf y_2 wirkt). Diese Ergebnisse wurden durch nichtlineare Simulation und Tests an der realen Anlage qualitativ bestätigt.

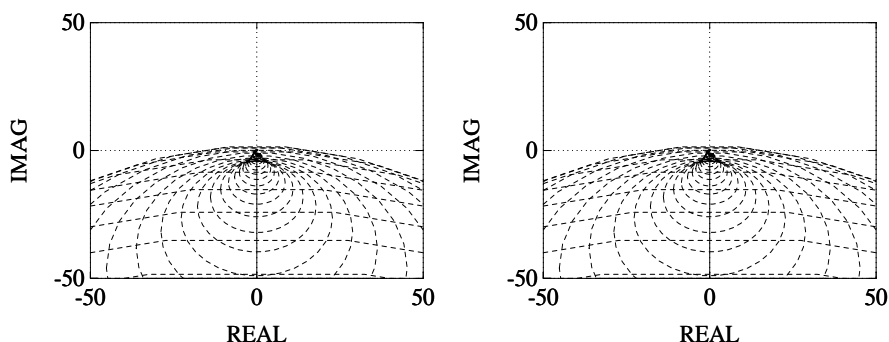


Bild 9.15: Robuste verallgemeinerte Gershgorin-Bänder von $G\text{diag}\{k_i\}$ (Ausschnitt).

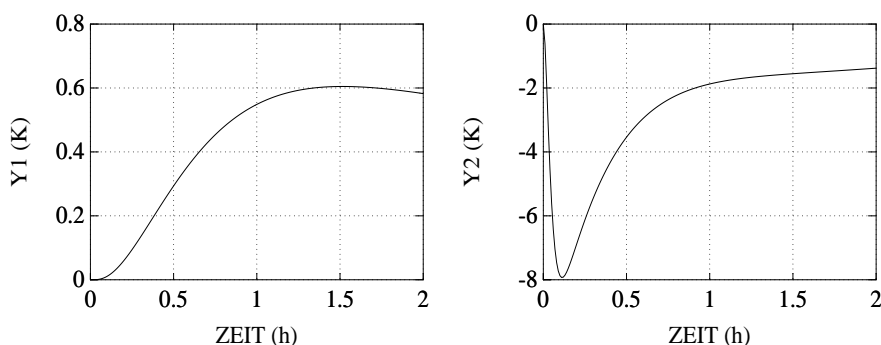


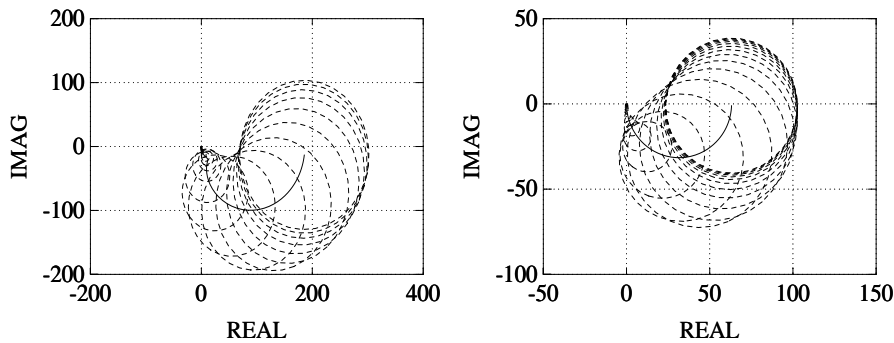
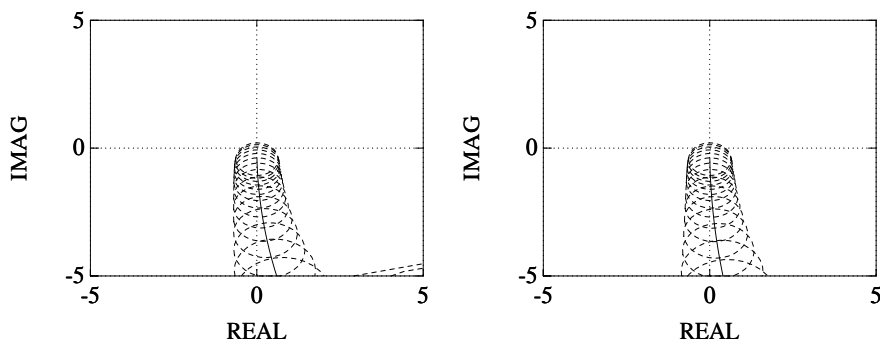
Bild 9.16: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen.

Da wir mit einer diagonalen Regler-Übertragungsmatrix nicht ans Ziel gelangen, versuchen wir uns an der nächst einfachsten Möglichkeit: der Verwendung einer konstanten Kompensationsmatrix K_c mit anschließendem Entwurf dynamischer skalarer Teilregler $k_1(s)$, $k_2(s)$. Als gewünschte Durchtrittsfrequenz für die Diagonalelemente q_{ii} des offenen Kreises wählen wir wiederum $40\frac{1}{h}$ – dies sollte zu einem genügend schnellen Eingreifen des Reglers führen. Wir wenden also den aus den Gleichungen (9.13) - (9.15) bestehenden Algorithmus zur näherungsweisen Invertierung für $\bar{\omega} = 40$ an und erhalten

$$K_c = \begin{bmatrix} -0.1972 & 0 \\ -0.5412 & 0.1948 \end{bmatrix}.$$

Bevor wir uns an die Auslegung der skalaren Teilregler machen, betrachten wir die in Bild 9.17 bzw. – in einem Ausschnitt um den Ursprung – Bild 9.18 aufgetragenen robusten verallgemeinerten Gershgorin-Bänder des kompensierten Streckenmodells

$$G'(s) = G(s)K_c.$$

Bild 9.17: Robuste verallgemeinerte Gershgorin-Bänder von GK_c .Bild 9.18: Robuste verallgemeinerte Gershgorin-Bänder von GK_c (Ausschnitt).

Die Bänder überdecken den kritischen Punkt offenbar nicht; ihre Phasendrehung bezüglich des kritischen Punktes beträgt Null. Da weder Streckenmodell noch Kompensationsmatrix K_c Pole auf oder rechts der imaginären Achse besitzen, läßt sich robuste Stabilität für die untersuchte Fehlerklasse problemlos erreichen. Den Teilreglern $k_i(s)$ kommt dann hauptsächlich die Aufgabe zu, den zur Unterdrückung bleibender Regeldifferenzen notwendigen Integralanteil in den Kreis einzubringen. Da wir die festgelegten Durchtrittsfrequenzen nicht verändern wollen, steht auch die hochfrequente Verstärkung fest: $k_i(\infty) = 1$. Wenn wir uns auf den einfachst möglichen Ansatz, eine PI-Struktur

$$k_i(s) = \frac{s + n_i}{s}, \quad i = 1, 2,$$

beschränken, bleiben nur noch die reellen Konstanten n_i zu bestimmen. Hierzu betrachten wir die Amplitudengänge der Diagonalelemente der kompensierten Matrix G' (Bild 9.19, obere Hälfte). Nun ist sofort klar, daß eine Wahl von $n_1 = 0.2$ und $n_2 = 1$ näherungsweise zum „idealen Amplitudengang“ der

klassischen Regelungstechnik – einem gleichförmigen Abfallen mit 20dB pro Dekade – führt (s. Bild 9.19, untere Hälfte).

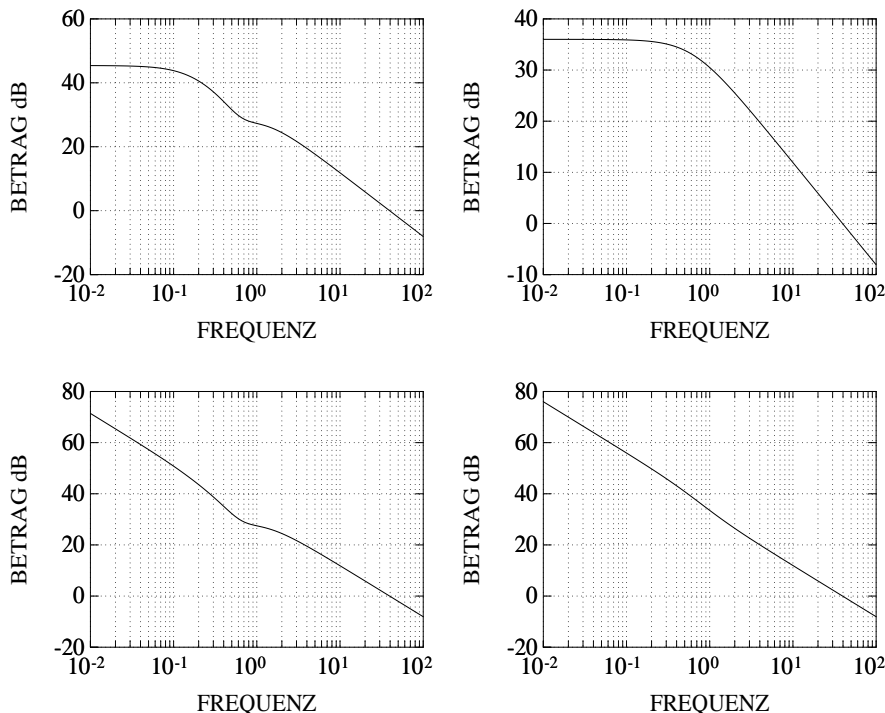


Bild 9.19: Amplitudengänge der Diagonalelemente von G' (oben) und $G' \text{diag}\{k_i\}$ (unten).

Da die so festgelegten Teilregler die (robusten verallgemeinerten) Gershgorin-Bänder für große Frequenzen kaum beeinflussen, ersparen wir uns ein erneutes Auftragen. Nicht-Überdeckung des kritischen Punktes und korrekte Phasendrehung – und damit robuste Stabilität – bleiben gewährleistet. Nun muß nur noch geprüft werden, ob der resultierende Mehrgrößen-Regler

$$K(s) = K_c \text{diag}\{k_i(s)\} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -(0.1972s + 0.0394) & 0 \\ -(0.5412s + 0.1082) & 0.1948s + 0.1948 \end{bmatrix}$$

die gewünschten quantitativen Eigenschaften erzwingt. Wir simulieren zunächst die Sprungantwort des nominellen Kreises auf eine sprungförmige Erhöhung des Zulaufvolumenstroms um +20% (i.e. dem Einwirken der in Bild 9.11 gezeigten Störung mit negativem Vorzeichen auf y_2). Die obere Hälfte von Bild 9.20 zeigt das Resultat: Die Regelgrößen erfüllen die formulierten Zeitbereichsspezifikationen. Auch ein gleichzeitiges Einwirken von „worst case“ Störsignalen auf beide Regelgrößen wird vom Regler zufriedenstellend beherrscht (vgl. Bild 9.20, untere Hälfte). Außerdem berechnen wir die obe-

ren Schranken (9.9) für die Amplitudengänge der Elemente der Sensitivitätsmatrix im fehlerbehafteten Fall ($|s_{rij}|$, $i, j = 1, 2$). Hieraus kann man leicht die maximal möglichen Verläufe für die Größen $|s_{ri1}(j\omega)| + |s_{ri2}(j\omega)|$, $i = 1, 2$, bestimmen. Sie sind in Bild 9.21 aufgetragen. Offensichtlich liegen sie im Innern des in Bild 9.13 gezeigten „zulässigen“ Bereiches; wir können also mit einiger Zuversicht davon ausgehen, daß die geforderten Zeitbereichsspezifikationen für alle zulässigen Modellfehler eingehalten werden.

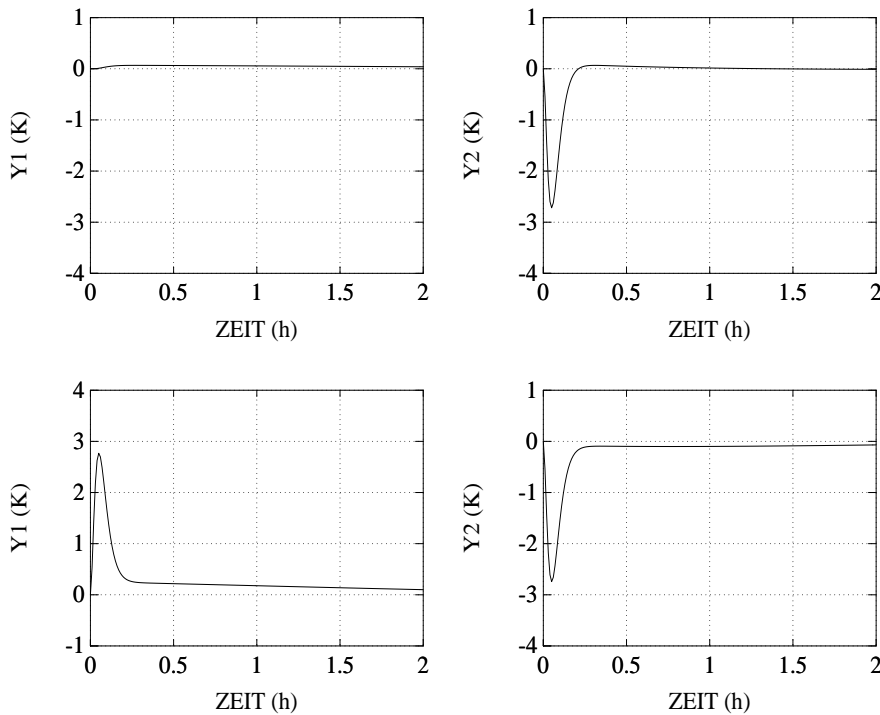


Bild 9.20: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen, Störfall 1 (oben) und Störfall 2 (unten).

9.1.9 Wertung

Bei Verwendung der DNA-Methode wird der Mehrgrößenentwurf auf eine Reihe von Eingrößen-Problemen zurückgeführt. Benutzer, die über Erfahrungen mit den Entwurfswerkzeugen der klassischen Regelungstechnik verfügen, sehen darin meist einen nicht zu unterschätzenden Vorteil: Sie können diese Erfahrung direkt einbringen. Potentielle Anwender, denen dieser Hintergrund abgeht, empfinden den DNA-Ansatz dagegen oft als umständlich, indirekt und – im Vergleich zu den später behandelten H_∞ -Methoden – „unpräzise“. Angesichts seiner nicht zu übersehenden Vorzüge zahlt sich eine Über-

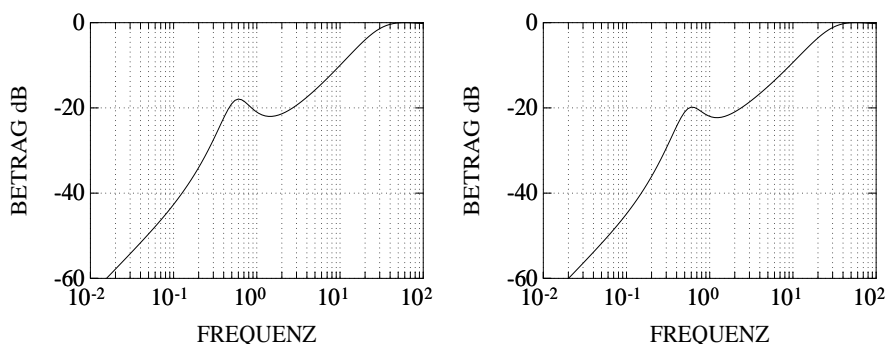


Bild 9.21: Obere Schranken für $|s_{ri1}(j\omega)| + |s_{ri2}(j\omega)|$, $i = 1$ (links) und $i = 2$ (rechts).

windung anfänglichen Unbehagens aber in aller Regel aus. Anders als H_∞ und andere „modernere“ Verfahren ermöglicht DNA die Einbeziehung der Regler-Komplexität in den Entwurfsvorgang. So kann der Anwender darüber entscheiden, ob er sich mit schlechteren quantitativen Regelkreiseigenschaften zufrieden gibt und dafür einen einfachen Regler (z.B. mit PI-Struktur) erhält. Durch die direkte Kontrolle über die Komplexität des Reglers lassen sich unerwünschte Pol-Nullstellenkürzungen leicht vermeiden. Ein weiterer Vorteil ist die Möglichkeit, unabhängige Fehler in den Elementen des Streckenmodells zu behandeln. Solche Fehler bilden in vielen Anwendungsfällen die „natürlichste“ Darstellung von Modellunsicherheit. Schließlich erhält man beim DNA-Entwurf automatisch einen Regelkreis mit Integrität bezüglich Sensor-Ausfällen. Da man mit physikalisch „semi-relevanten“ Größen (den Diagonalelementen der kompensierten Strecken-Übertragungsmatrix) arbeitet, kann man die Regelgrößen direkt beeinflussen und verschiedene Spezifikationen für einzelne Regelgrößen leicht realisieren. Andererseits hat man in der zweiten Entwurfsstufe keinen direkten Einfluß auf die Stellgrößen mehr: diese sind im „Innern“ der kompensierten Strecken-Übertragungsmatrix „versteckt“. Sind Probleme mit Stellgliedbegrenzungen zu erwarten, so stellt dies einen gewichtigen Nachteil dar. Weiterhin sollte man im Auge behalten, daß die hier vorgestellte Entwurfsprozedur für Systeme mit vier oder mehr Ein- und Ausgangsvariablen schnell unübersichtlich wird.

9.2 Das Verfahren der charakteristischen Ortskurven

Dieses Verfahren wird oft auch als *CL (Characteristic Locus) Methode* bezeichnet. *MacFarlane* und *Kouvaritakis* [65] fassen die diesem Entwurfsansatz zugrundeliegende Idee folgendermaßen zusammen:

„The essence of the Characteristic Locus Method is the manipulation of the set of frequency-conscious eigenvalues and eigenvectors of an open-loop transfer function matrix in such a way as to achieve a desired closed-loop response for a multivariable feedback system.“

Diese Charakterisierung wirft drei Fragen auf:

1. Was ist unter Eigenwerten und Eigenvektoren einer Übertragungsmatrix zu verstehen?
2. Wie lassen sich Entwurfsziele durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Übertragungsmatrix $Q(s)$ ausdrücken?
3. Wie können wir Eigenwerte und Eigenvektoren einer Übertragungsmatrix geeignet manipulieren?

1 und 2 stellen geringfügige Variationen bereits behandelter Fragestellungen dar und lassen sich deshalb recht kurz beantworten; Punkt 3 – die eigentliche Entwurfsprozedur – werden wir in etwas größerer Ausführlichkeit darstellen.

9.2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von Übertragungsmatrizen

Eigenwerte und Eigenvektoren einer Übertragungsmatrix werden auf genau dieselbe Weise definiert wie die entsprechenden Größen im Falle konstanter Matrizen: $Q(s)$ sei eine $p \times p$ -Übertragungsmatrix. Die durch

$$\lambda_{Q_i}(s)v_i(s) = Q(s)v_i(s)$$

definierten Skalare $\lambda_{Q_i}(s)$ werden als Eigenwerte oder *charakteristische Übertragungsfunktionen*, die $v_i(s)$ als Eigenvektoren oder *charakteristische Richtungen* der Übertragungsmatrix $Q(s)$ bezeichnet. Als Bestimmungsgleichung für die charakteristischen Übertragungsfunktionen ergibt sich

$$\det \{ \lambda_Q(s)I_p - Q(s) \} = 0.$$

Die linke Seite – ein Polynom p -ten Grades in λ_Q mit rationalen Funktionen in s als Koeffizienten – kann aber i.a. nicht in Linearfaktoren mit entsprechenden Koeffizienten aufgespalten werden. Die Eigenwerte der Übertragungsmatrix $Q(s)$ sind also normalerweise keine rationalen Funktionen in s .

Beispiel: Die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte der Matrix

$$Q(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{s} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$\left(\lambda_Q^2(s) + \frac{1}{s(s+1)} \right) \left(\lambda_Q^2(s) + \frac{1}{s(s+2)} \right) = 0$$

Die beiden Faktoren

$$\Lambda_1(\lambda_Q, s) := \lambda_Q^2(s) + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\Lambda_2(\lambda_Q, s) := \lambda_Q^2(s) + \frac{1}{s(s+2)}$$

können nicht weiter zerlegt werden. (Man nennt sie deshalb „nicht reduzierbar“.) Als Eigenwerte von $Q(s)$ ergeben sich deshalb die nicht-rationalen Terme

$$\lambda_{Q_i}(s) = \pm \sqrt{\frac{-1}{s(s+1)}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\lambda_{Q_i}(s) = \pm \sqrt{\frac{-1}{s(s+2)}}, \quad i = 3, 4.$$

Die in diesem Beispiel aufgetretenen Phänomene lassen sich leicht verallgemeinern:

Das Polynom $\det \{ \lambda_Q(s) I_p - Q(s) \}$ kann in r nicht weiter reduzierbare Faktoren $\Lambda_k(\lambda_Q, s)$, $k = 1, \dots, r$, aufgespalten werden:

$$\det \{ \lambda_Q(s) I_p - Q(s) \} = \prod_{k=1}^r \Lambda_k(\lambda_Q, s), \quad 1 \leq r \leq p.$$

Jeder dieser Faktoren ist ein Polynom in λ_Q mit rationalen Funktionen $a_{kl}(s)$, $l = 0, 1, \dots, r_k - 1$, als Koeffizienten:

$$\Lambda_k(\lambda_Q, s) = \lambda_Q^{r_k} + a_{k(r_k-1)}(s)\lambda_Q^{r_k-1} + \dots + a_{k0}(s).$$

Eine derart definiertes $\lambda_Q(s)$ wird als *algebraische Funktion* bezeichnet⁶. Diese algebraische Funktion zerfällt in r_k Zweige, von denen jeder als einfache, auf der komplexen Ebene definierte Funktion $\lambda_{Q_i}(s)$ interpretiert werden kann. Eine $p \times p$ -Übertragungsmatrix besitzt also $r_1 + r_2 + \dots + r_k = p$ Eigenwerte oder charakteristische Übertragungsfunktionen $\lambda_{Q_i}(s)$, $i = 1, \dots, p$. Genau wie Eigenwerte sind auch die Elemente der Eigenvektoren normalerweise keine rationalen Funktionen in s .

Im allgemeinen sind wir nicht an einem geschlossenen Ausdruck für die charakteristischen Übertragungsfunktionen oder die charakteristischen Richtungen interessiert. Für unsere Zwecke reicht üblicherweise die Kenntnis der Nyquist-Ortskurven der $\lambda_{Q_i}(s)$. Mit diesen *charakteristischen Ortskurven* haben wir uns schon in vorangehenden Kapiteln vertraut gemacht – z.B. bei der Behandlung des verallgemeinerten Nyquist-Kriteriums. Man beschafft sie sich durch Berechnen, Auftragen und Verbinden der Lösungen einer genügend großen Zahl konstanter Eigenwertprobleme

$$\det \{ \lambda_Q(s_k)I_p - Q(s_k) \} = 0, \quad s_k \in \mathcal{N}_1, \\ k = 1, \dots, N.$$

9.2.2 Charakteristische Ortskurven und der geschlossene Regelkreis

In diesem Abschnitt befassen wir uns damit, wie sich Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $Q(s) = G(s)K(s)$ auf das Verhalten des geschlossenen Regelkreises auswirken. Die Frage der nominellen Stabilität wurde bereits in Kapitel 5.1 beantwortet: Laut verallgemeinertem Nyquist-Theorem ist der geschlossene Regelkreis (G, K) genau dann asymptotisch stabil, wenn die charakteristischen Ortskurven von Q bezüglich des kritischen Punktes eine Phasendrehung von insgesamt $\pi(m_G + m_K)$ aufweisen.

Zur Beurteilung quantitativer Eigenschaften betrachten wir die Eigenwerte und Eigenvektoren von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix: Wir nehmen an, alle Eigenvektoren $v_i(s)$ von $Q(s)$ seien linear

⁶Eine algebraische Funktion kann man sich als Verallgemeinerung einer einfachen Funktion einer komplexen Variablen vorstellen. Ihr Definitionsbereich ist eine *Riemannsche Fläche*, die man durch geeignetes „Aneinanderheften“ von r_k Kopien der komplexen Ebene erhält. Mathematische Details werden im folgenden aber nicht benötigt.

unabhängig, die Matrix $V(s) := [v_1(s) \dots v_p(s)]$ also nichtsingulär. Aus der Eigenzerlegung

$$Q(s) = V(s) \operatorname{diag}\{\lambda_{Q_i}(s)\}V^{-1}(s)$$

können wir sofort auf Eigenzerlegungen von S und T schließen:

$$\begin{aligned} S(s) &= (I_p + Q(s))^{-1} \\ &= V(s) \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{1 + \lambda_{Q_i}(s)}\right\}V^{-1}(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(s) &= (I_p + Q(s))^{-1}Q(s) \\ &= V(s) \operatorname{diag}\left\{\frac{\lambda_{Q_i}(s)}{1 + \lambda_{Q_i}(s)}\right\}V^{-1}(s). \end{aligned}$$

Die charakteristischen Richtungen von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix stimmen also mit denen von $Q(s)$ überein; die charakteristischen Übertragungsfunktionen hängen in „Eingrößen-Art“ von den Eigenwerten von $Q(s)$ ab.

Quantitative Eigenschaften und Robustheit eines Regelkreises lassen sich allerdings nicht direkt anhand von Eigenwerten und Eigenvektoren untersuchen. Die einfachste Möglichkeit, solche Anforderungen zu spezifizieren besteht in der Verwendung von Singulärwerten, genauer in der Vorgabe oberer Schranken für die größten Singulärwerte von S , T bzw. Q und/oder unterer Schranken für den kleinsten Singulärwert von Q in entsprechenden Frequenzbereichen (vgl. Abschnitt 6.3). Singulärwerte einer Matrix schätzen die Beträge ihrer Eigenwerte nach unten und oben ab:

$$\underline{\sigma}[Q(j\omega)] \leq |\lambda_{Q_i}(j\omega)| \leq \bar{\sigma}[Q(j\omega)], \quad i = 1, \dots, p.$$

Beziehungen wie

$$|\lambda_{Q_i}(j\omega)| \geq \frac{f(\omega)}{1 - l_M(\omega)}; \quad i = 1, \dots, p, \quad \omega \in \Omega_{rd},$$

oder

$$|\lambda_{Q_i}(j\omega)| \leq \frac{g(\omega)}{1 + l_M(\omega)}; \quad i = 1, \dots, p, \quad \omega \in \Omega_\eta.$$

stellen deswegen lediglich notwendige, nicht aber hinreichende Bedingungen für Robustheitskriterien wie (6.45) und (6.46) dar. Andererseits kann man anhand der Eigenvektoren einer Matrix leicht beurteilen, ob eine signifikante Diskrepanz zwischen Singulärwerten und Beträgen der Eigenwerte zu erwarten

ist, ob also die Beträge der Eigenwerte als „vertrauenswürdige“ Indikatoren für quantitative und Robustheitseigenschaften gelten können: Große Unterschiede zwischen $\sigma_i[Q(j\omega)]$ und $|\lambda_{Q_i}(j\omega)|$ können nur auftreten, wenn die Eigenvektoren der Matrix $Q(j\omega)$ „sehr schief“ aufeinander stehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Eigenvektoren v_1 und v_2 beträgt

$$\alpha = \arccos \frac{v_1^* v_2}{\sqrt{v_1^* v_1} \sqrt{v_2^* v_2}} = 0.6^\circ;$$

als Singulärwerte und Beträge der Eigenwerte erhält man

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}[Q] &= 0.02, & \bar{\sigma}[Q] &= 100.025, \\ |\lambda_{Q_1}| &= 1, & |\lambda_{Q_2}| &= 2. \end{aligned}$$

Für

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

berechnet man als Winkel zwischen beiden Eigenvektoren hingegen 71.6° , und die Eigenwerte liegen betragsmäßig dicht an den Singulärwerten $\underline{\sigma}[Q] = 0.9822$, $\bar{\sigma}[Q] = 2.0363$.

Anhand der charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises können wir also (exakt) Stabilität des nominellen Regelkreises beurteilen. Stehen die Eigenvektoren der Matrix $Q(j\omega)$ nicht „zu schief“ aufeinander, so können wir außerdem die $|\lambda_{Q_i}(j\omega)|$ als gute Indikatoren für die Singulärwerte von $Q(j\omega)$ betrachten und sie zur (näherungsweise) Charakterisierung von unstrukturierten quantitativen Anforderungen und Robustheitseigenschaften heranziehen. Nun benötigen wir eine Methode, die charakteristischen Ortskurven geeignet zu formen.

9.2.3 Manipulation charakteristischer Ortskurven

Wir gehen von einer (frequenzabhängigen) Eigenzerlegung des (für den Moment als quadratisch angenommenen) Streckenmodells $G(s)$ aus:

$$G(s) = V_G(s) \operatorname{diag}\{\lambda_{G_i}(s)\} V_G^{-1}(s).$$

Zwischen den charakteristischen Übertragungsfunktionen $\lambda_{G_i}(s)$ und $\lambda_{K_i}(s)$ besteht nur dann ein einfacher Zusammenhang, wenn die charakteristischen Richtungen von Regler-Übertragungsmatrix

$$K(s) = V_K(s) \operatorname{diag}\{\lambda_{K_i}(s)\} V_K^{-1}(s)$$

und Streckenmodell G übereinstimmen, i.e., wenn $V_G(s) = V_K(s)$. In diesem Fall spricht man von einem *kommutativen Regler* – zwei Matrizen mit denselben Eigenvektoren kommutieren (man kann sie bei der Multiplikation vertauschen). Als Übertragungsmatrix des offenen Kreises ergäbe sich

$$\begin{aligned} Q(s) &= V_G(s) \operatorname{diag}\{\lambda_{G_i}(s)\} \underbrace{V_G^{-1}(s) V_K(s)}_{=I_p} \operatorname{diag}\{\lambda_{K_i}(s)\} \underbrace{V_K^{-1}(s)}_{=V_G^{-1}(s)} \\ &= V_G(s) \operatorname{diag}\{\lambda_{G_i}(s) \lambda_{K_i}(s)\} V_G^{-1}(s), \end{aligned}$$

der gesuchte Zusammenhang zwischen den charakteristischen Übertragungsfunktionen wäre

$$\lambda_{Q_i}(s) = \lambda_{G_i}(s) \lambda_{K_i}(s).$$

Man hätte in diesem Fall das Problem, die charakteristischen Ortskurven von Q geeignet zu formen, auf ein gewöhnliches skalares Entwurfs-Problem (die Bestimmung geeigneter $\lambda_{K_i}(s)$) zurückgeführt. Da die Elemente von V_G aber i.a. keine rationalen Funktionen in s sind, würde sich für eine solche Wahl von V_K (bis auf wenige Ausnahmen, wie z.B. $\operatorname{diag}\lambda_{K_i} = \lambda_K I_p$) keine rationale Reglermatrix $K(s)$ ergeben: Der Regler könnte also nicht als System gewöhnlicher Differentialgleichungen realisiert werden. Deswegen muß man sich i.a. darauf beschränken, einen kommutativen Regler zu *approximieren*. Hierzu gehen wir folgendermaßen vor: Angenommen, die charakteristischen Ortskurven sollen in einer Umgebung der Frequenz $\bar{\omega}$ geeignet beeinflußt werden. Dann wählen wir als Ansatz für den Regler

$$K(s) = E \operatorname{diag}\{k_i(s)\} E^{-1}$$

mit einer konstanten reellen Matrix E , die die komplexwertige Matrix $V_G(\bar{\omega})$ approximiert. Wir suchen also ein reelles E , das

$$\min_{E, \phi_i} \left\| V_G^{-1}(\bar{\omega}) E - \operatorname{diag}\{e^{j\phi_i}\} \right\|_F$$

löst. Dieses Problem haben wir in Abschnitt 9.1 bereits behandelt: wir können die least-squares-Version des Align-Algorithmus (Gln. (9.13) - (9.15)) unmittelbar zur Bestimmung einer geeigneten Matrix E verwenden.

Wenn eine genügend genaue Approximation gelingt, können die Eigenwerte von GK an der Frequenz $\bar{\omega}$ als Produkt der Eigenwerte λ_{G_i} und der Reglerkomponenten k_i angesehen werden:

$$\begin{aligned} G(j\bar{\omega})K(j\bar{\omega}) &= V_G(j\bar{\omega}) \operatorname{diag}\{\lambda_{G_i}(j\bar{\omega})\} \underbrace{V_G^{-1}(j\bar{\omega}) E}_{\approx \operatorname{diag}\{e^{j\phi_i}\}} \operatorname{diag}\{k_i(j\bar{\omega})\} E^{-1} \\ &\approx V_G(j\bar{\omega}) \operatorname{diag}\{\lambda_{G_i}(j\bar{\omega})\} \operatorname{diag}\{e^{j\phi_i}\} \operatorname{diag}\{k_i(j\bar{\omega})\} \operatorname{diag}\{e^{-j\phi_i}\} V_G^{-1}(j\bar{\omega}) \\ &= V_G(j\bar{\omega}) \operatorname{diag}\{\lambda_{G_i}(j\bar{\omega})k_i(j\bar{\omega})\} V_G^{-1}(j\bar{\omega}). \end{aligned}$$

9.2.4 Der Entwurfsvorgang

Der Entwurf verläuft typischerweise in drei Schritten: Man spaltet die Frequenzachse in drei Bereiche auf und entwirft für je einen Wert dieser Frequenzabschnitte einen konstanten oder approximativ kommutativen Regler. Traditionell werden diese Bereiche als „hoch-“, „mittel-“ und „niederfrequent“ bezeichnet. Wir werden diese Bezeichnung beibehalten, obwohl wir den „hochfrequenten“ Entwurf in der Nähe der gewünschten Durchtrittsfrequenzen durchführen werden.

9.2.4.1 Kompensation im Bereich „hoher“ Frequenzen

ω_{h_i} sei die gewünschte Durchtrittsfrequenz für die i -te charakteristische Ortskurve, $i = 1, \dots, p$. Wir versuchen, die Frequenzgangmatrix des offenen Kreises für eine Frequenz $\omega_h \in [\min\{\omega_{h_i}\}, \max\{\omega_{h_i}\}]$ näherungsweise zu diagonalisieren: Hierfür lassen sich zwei Gründe anführen: Ist $Q(j\omega_h)$ näherungsweise diagonal, so gilt dies auch für Sensitivitätsmatrix $S(j\omega_h)$ und komplementäre Sensitivitätsmatrix $T(j\omega_h)$ – sowohl Führungs- als auch Störverhalten sind in diesem Frequenzbereich entkoppelt. Darüberhinaus stimmen bei einer „Fast-Diagonalmatrix“ Singulärwerte und Beträge der Eigenwerte nahezu überein – im betrachteten Frequenzbereich können die charakteristischen Ortskurven deshalb auch zur Untersuchung von Robustheit und quantitativen Regelkreiseigenschaften herangezogen werden. Die „Entkopplungsprozedur“ verläuft folgendermaßen: Wir berechnen unter Verwendung des Align-Algorithmus eine reelle Matrix K'_h , so daß $G(\omega_h)K'_h \approx \operatorname{diag}\{e^{j\phi_i}\}$. Durch Multiplikation mit

geeigneten skalaren Verstärkungsfaktoren $\text{diag}\{k_{h_i}\}$ können wir (bei Bedarf) verschiedene Durchtrittsfrequenzen ω_{h_i} für die charakteristischen Ortskurven der resultierenden Matrix

$$Q_h := G \underbrace{K'_h \text{diag}\{k_{h_i}\}}_{:=K_h} \quad (9.21)$$

realisieren. Die Vorzeichen der k_{h_i} wählen wir so, daß in den folgenden Schritten möglichst wenige Korrekturen zur Erfüllung des verallgemeinerten Nyquist-Kriteriums notwendig sind. Man beachte, daß mittels eines solchen Ansatzes auch ein nichtquadratisches $p \times q$ -Streckenmodell ($p < q$) behandelt werden kann; als Resultat ergibt sich natürlich ein quadratisches $Q_h(s)$.

9.2.4.2 Kompensation im Bereich mittlerer Frequenzen

Nun betrachten wir die charakteristischen Ortskurven des Ergebnisses des ersten Entwurfsschritts. Bedürfen diese in der Nähe des kritischen Punktes einer Korrektur, so approximieren wir für eine Frequenz $\omega_m < \omega_h$ einen kommutativen Regler für das in (9.21) berechnete Q_h . Lautet die Eigenzerlegung von $Q_h(j\omega_m)$

$$Q_h(j\omega_m) = V_h(j\omega_m) \text{diag}\{\lambda_{h_i}(j\omega_m)\} V_h^{-1}(j\omega_m),$$

so wählen wir die Matrix E_m in

$$K_m(s) = E_m \text{diag}\{k_{m_i}(s)\} E_m^{-1}$$

als reelle Approximation von $V_h(j\omega_m)$. Die Produkte $\lambda_{h_i}(j\omega) k_{m_i}(j\omega)$ stellen dann in einer Umgebung der Frequenz ω_m eine Näherung der charakteristischen Frequenzgänge von

$$Q_m := Q_h K_m$$

dar:

$$\lambda_{m_i}(j\omega) \approx \lambda_{h_i}(j\omega) k_{m_i}(j\omega) \quad \text{für } \omega \approx \omega_m.$$

Die $k_{m_i}(s)$ können deswegen mittels klassischer Eingrößen-Entwurfsmethoden so ausgelegt werden, daß die notwendige Phasendrehung bezüglich des kritischen Punktes gewährleistet ist, und die charakteristischen Ortskurven von Q_m diesen Punkt in „gebührendem“ Abstand passieren (hier kommen die „klassischen“ Begriffe der Amplituden- und Phasenreserve zum Tragen). Weiterhin wollen wir natürlich verhindern, daß der zweite Entwurfsschritt die zuvor erreichte Entkopplung für $\omega = \omega_h$ zerstört. Deswegen streben wir

$$k_{m_i}(j\omega) \rightarrow 1 \quad \text{für } \omega \rightarrow \omega_h, \quad i = 1, \dots, p, \quad (9.22)$$

an. In vielen Fällen wird die Frequenz ω_m , für die der Verlauf der charakteristischen Ortskurven verändert werden muß, allerdings zu nahe an der Frequenz ω_h liegen, als daß (9.22) verwirklicht werden könnte. Dann läßt sich nicht verhindern, daß beide Entwurfsschritte kollidieren; man muß versuchen, die jeweils verfolgten Ziele gegeneinander abzuwägen.

9.2.4.3 Kompensation im Bereich niedriger Frequenzen

Der Entwurf im niederfrequenten Bereich verläuft ganz ähnlich wie im Abschnitt mittlerer Frequenzen: Man betrachtet wiederum das Ergebnis des vorangehenden Schrittes und überlegt, wie die charakteristischen Ortskurven verändert werden müssen, um regelungstechnische Ziele zu verwirklichen. Im niederfrequenten Bereich wird man üblicherweise betragsmäßig große Eigenwerte der Matrix $Q(j\omega)$ anstreben – wenn die zugehörigen Eigenvektoren nicht „zu schief“ aufeinander stehen, sichert dies große Singulärwerte $\sigma_i[Q(j\omega)]$ und deshalb kleine Regeldifferenzen (vgl. die Diskussion in Abschnitt 5.2). Sollen insbesondere die bleibenden Regeldifferenzen für alle sprungförmigen Anregungen verschwinden, so muß jeder Eigenwert einen Integralanteil aufweisen. Wir beginnen also mit einer Eigenzerlegung von Q_m für eine kleine Frequenz ω_n

$$Q_m(j\omega_n) = V_m(j\omega_n) \text{diag}\{\lambda_{m_i}(j\omega_n)\}V_m^{-1}(j\omega_n)$$

und approximieren (für diese Frequenz) einen kommutativen Regler:

$$K_n(s) = E_n \text{diag}\{k_{n_i}(s)\}E_n^{-1}.$$

E_n wird also als reelle Näherung von $V_m(j\omega_n)$ gewählt; die $k_{n_i}(s)$ werden so festgelegt, daß sie die gewünschten Verstärkungen erzeugen und die Resultate der beiden ersten Entwurfsschritte nicht zerstören:

$$k_{n_i}(j\omega) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \omega \rightarrow \omega_m, \omega_h, \quad i = 1, \dots, p.$$

Als „Gesamt-Regler“ erhalten wir schließlich die Reihenschaltung der in den drei Frequenzbereichen entworfenen Regler-Übertragungsmatrizen K_h , $K_m(s)$ und $K_n(s)$:

$$K(s) := K_h K_m(s) K_n(s).$$

Man muß sich allerdings ständig vor Augen halten, daß diese Vorgehensweise (in Bezug auf gewünschte quantitative Regelkreiseigenschaften) nur dann einen Sinn ergibt, wenn die Beträge der frequenzabhängigen Eigenwerte eine genügend genaue Näherung der Singulärwerte darstellen. Um dies zu überprüfen kann man entweder die Winkel zwischen den Eigenvektoren der Matrix $Q(j\omega)$ über der Frequenz auftragen oder direkt die Singulärwerte der interessierenden Frequenzgangmatrizen $Q(j\omega)$ bzw. $S(j\omega)$ und $T(j\omega)$ berechnen.

9.2.5 Beispiel: Zweistoffdestillation

Zur Durchführung des ersten Schritts beim CL-Entwurf müssen wir uns entscheiden, welche Durchtrittsfrequenzen wir für die charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises anstreben. Hierfür sind zwei Überlegungen ausschlaggebend: Um Robustheit von Stabilität gegenüber allen zulässigen unstrukturierten multiplikativen Modellfehlern Δ_M in (9.17) zu garantieren, darf der größte Singulärwert der komplementären Sensitivitätsmatrix $T(j\omega)$ für keine Frequenz oberhalb der Inversen der in Bild 9.9 dargestellten Fehlerschranke liegen. Die Durchtrittsfrequenzen der $\lambda_{Q_i}(j\omega)$ stellen i.a. eine recht gute Approximation der Bandbreiten der $(1 + \lambda_{Q_i}(j\omega))^{-1} \lambda_{Q_i}(j\omega)$, i.e. der Bandbreiten der Eigenwerte von $T(j\omega)$ dar. Da wir die Frequenzgangmatrix des offenen Kreises (und damit auch die komplementäre Sensitivitätsmatrix) im Bereich der gewünschten Durchtrittsfrequenzen näherungsweise diagonalisieren, stimmen die Beträge der Eigenwerte von $T(j\omega)$ dort gut mit den Singulärwerten überein. Wir schließen also, daß die gewünschten Durchtrittsfrequenzen nicht größer als $40\frac{1}{h}$ sein dürfen. Andererseits soll $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)]$ inner- oder unterhalb der in Bild 9.14 gezeigten Bänder verlaufen. Deshalb möchte man die Durchtrittsfrequenzen möglichst weit nach rechts verschieben. Es drängt sich also die Wahl

$$\omega_{h1} = \omega_{h2} = \omega_h = 40$$

auf. Mittels des Align-Algorithmus berechnen wir eine reelle Matrix K'_h , die $G(j40)K'_h \approx \text{diag}\{e^{j\phi_i}\}$ erzwingt – sie stimmt natürlich mit der beim DNA-Entwurf berechneten Kompensationsmatrix K_c überein:

$$K'_h = \begin{bmatrix} -0.1972 & 0 \\ -0.5412 & 0.1948 \end{bmatrix}.$$

Nun betrachten wir die in Bild 9.22 gezeigten charakteristischen Ortskurven des Produkts GK'_h .

Sie passieren den kritischen Punkt in gebührendem Abstand. Für das untersuchte Problem existiert kein Grund, zwischen den beiden Ortskurven zu unterscheiden. Da außerdem die geforderte Phasendrehung (0) bereits vorhanden ist, können wir die k_{h_i} , $i = 1, 2$, gleich 1 setzen, den zweiten Entwurfsschritt – die Kompensation im Bereich „mittlerer“ Frequenzen – auslassen und uns direkt Schritt 3 zuwenden. Im Bereich kleiner Frequenzen wollen wir den charakteristischen Ortskurven in erster Linie einen Integralanteil anfügen, um $S(j0) = 0$ (und damit das Verschwinden bleibender Regeldifferenzen nach sprungförmigen Anregungen) zu erzwingen. Wir setzen also eine Kompensationsmatrix

$$K_n(s) = E_n \begin{bmatrix} k_{n1}(s) & 0 \\ 0 & k_{n2}(s) \end{bmatrix} E_n^{-1}$$

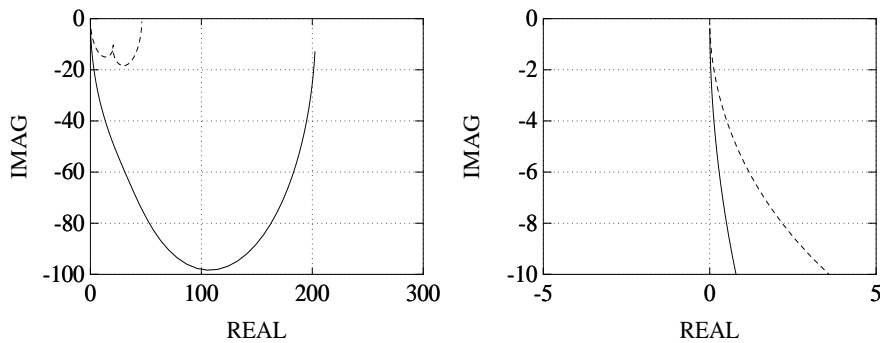


Bild 9.22: Charakteristische Ortskurven von GK'_h . Gesamtansicht (links) und Nähe des Ursprungs (rechts).

an, in der die Elemente k_{n_i} , $i = 1, 2$, PI-Struktur besitzen:

$$k_{n_i} = \frac{s + n_i}{s}.$$

Um die Zählerkoeffizienten festzulegen, inspizieren wir die Amplitudengänge der Eigenwerte von $G(j\omega)K'_h$. Sie sind in der linken Hälfte von Bild 9.23 aufgetragen. Wir wählen die freien Koeffizienten so, daß beide Amplitudengänge ungefähr übereinstimmen und in einem möglichst großen Frequenzbereich mit 20dB pro Dekade abfallen: $n_1 = 1$, $n_2 = 0.2$. Nun müssen wir nur noch die konstante Matrix E_n bestimmen, so daß die Kompensationsmatrix K_n und GK'_h im betrachteten Frequenzbereich tatsächlich näherungsweise kommutieren, die gewählten $k_{n_i}(s)$ also wirklich die Eigenwerte von GK'_h beeinflussen. Wir wählen also eine Frequenz aus dem fraglichen Bereich (z.B. $\omega_n = 0.6$) und berechnen E_n mit Hilfe des Align-Algorithmus als reelle Approximation der Eigenvektormatrix von $G(\omega_n)K'_h$. Wir erhalten als Regler

$$K(s) = K'_h K_n(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -(0.1972s + 0.1236) & 0.0402 \\ -(0.5412s + 0.4913) & 0.1948s + 0.2221 \end{bmatrix}.$$

Die Beträge der Eigenwerte der resultierenden Frequenzgangmatrix $Q(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ sind in der rechten Hälfte von Bild 9.23 gezeigt.

Nun bleibt noch zu prüfen, ob wir anhand dieser Beträge eine verlässliche Aussage über die Singulärwerte von Q bzw. S und T wagen können. Hierzu können wir entweder die Winkel zwischen den Eigenvektoren von $Q(j\omega)$ über der Frequenz auftragen oder – besser – direkt die Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix betrachten (Bild 9.24).

$\bar{\sigma}[S(j\omega)]$ verläuft offenbar innerhalb des in Bild 9.14 gezeigten Bereichs. Die gewünschten quantitativen Eigenschaften scheinen also zumindest im nominellen Fall erreicht worden zu sein. Die bestätigt sich, wenn wir die Sprungantworten des nominellen Regelkreises auf die im vorigen Abschnitt definierten

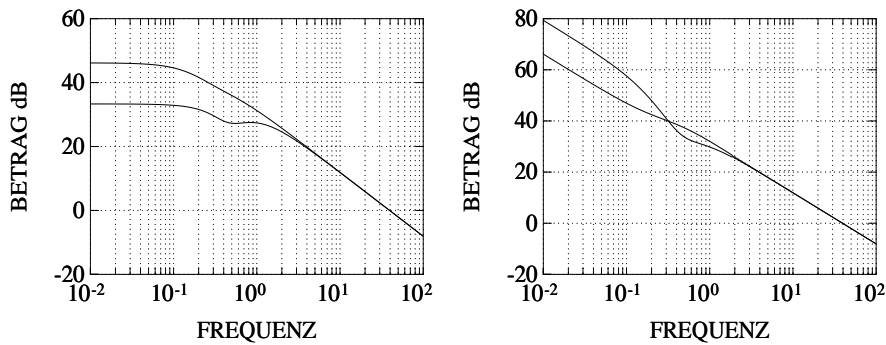


Bild 9.23: Amplitudengänge der Eigenwerte von $G(j\omega)K'_h$ (links) und $G(j\omega)K(j\omega)$ (rechts).

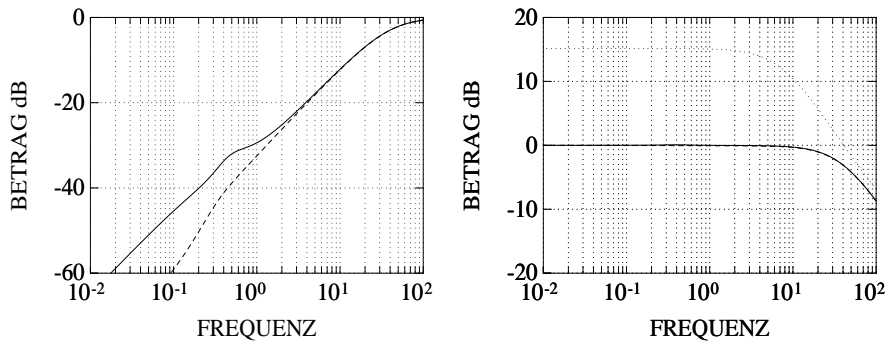


Bild 9.24: Singulärwerte von $S(j\omega)$ (links) und $T(j\omega)$ (rechts), Inverse der Fehlerschranke (gepunktete Linie, rechts).

Störfälle 1 und 2 berechnen (Bild 9.25): Die geforderten Zeitbereichsspezifikationen werden klar erfüllt.

Nun wenden wir uns der Frage nach der Robustheit zu: Bild 9.24 zeigt außer den Singulärwerten von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix auch die Inverse der Fehlerschranke (gepunktete Linie); sie ist für alle Frequenzen größer als $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$, Robustheit der Eigenschaft Stabilität somit für alle zulässigen Modellfehler Δ_M garantiert. Um zu untersuchen, ob auch die gewünschten Zeitbereichsspezifikationen für alle Δ_M eingehalten werden, schätzen wir S_r – die Sensitivitätsmatrix im Fehler-Fall – durch (6.47) nach oben ab und tragen die sich ergebende Schranke über der Frequenz auf (Bild 9.26). Diese Schranke verläuft sicherlich nicht innerhalb des in Bild 9.14 gezeigten Bereiches. Wir können demzufolge nicht auf Robustheit der geforderten quantitativen Eigenschaften schließen. Da (6.47) in den meisten Fällen eine überaus konservative Abschätzung darstellt, können wir aber auch nicht

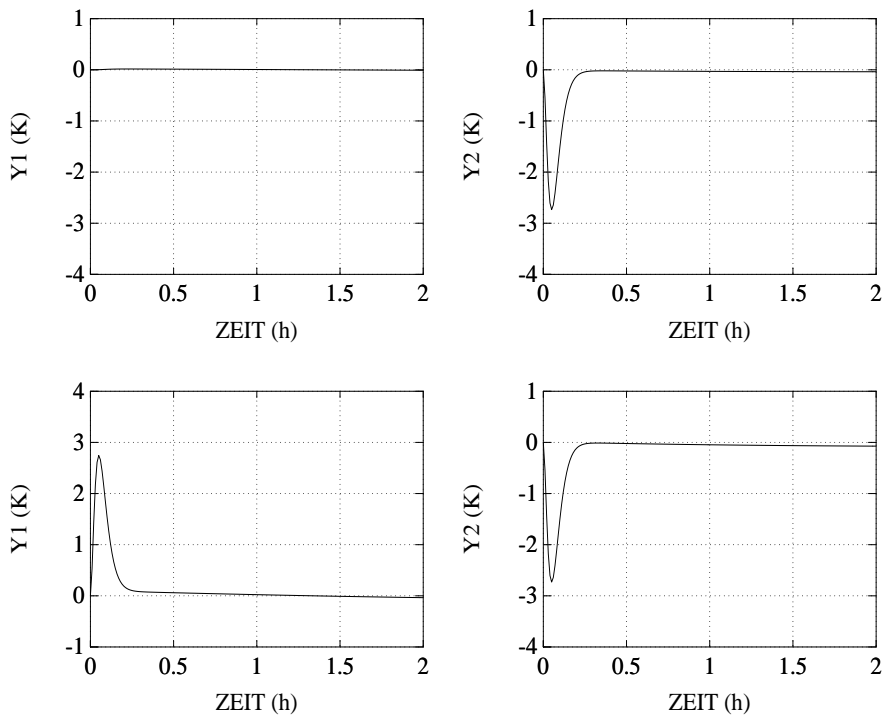


Bild 9.25: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen, Störfall 1 (oben) und Störfall 2 (unten).

folgern, daß die Spezifikationen für ein zulässiges Δ_M verletzt werden. Aufschluß über diese Frage könnte z.B die Verwendung eines μ -Tests (s. Abschnitt 6.3.2) geben.

9.2.6 Wertung

Wie die DNA-Methode sieht auch das Verfahren der charakteristischen Ortskurven die Reduktion des Mehrgrößen-Problems auf eine Reihe von Eingrößen-Entwurfsaufgaben vor. Beim CL-Verfahren bestehen diese Eingrößen-Probleme aus der geeigneten Manipulation der frequenzabhängigen Eigenwerte des offenen Kreises. Eigenwerte sind aber abstrakte Größen, die nicht direkt physikalischen (Ein- und Ausgangs-) Variablen zugeordnet werden können. Dies stellt dann kein Problem dar, wenn sich – wie in dem behandelten Beispiel der Destillationskolonne – die Anforderungen bezüglich verschiedener Stell- oder Regelgrößen nur wenig unterscheiden. Ist dies nicht der Fall, so muß man versuchen, die frequenzabhängigen Eigenvektoren in den Entwurfsvorgang einzubeziehen, um einen Zusammenhang zwischen charakteristischen Ortskurven und physikalischen Regelkreissignalen herzustellen. Dieser zusätz-

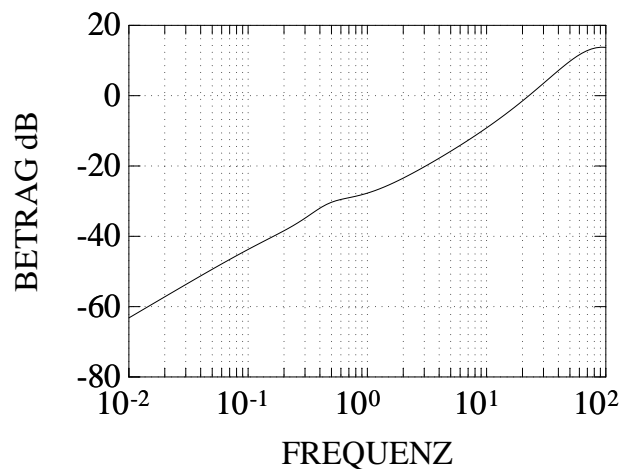


Bild 9.26: Obere Schranke für $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)]$.

liche Aufwand läßt das CL-Verfahren in solchen Fällen äußerst unattraktiv werden und legt das Ausweichen auf andere Entwurfsmethoden nahe. Eine weitere Einschränkung ist im möglichen Auseinanderklaffen von Eigenwert-Beträgen und Singulärwerten zu sehen. Da sich Robustheit anhand letzterer Größen, nicht aber anhand von charakteristischen Ortskurven beurteilen läßt, kann man ein problemloses Anwenden nur dann erwarten, wenn die frequenz-abhängigen Eigenvektoren nicht „zu schief“ aufeinander stehen. Wir können also festhalten, daß das Verfahren der charakteristischen Ortskurven in erster Linie für eine bestimmte einfache, durch die beiden eben diskutierten Eigenschaften ausgezeichnete Klasse von Problemen taugt. Liegt aber andererseits ein solches einfaches Problem vor, gelangt man mit dem CL-Verfahren i.a. recht schnell ans Ziel. Da der Anwender darüberhinaus jeden Schritt des Entwurfsvorgangs kontrolliert, kann er – wie bei der DNA-Methode - ungewollte Pol-Nullstellenkürzungen leicht vermeiden; außerdem kann auf einfache Weise zwischen einer Verbesserung von Regelkreiseigenschaften und einer Verringerung der Regler-Komplexität abgewogen werden.

9.3 Das Reversed Frame Normalizing (RFN) Verfahren

Die von *Hung* und *MacFarlane* eingeführte Methode des *Reversed Frame Normalizing* stellt eine konzeptionell einfache Erweiterung des im vorigen Abschnitt diskutierten CL-Verfahrens dar. Sie zielt darauf ab, nicht nur die charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises geeignet zu formen, sondern gleichzeitig die Frequenzgangmatrix $Q(j\omega)$ zu *normalisieren*⁷. Da die Eigenvektoren der Matrizen Q , S und T übereinstimmen (s. Abschnitt 9.2), impliziert Normalität von Q auch Normalität von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix. Bei einer normalen Matrix fallen die Singulärwerte mit den Beträgen der Eigenwerte zusammen. Falls Normalität von $Q(j\omega)$ gewährleistet ist, können deshalb nominelle Stabilität (anhand des verallgemeinerten Nyquist-Theorems), quantitative Eigenschaften des nominellen Regelkreises (vgl. (5.47) und (5.48)), sowie – über die Beziehung

$$\sigma_i[T] = |\lambda_i[T]| = \left| \frac{\lambda_{Q_i}}{1 + \lambda_{Q_i}} \right|$$

– Robustheit gegenüber unstrukturierten multiplikativen Modellfehlern anhand der Ortskurven und der Amplitudengänge der $\lambda_{Q_i}(j\omega)$ beurteilt werden.

Wie können wir nun die beiden genannten Ziele verwirklichen? Wir gehen von einer frequenzabhängigen Singulärwertzerlegung (s. Abschnitt 5.2.2.1) des $p \times q$ -Streckenmodells ($p \leq q$) aus:

$$G(j\omega) = U(j\omega) \text{diag}\{\sigma_i[G(j\omega)]\} V^*(j\omega);$$

Für jedes ω ist $U(j\omega)$ eine unitäre $p \times p$ -Matrix, $V(j\omega)$ eine subunitäre Matrix der Dimension $q \times p$. Ein „idealer“ (und – wie sich gleich herausstellen wird – i.a. nicht realisierbarer) Regler besitzt dann folgende Struktur:

$$K_{id}(j\omega) = V(j\omega) \text{diag}\{\gamma_i(j\omega)\} U^*(j\omega). \quad (9.23)$$

⁷Eine komplexwertige Matrix Q heißt normal, wenn sie mit ihrer konjugiert Transponierten kommutiert:

$$Q^*Q = QQ^*.$$

Eine Matrix ist genau dann normal, wenn sie ein vollständiges orthonormales System von Eigenvektoren und damit eine unitäre Eigenvektormatrix besitzt (z.B. [106]). Für jede normale Matrix Q läßt sich also eine komplexwertige Matrix E finden, so daß

$$\begin{aligned} E^*E &= EE^* = I_p, \\ Q &= E \text{diag}\{\lambda_{Q_i}\} E^*. \end{aligned}$$

Er enthält – in umgekehrter Reihenfolge – die „singular vector frames“ U und V des Streckenmodells. Dies erklärt den ersten Teil des Namens der Entwurfsmethode. Die γ_i bilden die wesentlichen Entwurfsfreiheitsgrade. Sie müssen nicht reell sein; (9.23) stellt deshalb keine Singulärwertzerlegung der Reglermatrix K dar.

Durch Multiplikation von G und K_{id} erhalten wir die Frequenzgangmatrix des „idealen“ offenen Regelkreises:

$$Q_{id}(j\omega) = U(j\omega) \operatorname{diag}\{\sigma_i[G(j\omega)]\gamma_i(j\omega)\} U^*(j\omega). \quad (9.24)$$

Die rechte Seite von (9.24) bildet eine Eigenzerlegung von Q_{id} . Die Frequenzgangmatrix Q_{id} ist also offenbar normal; ihre Eigenwerte

$$\lambda_i[Q_{id}(j\omega)] = \sigma_i[G(j\omega)]\gamma_i(j\omega), \quad i = 1, \dots, p,$$

und Singulärwerte

$$\begin{aligned} \sigma_i[Q_{id}(j\omega)] &= |\lambda_i[Q_{id}(j\omega)]| \\ &= \sigma_i[G(j\omega)]|\gamma_i(j\omega)|, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

können durch geeignete Wahl der γ_i beliebig vorgegeben werden.

Die aus der Singulärwertzerlegung hervorgehenden Matrizen U , V und damit die Reglermatrix K_{id} sind allerdings in den seltensten Fällen reell-rational in $j\omega$. Der „ideale“ Regler kann also i.a. nicht durch ein System linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen realisiert werden; wir müssen uns deshalb mit näherungsweise RFN begnügen.

Um (9.23) zu approximieren, setzen wir eine linkskopprime Matrizenbruchdarstellung für den Regler an:

$$K(s) = \widetilde{M}_P^{-1}(s)\widetilde{N}_P(s).$$

Wir fixieren den Grad der polynomialen Elemente von \widetilde{M}_P und \widetilde{N}_P und berechnen die Parameter dieser Polynommatrizen, so daß die gewichtete Differenz zwischen idealem Frequenzgang $Q_{id}(j\omega)$ und $G(j\omega)\widetilde{M}_P^{-1}(j\omega)\widetilde{N}_P(j\omega)$ in einem relevanten (diskreten) Frequenzbereich $\{\omega_1, \dots, \omega_k, \dots, \omega_N\}$ minimal wird. Die „Größe“ der Differenz messen wir wiederum mittels der (rechen-technisch besonders einfachen) Frobenius-Norm:

$$\begin{aligned} J &:= \sum_{k=1}^N \|W(j\omega_k)[Q_{id}(j\omega_k) - G(j\omega_k)\widetilde{M}_P^{-1}(j\omega_k)\widetilde{N}_P(j\omega_k)]\|_F \quad (9.25) \\ &\stackrel{!}{=} \min. \end{aligned}$$

Ohne Einführung einer frequenzabhängigen Gewichtungsmatrix W würde das Kriterium (9.25) den absoluten Fehler für alle betrachteten Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_N$ gleich bewerten. Dies würde zu kleinen relativen Fehlern im Bereich $\omega \ll \underline{\omega}_c$ ($\underline{\sigma}[Q_{id}] \gg 1$) führen, gleichzeitig aber ein Anwachsen des relativen Fehlers für $\omega \geq \bar{\omega}_c$ ($\bar{\sigma}[Q_{id}] \leq 1$) bewirken und somit die Stabilität des zu entwerfenden Regelkreises in Frage stellen. Die Gewichtungsmatrix W sollte also so gewählt werden, daß die Zunahme des relativen Fehlers im Bereich mittlerer und hoher Frequenzen vermieden wird.

$$W(j\omega) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{|\lambda_i[Q_{id}(j\omega)]|} \right\} \quad (9.26)$$

stellt einen überaus einfachen, in vielen Anwendungsfällen jedoch probaten Ansatz für die Gewichtungsmatrix dar (vgl. [96],[97]).

Hung und *MacFarlane* schlagen zwei Strategien zur Minimierung von (9.25) vor:

9.3.1 Approximation bei vorgegebener Nennermatrix

Die einfachste Möglichkeit besteht in der Vorgabe von Nennermatrix $\widetilde{M}_P(s)$ und Struktur der Zählermatrix $\widetilde{N}_P(s)$. Die Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten der Zählerpolynome reduziert sich dann auf ein rechentechnisch einfaches lineares least-squares Problem. Beim Festlegen der Struktur von \widetilde{N}_P muß man allerdings darauf achten, daß die resultierende Regler-Übertragungsmatrix proper und damit durch eine Zustandsdarstellung realisierbar ist. Dies kann einfach gewährleistet werden, wenn wir $\widetilde{M}_P(s)$ als *zeilenreduzierte Polynommatrix* ansetzen (vgl. Abschnitt 2.2.1), die Koeffizientenmatrix M_{hz} in

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_P(s) &= \mathcal{S}(s)M_{hz} + \mathcal{L}(s)M_{nz}, \\ \mathcal{S}(s) &= \text{diag}\{s^{\tilde{k}_{M_i}}\} \\ \mathcal{L}(s) &= \begin{bmatrix} s^{\tilde{k}_{M_1}-1} & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & s^{\tilde{k}_{M_q}-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

also nichtsingulär wählen. In diesem Fall ist K genau dann proper, wenn für die Zeilengrade \tilde{k}_{N_i} und \tilde{k}_{M_i} der Polynommatrizen $\widetilde{N}_P(s)$ und $\widetilde{M}_P(s)$ gilt:

$$\tilde{k}_{N_i} \leq \tilde{k}_{M_i}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Die Struktur der Zählermatrix $\widetilde{N}_P(s)$ legen wir deswegen folgendermaßen fest:

$$\widetilde{N}_P(s) = \mathcal{N}(s)N_z \quad (9.27)$$

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} s^{\tilde{k}_{M_1}} & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & s^{\tilde{k}_{M_q}} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_z = \begin{bmatrix} n_{11}^{(\tilde{k}_{M_1})} & \dots & n_{1p}^{(\tilde{k}_{M_1})} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{11}^{(0)} & \dots & n_{1p}^{(0)} \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ n_{q1}^{(\tilde{k}_{M_q})} & \dots & n_{qp}^{(\tilde{k}_{M_q})} \\ \vdots & & \vdots \\ n_{q1}^{(0)} & \dots & n_{qp}^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Die Kostenfunktion (9.25) läßt sich dann in Abhängigkeit von der *reellen* $(\sum_{i=1}^q \tilde{k}_{M_i} + q) \times p$ -Matrix N_z schreiben:

$$\begin{aligned} J &= \left\| \begin{array}{c} W(j\omega_1)Q_{id}(j\omega_1) - W(j\omega_1)G(j\omega_1)\widetilde{M}_P^{-1}(j\omega_1)\mathcal{N}(j\omega_1)N_z \\ \vdots \\ W(j\omega_N)Q_{id}(j\omega_N) - W(j\omega_N)G(j\omega_N)\widetilde{M}_P^{-1}(j\omega_N)\mathcal{N}(j\omega_N)N_z \end{array} \right\|_F \\ &= \left\| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} W(j\omega_1)Q_{id}(j\omega_1) \\ \vdots \\ W(j\omega_N)Q_{id}(j\omega_N) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} W(j\omega_1)G(j\omega_1)\widetilde{M}_P^{-1}(j\omega_1)\mathcal{N}(j\omega_1) \\ \vdots \\ W(j\omega_N)G(j\omega_N)\widetilde{M}_P^{-1}(j\omega_N)\mathcal{N}(j\omega_N) \end{array} \right] N_z \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{:= B \in \mathbb{C}^{(Np) \times p}} \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{:= A \in \mathbb{C}^{(Np) \times (\sum_{i=1}^q \tilde{k}_{M_i} + q)}} \end{array} \right\|_F \\ &= \|(\operatorname{Re}B - \operatorname{Re}A N_z) + j(\operatorname{Im}B - \operatorname{Im}A N_z)\|_F \\ &= \left\| \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \operatorname{Re}B \\ \operatorname{Im}B \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \operatorname{Re}A \\ \operatorname{Im}A \end{array} \right] N_z \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{:= D} \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{:= C} \end{array} \right\|_F. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Besitzt die (reellwertige) Matrix C vollen Spaltenrang, so erhält man als eindeutige, die Kostenfunktion (9.28) minimierende Lösung

$$N_{z_{\min}} = (C^T C)^{-1} C^T D.$$

Die unbekanntenen Koeffizienten der Zählermatrix $\widetilde{N}_P(s)$ und damit die Regler-Übertragungsmatrix $\widetilde{M}_P^{-1} \widetilde{N}_P(s)$ sind also bestimmt.

Vor- und Nachteile dieser Approximationsmethode liegen auf der Hand: Die Vorgabe einer Nennermatrix führt auf ein rechentechnisch einfaches Problem mit eindeutiger Lösung und garantiert – falls alle Wurzeln des Polynoms $\det\{\tilde{M}_P(s)\}$ links der imaginären Achse liegen – einen asymptotisch stabilen Regler. Üblicherweise genügt es, die Nennermatrix $\tilde{M}_P(s)$ diagonal anzusetzen – sie ist dann automatisch zeilenreduziert. Trotzdem bedarf es selbst in diesem Fall einiger Überlegung, eine Kombination von Koeffizienten und Zeilengraden der Nennermatrix zu wählen, die eine einfache Struktur von K bewirkt und trotzdem eine gute Näherung für Q_{id} ermöglicht.

9.3.2 Anpassung von Zähler- und Nennermatrix

Eine Verbesserung der Approximation von Q_{id} kann sicherlich erreicht werden, wenn (9.25) über Zähler- und Nennerparameter minimiert wird. Aus Abschnitt 2.2.2 wissen wir, daß Zähler- und Nennermatrizen einer linkskoprimen Matrizenbruchdarstellung nur bis auf Linksmultiplikation mit einer unimodularen Polynommatrix bestimmt sind. Um Nichteindeutigkeiten zu vermeiden, sollte man deshalb auf eine kanonische Form der Matrizenbruchdarstellung übergehen. Eine solche Normalform erhält man, wenn die Struktur der Nennermatrix – wie in [46] vorgeschlagen – als *Spalten-Hermite-Form* (s. z.B. [47]) vorgegeben wird. Jede andere Normalform (z.B. die *Popov-Form* [47]) für \tilde{M}_P erfüllt denselben Zweck.

Die Koeffizienten der Zählermatrix gehen offenbar linear, die der Nennermatrix nichtlinear in die Kostenfunktion (9.25) ein. Da sich eine einfache analytische Abhängigkeit der optimalen Zählerparameter von den optimalen Nennerparametern angeben läßt, können erstere aus (9.25) eliminiert, die Minimierungsaufgabe somit in ein nichtlineares und ein lineares Teilproblem aufgespalten werden. Die Lösung des nichtlinearen Problemtails – die Berechnung der Koeffizienten von \tilde{M}_P – erfolgt z.B. durch Anwendung einer verallgemeinerten Gauss-Newton-Iteration. Das Bestimmen der optimalen Koeffizienten für \tilde{N}_P stellt dann wiederum ein einfaches lineares least-squares Problem dar.

Den Vorteilen dieser Vorgehensweise stehen als Negative erhöhter Rechenaufwand und die Möglichkeit eines instabilen Reglers gegenüber. Zu den praktischen Nachteilen eines instabilen Regelgesetzes kommen im Rahmen des RFN-Ansatzes konzeptionelle Schwierigkeiten: Eine vernünftige, d.h. den Anforderungen des verallgemeinerten Nyquist-Kriteriums genügende Wahl der charakteristischen Frequenzgänge $\lambda_i[Q_{id}(j\omega)]$ setzt Kenntnis der Anzahl der instabilen Pole von Streckenmodell *und* Regler voraus. Ein unerwartetes Auftreten von instabilen Reglerpolen erzwingt deshalb eine Veränderung der $\lambda_i[Q_{id}(j\omega)]$ und damit eine zusätzliche Iteration beim Entwurfsvorgang.

9.3.3 Beispiel: Zweistoffdestillation

Nach Durchführung des DNA- und insbesondere des CL-Entwurfs für das Zweistoffproblem erweist sich der Entwurf mittels Reversed Frame Normalizing als leichte Übung: Die vom Benutzer zu spezifizierenden Größen sind im wesentlichen dieselben wie beim CL-Ansatz – die Eigenwerte der „idealen“ Frequenzgangmatrix des offenen Kreises. In Anlehnung an unsere Überlegungen in Abschnitt 9.2 setzen wir:

$$\lambda_1[Q_{id}(j\omega)] = \lambda_2[Q_{id}(j\omega)] = \frac{40}{j\omega}.$$

Beide Eigenwerte werden also als Integral-Glieder mit Durchtrittsfrequenz 40 gewählt. Weitere Entwurfs-Freiheitsgrade des RFN-Verfahrens sind die Gewichtsmatrix in der zu minimierenden Kostenfunktion (9.25) und die Struktur des Reglers. Die Gewichtsmatrix W wählen wir wie in (9.26) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{|\lambda_i[Q_{id}(j\omega)]|} \right\} \\ &= \frac{\omega}{40} I_2. \end{aligned}$$

Wir versuchen zunächst, mit der einfachst denkbaren Möglichkeit, einer vorgegebenen Nennermatrix, ans Ziel zu gelangen. Sollen die (tatsächlichen) Eigenwerte λ_{Q_i} , $i = 1, 2$, des offenen Kreises Integralverhalten zeigen, so muß die Regler-Übertragungsmatrix offenbar Pole im Ursprung besitzen. Die einfachste Nennermatrix, die diese Forderung erfüllt, lautet

$$\widetilde{M}_P(s) = sI_2$$

– sie ist natürlich „automatisch“ zeilenreduziert. Hiermit liegt auch die Struktur der Zählermatrix $\widetilde{N}_P(s)$ fest: Aus (9.27) erhalten wir:

$$\widetilde{N}_P(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \end{bmatrix}}_{N(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} n_{11}^{(1)} & n_{12}^{(1)} \\ n_{11}^{(0)} & n_{12}^{(0)} \\ n_{21}^{(1)} & n_{22}^{(1)} \\ n_{21}^{(0)} & n_{22}^{(0)} \end{bmatrix}}_{N_z}.$$

Die zu minimierende Kostenfunktion (9.25) ist nun vollständig bestimmt. Als minimierende Lösung ergibt sich:

$$N_z = \begin{bmatrix} -0.2154 & 0.0138 \\ -0.0573 & 0.0148 \\ -0.5902 & 0.2303 \\ -0.2713 & 0.1852 \end{bmatrix};$$

die resultierende Regler-Übertragungsmatrix lautet also:

$$\begin{aligned} K(s) &= \widetilde{M}_P^{-1}(s)\mathcal{N}(s)N_z \\ &= \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -(0.2154s + 0.0573) & 0.0138s + 0.0148 \\ -(0.5902s + 0.2713) & 0.2303s + 0.1852 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nun müssen wir überprüfen, ob die angestrebten Ziele tatsächlich erreicht wurden. Bild 9.27 zeigt die charakteristischen Ortskurven des offenen Kreises GK . Sie weichen zwar vom idealen I-Verhalten (Ortskurve verläuft auf der negativen imaginären Achse in den Ursprung hinein) ab, die Approximation ist jedoch für alle praktischen Belange hinreichend genau. Insbesondere bleibt die geforderte Phasendrehung bezüglich des kritischen Punktes gewahrt – nominelle Stabilität ist somit gesichert. Auf der linken Seite von Bild 9.28 sind die Beträge der Eigenwerte und (von diesen nicht zu unterscheiden) die Singulärwerte der Frequenzgangmatrix $Q = GK$ aufgetragen. Diese Größen liegen genügend dicht an den „idealen“ Amplitudengängen $|\lambda_i[Q_{id}(j\omega)]|$. Da Singulärwerte und Eigenwert-Beträge nahezu zusammenfallen, wurde die angestrebte Normalität der Matrix Q weitgehend erreicht. Sicherheitshalber berechnen wir trotzdem die Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix. Sie sind in der rechten Hälfte von Bild 9.28 aufgetragen. Sie unterscheiden sich – wie erwartet – kaum von den Ergebnissen, die wir mittels des CL-Verfahrens erhielten.

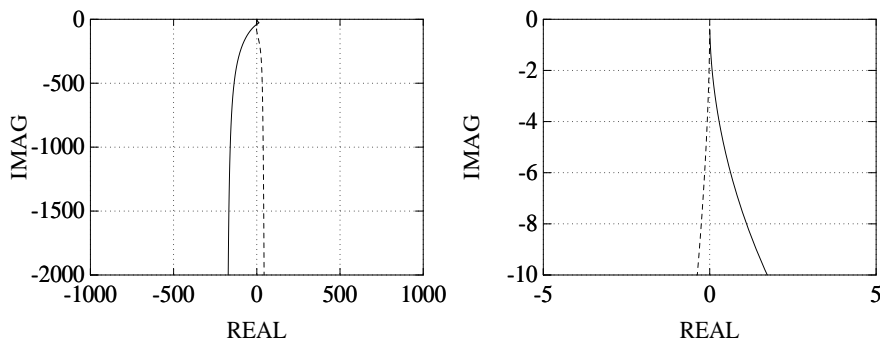


Bild 9.27: Charakteristische Ortskurven von GK . Gesamtansicht (links) und Nähe des Ursprungs (rechts).

Es überrascht daher auch nicht weiter, daß der resultierende Regelkreis im nominellen Fall ganz ähnliches Zeitverhalten zeigt (Bild 9.29). Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ ist natürlich ebenfalls gesichert, da $\bar{\sigma}[T]$ für alle Frequenzen unterhalb der Inversen der Fehlerschranke verläuft. Wie beim CL-Verfahren liegt die mittels (6.47) berechnete Abschätzung von $\bar{\sigma}[S_r(j\omega)]$ (des maximalen Singulärwertes der Sensitivitätsmatrix im Fehler-Fall) nicht

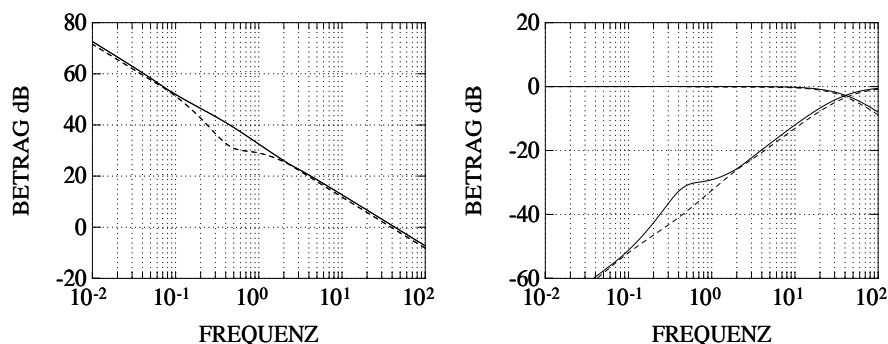


Bild 9.28: Beträge der Eigenwerte und Singulärwerte von $Q(j\omega)$ (links). Singulärwerte von $S(j\omega)$ und $T(j\omega)$ (rechts).

innerhalb des in Bild 9.14 gezeigten zulässigen Bereiches. Wir können deswegen wiederum nicht auf Robustheit des gewünschten Störverhaltens schließen, aber andererseits – des Pessimismus der Abschätzung (6.47) wegen – auch nicht folgern, daß ein möglicher Fehler Δ_M zur Verletzung der geforderten Zeitbereichsspezifikationen führt.

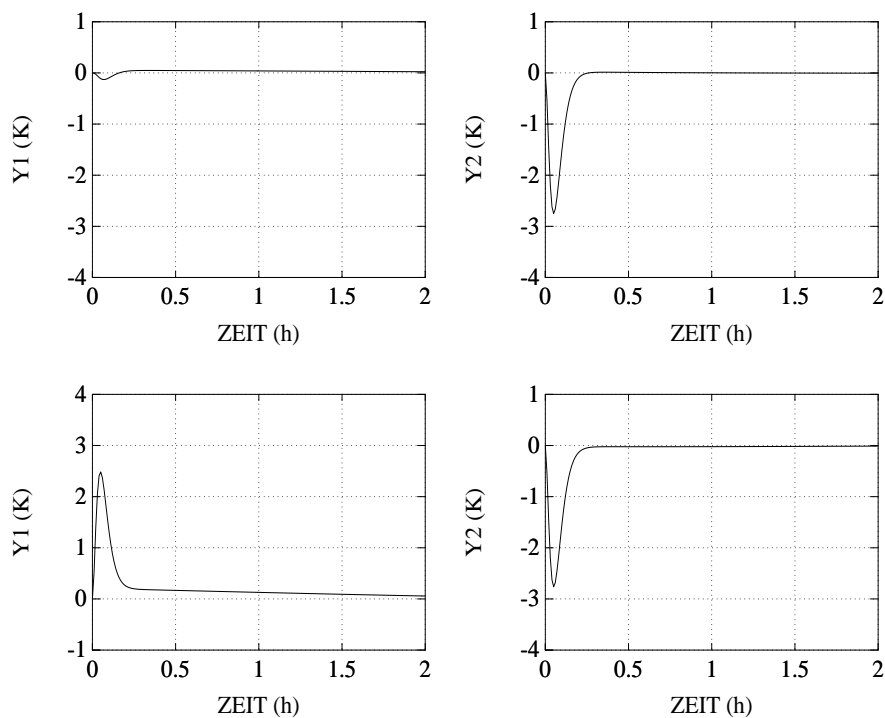


Bild 9.29: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen, Störfall 1 (oben) und Störfall 2 (unten).

9.3.4 Wertung

Da sich Reversed Frame Normalizing als verfeinerte Version des CL-Verfahrens interpretieren läßt, besitzt es denselben hauptsächlichen Schwachpunkt: Man arbeitet mit abstrakten Größen – die charakteristischen Übertragungsfunktionen hängen nicht direkt mit den geeignet zu beeinflussenden physikalischen (Eingangs- bzw. Ausgangs-) Variablen zusammen. RFN kann daher – wie die CL-Methode – nur dann einfach (d.h. ohne explizite Berücksichtigung der Richtungen der Eigenvektoren und damit der Kopplung zwischen Eigen-, Ein- und Ausgangsgrößen) angewandt werden, wenn das angestrebte Regelkreisverhalten „richtungs-uniform“ ist – wenn sich also die Anforderungen bezüglich der verschiedenen Regelgrößen und die Beschränkungen für die einzelnen Stellvariablen nur wenig unterscheiden. Ein weiterer Schwachpunkt des CL-Verfahrens, die mögliche Diskrepanz zwischen Beträgen der Eigenwerte und Singulärwerten, tritt dagegen nicht auf. Er wird durch die (näherungsweise) Normalisierung der Frequenzgangmatrix Q vermieden. RFN teilt mit anderen quasi-klassischen Verfahren den Vorteil, daß der Anwender über die Komplexität des Reglers entscheiden kann. Die Wahl der Nennermatrix im Beispiel „Destillationskolonne“ implizierte beispielsweise, daß der resultierende Mehrgrößenregler aus vier klassischen PI-Reglern besteht. Auch eine weitergehende Einschränkung der Regler-Struktur ist problemlos möglich. So können wir z.B. in der zu minimierenden Kostenfunktion die Parameter $n_{12}^{(0)}$, $n_{12}^{(1)}$, $n_{21}^{(0)}$ und $n_{21}^{(1)}$ zu Null setzen – hierdurch verringert sich lediglich die Anzahl der unbekanntenen Variablen im unterlagerten linearen least-squares Problem – und erhalten dann einen diagonalen Regler. In diesem Fall kann der RFN-Formalismus als einfache Möglichkeit zur Festlegung der Parameter eines konventionellen dezentralen PI-Schemas interpretiert werden. Durch eine überlegte Vorgabe von Regler-Komplexität und -Struktur kann man darüberhinaus in den meisten Fällen unerwünschte Pol-Nullstellenkürzungen zwischen Streckenmodell und Regler-Übertragungsmatrix vermeiden.

9.4 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Mehrgrößen-Entwurfsmethoden werden oft als „Verfahren der Britischen Schule“ bezeichnet. Ihnen ist die Reduktion des Mehrgrößen-Problems auf eine Reihe von Eingrößen-Entwurfsaufgaben gemein. Letztere können mit den Methoden der klassischen Regelungstechnik angegangen werden. Deswegen lassen sich mittels quasi-klassischer Verfahren auch totzeitbehaftete Systeme problemlos behandeln. Die Reduzierung auf skalare Probleme erfolgt bei Verwendung der DNA (Direct Nyquist Array) Methode durch Vorschalten eines Kompensators, der im kritischen Frequenz-

bereich genügend schmale verallgemeinerte Gershgorin-Bänder erzwingt. Diese Bänder können dann im zweiten Entwurfsschritt wie gewöhnliche skalare Frequenzgänge manipuliert werden. Das Einführen robuster verallgemeinerter Gershgorin-Bänder ermöglicht darüberhinaus die Behandlung unabhängiger Modellfehler in den Elementen der Strecken-Übertragungsmatrix.

Beim Verfahren der charakteristischen Ortskurven (CL-Methode) und beim Reversed Frame Normalizing (RFN) findet das Zurückführen auf skalare Probleme nur „in Gedanken“ statt: Man versucht, die Eigenwerte der Frequenzgangmatrix des offenen Kreises so zu verändern, daß der geschlossene Kreis gewünschte Eigenschaften zeigt. Anhand der Ortskurven dieser Eigenwerte (den sogenannten charakteristischen Ortskurven) läßt sich Stabilität des nominellen Kreises exakt beurteilen. Für Aussagen über quantitative Regelkreiseigenschaften und Robustheit benötigt man hingegen andere Größen – im einfachsten Fall Singulärwerte von Frequenzgangmatrizen. Beträge von Eigenwerten und Singulärwerte einer Matrix stimmen aber nur dann überein, wenn die betrachtete Matrix normal ist, also eine unitäre Eigenvektormatrix besitzt. Beim CL-Verfahren versucht man, durch Multiplikation mittels einer konstanten reellen Matrix zumindest in der Nähe der Durchtrittsfrequenzen der charakteristischen Ortskurven ein näherungsweise diagonales (und damit normales) $Q(j\omega)$ zu erzwingen. Beim RFN-Verfahren wird Normalisierung über den gesamten Frequenzbereich angestrebt.

Ein weiteres, der Familie der quasi-klassischen Methoden zuzuordnendes (aber hier nicht behandeltes) Verfahren ist unter dem Namen *Quantitative Feedback Design Theory (QFT)* bekannt.

9.5 Literaturhinweise

Nyquist Array Methoden (sowohl die D(irect)NA als auch die I(nverse)NA-Version) wurden von *Rosenbrock* [100] vorgeschlagen. Einen Beweis des Gershgorin Theorems, auf dem diese Verfahren basieren, findet man z.B. bei *Rosenbrock* und *Storey* [101]. Die Verbesserung der Eigenwert-Abschätzung durch Einführung eines verallgemeinerten Diagonaldominanz-Begriffes geht auf *Mees* [75] und *Limebeer* [58] zurück. Das Relative Gain Array als Werkzeug zur geeigneten Zuordnung von Stell- und Regelgrößen wurde von *Bristol* [8] propagiert. Der Align-Algorithmus zur Approximation komplexer durch reeller Matrizen wurde von *MacFarlane* und *Kouvaritakis* [65] vorgeschlagen. Die alternative Formulierung als Minimierungsproblem stammt von *Edmunds* und *Kouvaritakis* [23]. Informationen finden sich auch bei *Hung* und *MacFarlane* [46].

Das Verfahren der charakteristischen Ortskurven geht auf die Arbeiten von

MacFarlane, *Belletrutti* und *Kouvaritakis* [63][65] zurück. Mit diesem Verfahren zusammenhängende mathematische Details werden in *Postlethwaites* und *MacFarlanes* Buch [90] behandelt.

Reversed Frame Normalizing wurde in der bereits zitierten Abhandlung [46] eingeführt. *Horowitz* prägte die Methode der Quantitative Feedback Design Theory (QFT). Detaillierte Informationen findet man (u.a.) in [41],[42],[43] und insbesondere [44].

Überlegungen, wie mittels quasi-klassischer Verfahren dem zu entwerfenden Regler eine gewünschte Struktur „aufgeprägt“ werden kann, findet man bei *Raisch* und *Gilles* ([92][94]). Dort werden insbesondere (block-) diagonale und (block-) dreiecksförmige, aber auch Mehrgrößen-PI-Strukturen angesprochen.

Das als Beispiel vorgestellte Zweistoff-Destillationsproblem wurde in einer Reihe von Arbeiten von *Lang*, *Gröbel*, *Allgöwer*, *Gilles* und *Raisch* behandelt ([1][96][97][95]).

Eine sinnvolle Anwendung der in diesem Kapitel vorgestellten Methoden kann nur am Rechner erfolgen. Eine Übersicht über verfügbare Software zum Entwurf von (Mehrgrößen-) Reglern bietet z.B. [29] oder der regelmäßig erscheinende *WGS Newsletter* [105]. Alle Berechnungen in diesem Kapitel wurden mit MATLAB [73] durchgeführt – viele mit Hilfe der hierauf basierenden Makro-Kollektionen „Control System Toolbox“ [70] und „Multivariable Frequency Domain Toolbox“ [9].

Kapitel 10

H_∞ -Verfahren

10.1 Die H_∞ -Norm

Quantitative Forderungen und Robustheitsbedingungen wurden in Abschnitt 5.2, 6.2 und 6.3 mit Hilfe frequenzabhängiger Singulärwerte formuliert. Solche Bedingungen lassen sich kürzer mittels sogenannter ∞ -Normen angeben.

Definition 10.1 (\mathcal{RL}_∞ und L_∞ -Norm) _____

Die Menge aller realisierbaren $p \times q$ -Übertragungsmatrizen $G(s)$ ohne Pole auf der imaginären Achse bezeichnet man mit $\mathcal{RL}_\infty^{p \times q}$. Für jedes $G \in \mathcal{RL}_\infty^{p \times q}$ ist die L_∞ -Norm definiert:

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_\omega \bar{\sigma}[G(j\omega)]. \quad (10.1)$$

Die L_∞ -Norm einer Übertragungsmatrix $G(s)$ ist also die kleinste obere Schranke von $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$ und läßt sich somit dem Singulärwerte-Diagramm der zugehörigen Frequenzgangmatrix entnehmen. Bei Eingrößensystemen kann die L_∞ -Norm auch anhand der Nyquist-Ortskurve abgelesen werden. Sie entspricht in diesem Fall dem größten Abstand der Ortskurve vom Ursprung.

Eine Untermenge von $\mathcal{RL}_\infty^{p \times q}$ haben wir bereits in Abschnitt 2.3 kennengelernt: die Menge $\mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$ aller realisierbaren asymptotisch stabilen $p \times q$ -Übertragungsmatrizen. Falls $G \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times q}$, wird (10.1) auch als H_∞ -Norm bezeichnet:

Definition 10.2 (H_∞ -Norm) _____

$G(s)$ sei eine realisierbare asymptotisch stabile Übertragungsmatrix. Dann bezeichnet man (10.1) als die H_∞ -Norm von $G(s)$. _____

In diesem Fall gibt $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$ die maximale Amplitudenverstärkung eines harmonischen Eingangssignals mit Frequenz ω an (vgl. Abschnitt 2.1). (10.1) kann deshalb als maximale Amplitudenverstärkung aller sinusförmiger Eingangssignale (maximal über alle „Richtungen“ und Frequenzen) verstanden werden. Der H_∞ -Norm läßt sich auch eine Zeitbereichsinterpretation zuordnen: Sie entspricht der Wurzel der *maximalen Energieverstärkung* des Übertragungssystems G für alle Eingangssignale $u(t) \neq 0$ mit endlicher Energie:

$$\|G\|_\infty = \sup_{u(t) \neq 0} \sqrt{\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty u(t)^T u(t) dt}}.$$

Zur Berechnung der H_∞ -Norm existieren prinzipiell zwei Möglichkeiten:

- Wir können ein genügend feines Frequenzraaster $\omega_1, \dots, \omega_N$ definieren, für jede Frequenz ω_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, den maximalen Singulärwert der Frequenzgangmatrix $G(j\omega_i)$ berechnen und anschließend das Maximum „herauspicken“. Diese Möglichkeit ist numerisch recht aufwendig – insbesondere, wenn keine a-priori-Information vorliegt, in welchem Frequenzbereich das Maximum zu suchen ist.
- Eine zweite Möglichkeit bedient sich einer Zustandsdarstellung der Übertragungsmatrix $G(s)$:

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Die Realteile aller Eigenwerte der Dynamikmatrix A seien negativ (dies versteht sich *nicht* von selbst, da wir keine *Minimalrealisierung* der asymptotisch stabilen Übertragungsmatrix $G(s)$ voraussetzen). Da $G(\infty) = D$, gilt offenbar $\|G\|_\infty \geq \bar{\sigma}[D]$. Nun definieren wir für ein beliebiges $\gamma > \bar{\sigma}[D]$ die Matrix

$$H_\gamma := \left[\begin{array}{cc} A - BR^{-1}D^T C & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & -A^T + C^T DR^{-1}B^T \end{array} \right]$$

mit

$$R := D^T D - \gamma^2 I_q$$

$$S := DD^T - \gamma^2 I_p.$$

Dann gilt:

$$\|G\|_\infty < \gamma \iff H_\gamma \text{ besitzt keinen Eigenwert auf der imaginären Achse.}$$

(Dieses Resultat wird in [7] bewiesen.) Nun kann man durch eine einfache Iteration über γ die H_∞ -Norm beliebig genau bestimmen: Man beschafft sich – z.B. durch Probieren – eine obere und eine untere Schranke für $\|G\|_\infty$: $\gamma_u \leq \|G\|_\infty \leq \gamma_o$. Dann setzt man $\gamma := (\gamma_u + \gamma_o)/2$, berechnet H_γ und überprüft die Existenz imaginärer Eigenwerte. Findet man solche Eigenwerte ($\|G\|_\infty \geq \gamma$), wählt man γ als neue untere Schranke und wiederholt die Prozedur. Andernfalls ($\|G\|_\infty < \gamma$) setzt man γ als neue obere Schranke und geht zum nächsten Iterationsschritt über. Auf diese Art und Weise halbiert man in jedem Iterationsschritt das $\|G\|_\infty$ enthaltende Intervall.

Wir wollen festhalten, daß die Berechnung der H_∞ -Norm i.a. eine Iteration erfordert – entweder über der Frequenz ω oder dem Wert γ der H_∞ -Norm.

10.2 Spezielle H_∞ -Kriterien und das H_∞ -Standard-Problem

In diesem Abschnitt wollen wir zwei spezielle H_∞ -Kriterien besprechen: Bei der Formulierung und Lösung des sogenannten *gemischten Sensitivitätsproblems* (oder *S/KS/T-Problems*) zielt man darauf ab, den nominellen Regelkreis zu stabilisieren und gewünschte quantitative und Robustheits-Eigenschaften durch frequenzabhängiges „Formen“ der maximalen Singulärwerte geeigneter, den geschlossenen Kreis charakterisierender Frequenzgangmatrizen zu erreichen. Dieser Ansatz ist also offensichtlich den „closed loop shaping“ Verfahren zuzuordnen. Das *NLKF-Problem* (in der Literatur oft auch einfach als *H_∞ -loop-shaping* bezeichnet) basiert auf einer normalisierten linkskoprime faktorisierung eines gewichteten Streckenmodells. Die Intention dieses Ansatzes besteht darin, einen geeigneten Kompromiß zwischen Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ (bezüglich faktorisierten Modellfehler) und gewünschten quantitativen Forderungen (in Form angestrebter Singulärwerte der Matrix $Q(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$) zu finden. In die Formulierung der mathematischen Problemstellung gehen in diesem Fall also auch „open loop shaping“ Überlegungen ein. Nach Definition und Erklärung beider Probleme werden wir untersuchen, wie sie in einen gemeinsamen Rahmen – das *H_∞ -Standard-Problem* – eingebettet werden können. Bei der Darstellung dieser Sachverhalte greifen wir weitgehend auf [93] zurück.

10.2.1 Das gemischte Sensitivitäts- ($S/KS/T$ -) Problem

Das *gemischte Sensitivitäts-* oder *$S/KS/T$ -Problem* ist die wohl bekannteste Version eines H_∞ -Problems. Die Übertragungsmatrizen S , T und K_S werden frequenzabhängig gewichtet und zu einem Kostenfunktional zusammengefaßt, das über alle den nominellen Regelkreis stabilisierenden Regler-Übertragungsmatrizen minimiert werden soll:

$$\inf_{\text{stabilis. } K} \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} W_S(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_{KS}(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_T(s) \end{bmatrix}}_{:=W_o(s)} \begin{bmatrix} S(s) \\ K(s)S(s) \\ T(s) \end{bmatrix} W_i(s) \right\|_\infty. \quad (10.2)$$

Durch geeignete Wahl der Gewichtungsmatrizen W_o und W_i können – unter Beachtung der in Kapitel 7 formulierten Einschränkungen – S , T und K_S in gewünschter Weise beeinflußt werden. Die Bedeutung von S und T für quantitative Regelkreiseigenschaften und Robustheit wurde in Abschnitt 5.2 und 6.2 ausführlich diskutiert. Anhand der Matrix K_S läßt sich nicht nur Robustheit der Stabilität bezüglich additiver Modellfehler beurteilen, sie gibt darüberhinaus das Übertragungsverhalten zwischen den auf den Regelkreis wirkenden Signalen d , r , η und der Stellvariablen u an: Aus Bild 4.2 kann man unmittelbar ablesen, daß (für $d' = 0$) gilt:

$$u = K(s)S(s)\{r - \eta - d\}.$$

Die Matrix K_S kann also zu Aussagen über Stellgliedaktivitäten herangezogen werden.

Eine anschauliche Interpretation des Minimierungsproblems (10.2) zeigt Bild 10.1: Wir greifen am Standard-Regelkreis die Signale e , u und y' ab und versehen sie mit frequenzabhängigen Gewichten W_S , W_{KS} und W_T . Die einzige auf den Kreis wirkende Größe – die am Ausgang des Streckenmodells angreifende Störung d wird mit W_i gewichtet. Die *externen Eingangsgrößen*

$$w := W_i^{-1}d$$

und die *externen Ausgangsgrößen*

$$z := \begin{bmatrix} W_S & 0 & 0 \\ 0 & W_{KS} & 0 \\ 0 & 0 & W_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ u \\ y' \end{bmatrix}$$

definieren einen *verallgemeinerten Regelkreis*, dessen H_∞ -Norm wir minimieren wollen.

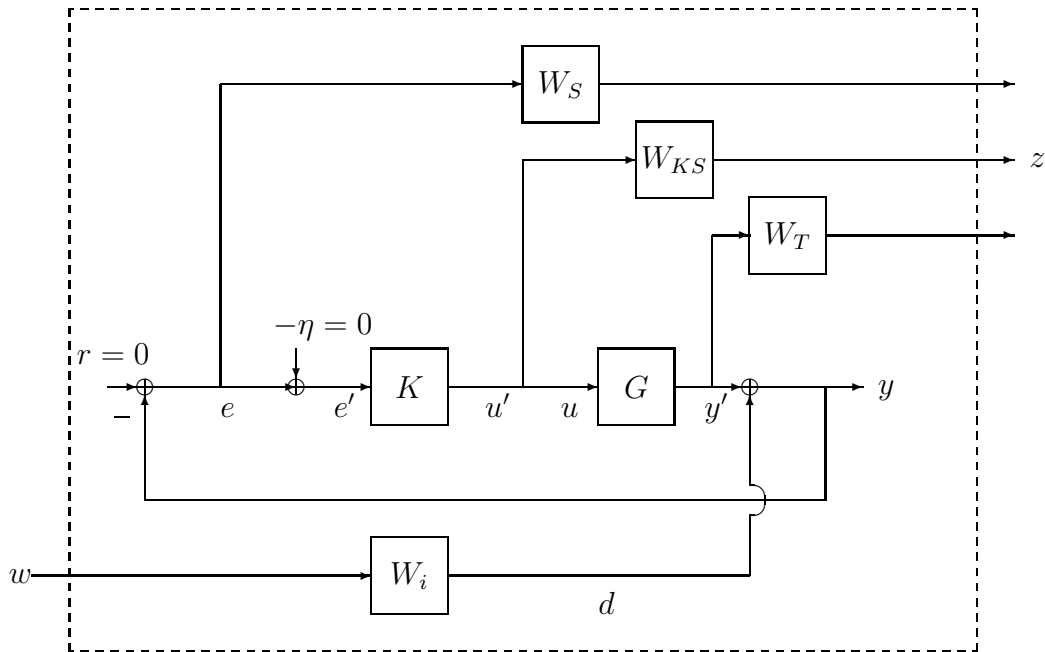


Bild 10.1: Verallgemeinerter Regelkreis für das $S/KS/T$ -Problem.

Die frequenzabhängigen Gewichtungsmatrizen W_S , W_{KS} , W_T und W_i legen das zu lösende Minimierungsproblem fest. Sie stellen die einzigen dem Anwender zur Verfügung stehenden Entwurfsfreiheitsgrade dar. Deshalb sollen hier in aller Kürze einige Hinweise zur Wahl der Gewichtungsmatrizen gegeben werden:

- Man beschränke sich auf diagonale Gewichte. Dies ermöglicht eine gezielte Beeinflussung einzelner externer Ein-/Ausgangsgrößen bzw. einzelner Zeilen und Spalten von S , KS und T .
- Die Betragskennlinien der Diagonalelemente der Gewichtsmatrizen W_S , W_{KS} und W_T sollten die in Abschnitt 5.2 und 6.2 diskutierten physikalischen Anforderungen an den Regelkreis widerspiegeln: Die Sensitivitätsmatrix wird typischerweise mit Tiefpaß-, die komplementäre Sensitivitätsmatrix mit Hochpaßelementen beaufschlagt. Da der Übergang zwischen den Frequenzbereichen Ω_{rd} und Ω_η nicht „zu schnell“ erfolgen kann (vgl. Kapitel 7), bietet sich in den meisten Fällen ein Amplitudenabfall oder -anstieg mit 20dB/Dekade an. Hochpaß-Gewichtung von KS wirkt hochfrequenten Stellgliedaktivitäten („Stellgliedflattern“) entgegen. In Bild 10.2 sind Amplitudengänge für eine typische Wahl von Gewichten zusammengefaßt.

Durch verschiedenes Gewichten der Stellgrößen ($|W_{KS_{ii}}| \neq |W_{KS_{jj}}|$)

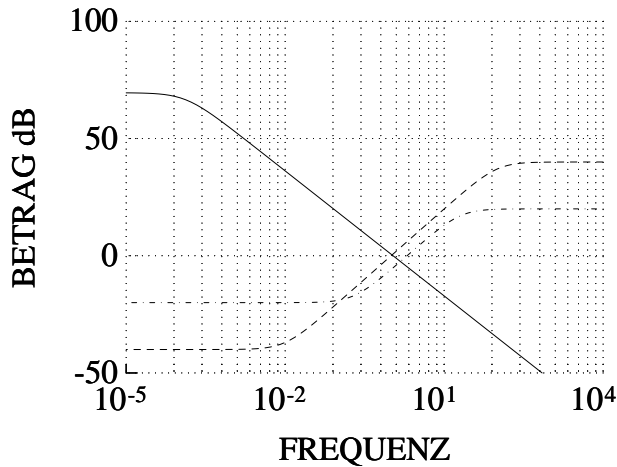


Bild 10.2: Typische Gewichtungen für das $S/KS/T$ -Problem: $|W_{S_{ii}}|$ —, $|W_{KS_{ii}}|$ - · - · -, $|W_{T_{ii}}|$ - - - -.

kann unterschiedlicher Dynamik und unterschiedlichen Stellbereichen der Aktoren Rechnung getragen werden. Verschiedenes Gewichten der Komponenten von e bzw. y' erlaubt eine differenzierte Formulierung der Anforderungen an die Regelvariablen.

- Man verwende asymptotisch stabile Gewichte. Anhand von Bild 10.1 ist leicht zu erkennen, daß man ansonsten in aller Regel einen nicht stabilisierbaren verallgemeinerten Regelkreis und damit eine unlösbare H_∞ -Aufgabe erhält.
- Man benutze nur minimalphasige Gewichte. Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da in das zu minimierende Kriterium ohnehin nur die Betragelemente der (diagonalförmigen) W_i , W_o eingehen.
- Die Ordnung des aus der Lösung des H_∞ -Problems resultierenden Reglers steigt mit der Ordnung der Gewichtsfunktionen (s. Abschnitt 10.3). Deshalb sollten alle verwendeten Gewichte dynamisch möglichst einfach sein.
- W_i muß in \mathcal{RL}_∞ rechts-

$$\begin{bmatrix} -W_S G \\ W_{KS} \\ W_T G \end{bmatrix}$$

linksinvertierbar sein. Diese Matrizen müssen also für alle ω – auch für $\omega = \infty$ – vollen Zeilen- bzw. Spaltenrang besitzen. Diese im Grun-

de unnötig strenge Forderung garantiert, daß einige für den in Abschnitt 10.3 vorgestellten Lösungsalgorithmus notwendigen technischen Details erfüllt sind.

10.2.2 Der NLKF-Entwurf

Diese auf einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung (NLKF) des Streckenmodells beruhende Entwurfsmethode geht auf *Glover* und *McFarlane* zurück.

Zunächst betrachtet man das Problem, den nominellen Regelkreis zu stabilisieren und größtmögliche Robustheit der Eigenschaft „Stabilität“ gegenüber faktorisierten Modellfehlern zu erzielen. Wie in Abschnitt 6.1.1.3 erläutert, ermöglicht die Verwendung faktorisierter Fehler die Ausdehnung von Robustheitsaussagen auf Probleme, bei denen die Anzahl der instabilen Streckenpole nicht exakt bekannt ist. $G(s) = \widetilde{M}^{-1}(s)\widetilde{N}(s)$ sei eine beliebige linkskoprimen Faktorisierung des Streckenmodells. Laut Satz 6.4 gewährleistet K asymptotische Stabilität des Regelkreises für alle

$$G_r = \underbrace{(\widetilde{M} + \Delta_M)}_{\widetilde{M}_r}^{-1} \underbrace{(\widetilde{N} + \Delta_N)}_{\widetilde{N}_r}, \quad [\Delta_M \ \Delta_N] \in \mathcal{D}_{MN},$$

wenn der nominelle Regelkreis asymptotisch stabil ist und

$$\left\| \begin{bmatrix} I_p \\ K \end{bmatrix} (I_p + GK)^{-1} \widetilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq \frac{1}{\rho}, \quad (10.3)$$

$$\rho = \sup_\omega l_{MN}(\omega).$$

l_{MN} ist eine frequenzabhängige obere Schranke für den Fehlerterm $[\Delta_M \ \Delta_N]$. Offensichtlich erhalten wir also optimale Robustheit hinsichtlich faktorisierter Modellfehler, wenn wir die linke Seite von (10.3) über alle den nominellen Kreis stabilisierenden K minimieren. Wenn zusätzlich vorausgesetzt wird, daß die linkskoprimen Faktorisierung des Streckenmodells G normalisiert ist, kann die maximale Stabilitätsreserve ρ_{\max} explizit aus der *Hankel Norm* von $[\widetilde{N} \ \widetilde{M}]$ berechnet werden¹ [74]:

$$\rho_{\max} = \sqrt{1 - \|[\widetilde{N} \ \widetilde{M}]\|_H^2}. \quad (10.4)$$

¹Die *Hankel Norm* $\|\dots\|_H$ einer asymptotisch stabilen Übertragungsmatrix $G(s)$ ist definiert als (s. auch die Fortsetzung d. Fußnote auf d. nächsten Seite):

$$\|G\|_H := \sqrt{\lambda_{\max}[P_c P_o]}.$$

P_c ist die Steuerbarkeits-, P_o die Beobachtbarkeits-Gramsche einer beliebigen Minimalrealisierung von $G(s)$ (vgl. Abschnitt 3.3). Für Zähler- und Nennermatrix einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung gilt $\|[\widetilde{N} \ \widetilde{M}]\|_H < 1$, die Existenz der rechten Seite von (10.4) ist deshalb gesichert und $0 < \rho_{\max} < 1$.

Die betrachtete H_∞ -Aufgabe entspricht offenbar einem $S/KS/T$ -Problem mit

$$\begin{aligned} W_S &= I_p, \\ W_{KS} &= I_q, \\ W_T &= 0, \\ W_i &= \widetilde{M}^{-1}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Falls das Streckenmodell instabil ist, widerspricht (10.5) den in Abschnitt 10.2.1 gegebenen Richtlinien zur Wahl der Gewichtungsmatrizen: $W_i = \widetilde{M}^{-1}$ besitzt in diesem Fall Pole in der rechten Halbebene. Unter diesen Umständen würde man normalerweise einen nicht stabilisierbaren verallgemeinerten Regelkreis und damit ein nicht lösbares H_∞ -Problem erwarten. Anhand von Bild 10.3 kann man sich leicht veranschaulichen, daß dies in dem hier betrachteten Fall nicht zutrifft: die (instabile) Eingangsgewichtung kann in den Regelkreis hineingezogen werden.

Um quantitative Anforderungen an den Regelkreis einzubeziehen, versucht man zusätzlich, einen gewünschten Verlauf der Singulärwerte der Frequenzgangmatrix $Q = GK$ des offenen Kreises zu erreichen. Zur Verwirklichung dieser „open loop shaping“ Intention gewichtet man das Streckenmodell mit geeigneten Matrizen $W_a(s)$ und $W_e(s)$, so daß die Singulärwerte von

$$G_w(j\omega) := W_a(j\omega)G(j\omega)W_e(j\omega)$$

die für $\sigma_i[Q(j\omega)]$ gewünschten Verläufe aufweisen. Dann berechnet man die maximale Stabilitätsreserve $\rho_{w_{\max}}$ für das gewichtete Streckenmodell G_w und löst das zugehörige H_∞ -Problem

$$\inf_{\text{stabilis. } K_w} \left\| \begin{bmatrix} I_p \\ K_w \end{bmatrix} (I_p + G_w K_w)^{-1} \widetilde{M}_w^{-1} \right\|_\infty = \frac{1}{\rho_{w_{\max}}}. \quad (10.6)$$

Aus einer Lösung $K_w(s)$ für (10.6) kann über

$$K = W_e K_w W_a \quad (10.7)$$

die Reglerübertragungsmatrix für das ursprüngliche Regelungsproblem bestimmt werden. Asymptotische Stabilität von (G, K) folgt aus asymptotischer Stabilität von (G_w, K_w) (und umgekehrt). Dies leuchtet unmittelbar ein, wenn man die Gewichte W_e und W_a im Regelkreis „verschiebt“.

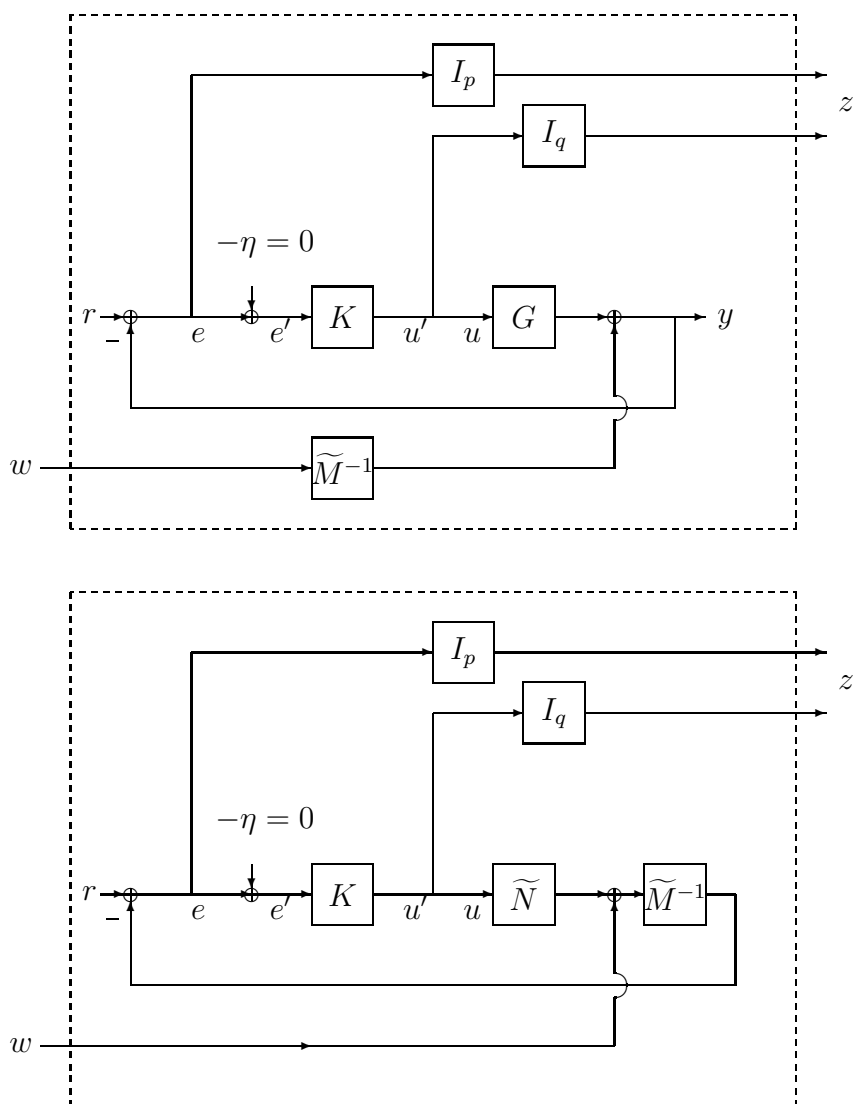


Bild 10.3: Zwei äquivalente Darstellungen des verallgemeinerten Regelkreises für das NLKF-Problem.

$\rho_{w_{\max}}$ kann als Indikator für den Erfolg des Entwurfs interpretiert werden. Ein kleiner Wert von $\rho_{w_{\max}}$ deutet an, daß gewünschter Singulärwerte-Verlauf und Robustheit unvereinbare Anforderungen darstellen: Der resultierende – aus G und K bestehende – nominelle Regelkreis wird schlechte Robustheitseigenschaften aufweisen; der tatsächliche Singulärwerte-Verlauf wird sich vom angestrebten stark unterscheiden. Ein formaler Beweis hierfür findet sich in [74]. Für $\rho_{w_{\max}} \ll 1$ sollte man also die gewünschten Anforderungen überdenken und die Gewichtsmatrizen W_e , W_a entsprechend anpassen. Auch die Umkehrung dieser Aussage gilt: Für $\rho_{w_{\max}} \rightarrow 1$ erhält man gute Robustheitseigenschaften des resultierenden Regelkreises und einen dem angestrebten sehr

ähnlichen Singulärwerte-Verlauf für Q (vgl. [74][92]).

Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens ist, daß für den eigentlichen Entwurfsprozeß a priori keine Abschätzung des Fehlers benötigt wird. Der Anwender spezifiziert zunächst nur einen gewünschten, die quantitativen Anforderungen widerspiegelnden Singulärwerte-Verlauf. Dieser sollte sich so weit irgend möglich an an den Singulärwerten des Streckenmodells orientieren, vom Regler also eine möglichst kleine Modifikation der Streckencharakteristik verlangen. Das beschriebene Entwurfsverfahren versucht dann, diesen Verlauf mit nomineller Stabilität und einem Maximum an Robustheit (hinsichtlich faktorisierten Fehler) zu kombinieren. Erst anschließend wird überprüft, ob der resultierende Regler Modellfehler in gefordertem Maße toleriert. Ist dies nicht der Fall, so müssen die quantitativen Anforderungen abgeschwächt, der gewünschte Singulärwerte-Verlauf abgeändert werden.

10.2.3 Das H_∞ -Standard-Problem

Das H_∞ -Standard-Problem stellt einen „Überbau“ dar, mit dessen Hilfe eine Vielzahl spezieller H_∞ -Aufgaben (so auch $S/KS/T$ - und NLKF-Problem) in einen gemeinsamen Formalismus eingebracht und deshalb einem gemeinsamen Lösungsschema zugänglich gemacht werden können.

Das H_∞ -Standard-Problem besteht darin, einen verallgemeinerten Regelkreis zu stabilisieren und seine H_∞ -Norm zu minimieren. Wie man – ausgehend von einem konkreten Regelungsproblem – einen verallgemeinerten Regelkreis und eine verallgemeinerte Regelstrecke definiert, haben wir bereits in Kapitel 4 angedeutet. Wir wollen die Vorgehensweise am Beispiel des $S/KS/T$ -Problems verdeutlichen. In Bild 10.1 ist leicht zu erkennen, wie man durch Wahl externer Ein- und Ausgangsgrößen (dies schließt ein Festlegen der entsprechenden Gewichtungsmatrizen ein!) den (fiktiven) *verallgemeinerten Regelkreis* und damit das zu minimierende Kostenfunktional definiert. Durch „Herauslösen“ des Reglers erhalten wir die *verallgemeinerte Regelstrecke*. Sie besitzt einen weiteren Satz von Ein- und Ausgangsgrößen: Die vom Regler produzierten Größen u' bezeichnen wir als *interne Eingangsvariable*, die dem Regler zur Verfügung stehende Meßinformation e' als *interne Ausgangsgröße*. Diese regelkreisinternen Variable sind offenbar durch die physikalische Struktur des Kreises (Plazierung von Sensoren und Aktoren) festgelegt. Aus Bild 10.1 ist ersichtlich, daß die verallgemeinerte Regelstrecke (oder genauer: das verallgemeinerte $(l+p) \times (m+q)$ Streckenmodell $P(s)$) einen Zusammenhang zwischen internen und externen Ein-/Ausgangsgrößen vermittelt:

$$\begin{bmatrix} z \\ e' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_{:=P} \begin{bmatrix} w \\ u' \end{bmatrix}.$$

Das Übertragungsverhalten des geschlossenen verallgemeinerten Regelkreises lautet dann

$$z = \underbrace{(P_{11} + P_{12}K(I_p - P_{22}K)^{-1}P_{21})}_{{}:=\mathcal{F}_L(P,K)} w$$

und kann durch das Signalflußdiagramm in Bild 10.4 dargestellt werden. In

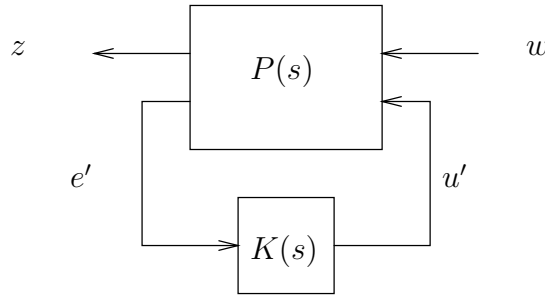


Bild 10.4: Verallgemeinerter Regelkreis.

dieser Terminologie besteht das Ziel des H_∞ -Entwurfs darin, einen das verallgemeinerte Streckenmodell stabilisierenden Regler zu finden, der die H_∞ -Norm der Übertragungsmatrix $\mathcal{F}_L(P, K)$ und damit die maximale Energieverstärkung zwischen externen Ein- und Ausgangsgrößen minimiert.

Sind P_{12} und P_{21} quadratisch, so wird das H_∞ -Problem als *1-Block-Problem* bezeichnet. Ist P_{12} oder P_{21} quadratisch, spricht man von einem *2-Block-Problem*. Sind weder P_{12} noch P_{21} quadratisch, liegt ein *4-Block-Problem* vor. Um die im nächsten Abschnitt vorgestellten Lösungsalgorithmen anwenden zu können, muß bei der Formulierung des H_∞ -Problems darauf geachtet werden, daß P_{12} in \mathcal{RL}_∞ linksinvertierbar, P_{21} rechtsinvertierbar ist. P_{12} und P_{21} müssen also für alle ω – auch für $\omega = \infty$ – vollen Spalten- bzw. Zeilenrang besitzen.

Das verallgemeinerte Streckenmodell für das $S/KS/T$ -Problem kann unmittelbar aus Bild 10.1 abgelesen werden:

$$P = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -W_S W_i \\ 0 \\ 0 \\ -W_i \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} -W_S G \\ W_{KS} \\ W_T G \\ -G \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (10.8)$$

Mit einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung $G_w = \widetilde{M}_w^{-1} \widetilde{N}_w$ erhält man für das NLKF-Problem entsprechend:

$$P = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} -\widetilde{M}_w^{-1} \\ 0 \\ -\widetilde{M}_w^{-1} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} -G_w \\ I_q \\ -G_w \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (10.9)$$

Beide Aufgabenstellungen bilden also 2-Block-Probleme mit quadratischem P_{21} . Für das NLKF-Problem sind die genannten Rangbedingungen für P_{21} und P_{12} offenbar erfüllt. Dies gilt auch für das $S/KS/T$ -Problem, wenn wir die Faustregeln für die Wahl der Gewichte aus Abschnitt 10.2.1 beachten.

10.3 Lösung des H_∞ -Standard-Problems

Für die Lösung des H_∞ -Standard-Problems existiert inzwischen eine ganze Reihe von Software-Produkten. Vordergründig betrachtet besteht für potentielle Anwender deshalb keine Notwendigkeit, sich mit Lösungsalgorithmen abzugeben; sie können sich stattdessen auf die Formulierung regelungstechnisch sinnvoller H_∞ -Kriterien beschränken. Trotzdem wollen wir – in aller Kürze – auf einen Algorithmus zur Lösung des H_∞ -Standard-Problems eingehen. Dies wird uns in die Lage versetzen, den numerischen Aufwand für verschiedene Spezialfälle (darunter auch das $S/KS/T$ - und das NLKF-Problem) abzuschätzen. Stehen Programme zur Matrizen-Manipulation (z.B. MATLAB [73]) zur Verfügung, so ist es ein Leichtes, den hier beschriebenen Algorithmus zu implementieren und sich somit einen eigenen H_∞ -Löser zu schaffen.

10.3.1 Stabilisierbarkeit

Zuerst müssen wir uns natürlich fragen, ob das H_∞ -Problem überhaupt gelöst werden kann, ob das verallgemeinerte $(l+p) \times (m+q)$ -Streckenmodell $P(s)$ sich also durch eine Rückführung der internen Ausgangsgrößen auf die internen Eingangsvariablen über eine realisierbare $q \times p$ -Regler-Übertragungsmatrix $K(s)$ stabilisieren läßt. Einige notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür haben wir bereits kennengelernt. Sie sind in Satz 5.6 aufgelistet. Wir werden insbesondere auf Bedingung 2 zurückgreifen.

10.3.2 Minimierungsstrategie

Die Minimierung des H_∞ -Kriteriums $\|\mathcal{F}_L(P, K)\|_\infty$ wird meist in ein analytisch lösbares *suboptimales Problem* und die sogenannte γ -Iteration aufgespalten: Das suboptimale Problem besteht aus der Bestimmung aller realisierbaren $q \times p$ -Regler-Übertragungsmatrizen $K(s)$, die den verallgemeinerten Regelkreis stabilisieren und für eine vorgegebene positive reelle Zahl γ garantieren, daß $\|\mathcal{F}_L(P, K)\|_\infty < \gamma$. Kennen wir seine Lösung, so läßt sich das

gesuchte Minimum durch Iteration über γ – zumindest theoretisch² – beliebig genau approximieren. Für spezielle H_∞ -Kriterien kann man die kleinste obere Schranke γ_{\min} sogar explizit angeben. Hierzu gehören *1-Block-Probleme* (die allerdings nur selten eine sinnvolle regelungstechnische Aufgabenstellung widerspiegeln) und das NLKF-Problem. In diesen Fällen kann die γ -Iteration offenbar entfallen.

10.3.3 Suboptimales Problem

Für das suboptimale H_∞ -Problem existiert eine Vielzahl von Lösungsvorschlägen. Wir verwenden einen von *Green* beschriebenen Ansatz, der auf anschauliche Weise zwei Problem-Klassen definiert: „einfache“ (mittels *einer* algebraischen Riccati-Gleichung lösbar) und „schwierige“ (mittels *zweier* algebraischer Riccati-Gleichungen lösbar) suboptimale H_∞ -Aufgaben.

10.3.3.1 „Einfache“ suboptimale H_∞ -Probleme

2-Block-Probleme besitzen unter bestimmten Umständen eine besonders einfache Lösung. Wir beschränken uns im folgenden auf 2-Block-Probleme mit quadratischem P_{21} ; der duale Fall – quadratisches P_{12} – spielt für unsere Anwendungen keine Rolle. Wir betrachten also ein verallgemeinertes Streckenmodell $P(s)$ mit $l+p$ Zeilen und $p+q$ Spalten. P sei stabilisierbar, lasse sich also durch (5.28), (5.29) erfüllende linkskopprime Faktorisierungen $\tilde{M}_v^{-1}(s)\tilde{N}_v(s)$ darstellen. Wenn eine dieser Faktorisierungen außerdem einen Zählerterm der Form

$$\tilde{N}_v = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{N}_{v12} \\ I_p & \tilde{N}_{v22} \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

besitzt, und sich darüber hinaus die $(l+p) \times (q+p)$ -Übertragungsmatrix

$$\Omega := \begin{bmatrix} \tilde{N}_{v12} & -\tilde{M}_{v12} \\ -\tilde{N}_{v22} & \tilde{M}_{v22} \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

in \mathcal{RL}_∞ linksinvertieren läßt (dies ist gewährleistet, wenn P_{22} streng proper ist, und P_{12} und P_{21} den in Abschnitt 10.2.3 genannten Rangbedingungen genügen), so liegt ein „einfaches“ Problem vor. In [15] werden solche Sonderfälle als *disturbance feedforward problems* bezeichnet.

²Der im folgenden vorgestellte Algorithmus für das suboptimale Problem führt in unmittelbarer Nähe des erreichbaren Minimums γ_{\min} zu numerischen Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten kann man durch Übergang zu einer Deskriptor-Variante des Algorithmus zumindest abschwächen. Andererseits ist es für den Anwender in aller Regel irrelevant, ob tatsächlich das Minimum γ_{\min} oder nur $\gamma_{\min} + \epsilon$ erreicht wird.

Satz 10.1 (Einfaches suboptimales H_∞ -Problem)

Das verallgemeinerte Streckenmodell besitze eine linkskopprime Faktorisierung $\widetilde{M}_v^{-1}(s)\widetilde{N}_v(s)$, die (5.28), (5.29) und (10.10) genügt. (10.11) sei in \mathcal{RL}_∞ linksinvertierbar. Das suboptimale H_∞ -Problem ist für einen vorgegebenen Wert γ genau dann lösbar, wenn eine Übertragungsmatrix $W \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p) \times (q+p)}$ existiert, so daß ΩW^{-1} J_γ -verlustfrei³ ist. In diesem Fall erhält man alle gesuchten Regler $K(s)$ aus

$$K(s) = N_K(s)M_K^{-1}(s) \quad (10.12)$$

$$\begin{bmatrix} N_K(s) \\ M_K(s) \end{bmatrix} = W^{-1}(s) \begin{bmatrix} B(s) \\ I_p \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

wobei $B(s)$ eine beliebige asymptotisch stabile $q \times p$ -Übertragungsmatrix ist, die nur den Einschränkungen $\|B\|_\infty < \gamma$ und $\det\{M_K(\infty)\} \neq 0$ unterliegt. —

Beweis: s. [39].

Anmerkung: Die Durchgriffsmatrix einer Zustandsdarstellung von W^{-1} besitzt immer vollen Rang. Deswegen läßt sich auf jeden Fall ein geeignetes $B(s)$ finden, so daß $M_K(\infty)$ nichtsingulär wird. Ist insbesondere P_{22} (und damit $\Omega_{21} = -\widetilde{N}_{v22}$) streng proper, so gilt für jedes zulässige W „automatisch“ $\det W_{22}(\infty) \neq 0$ – Nichtsingularität von $M_K(\infty)$ ist in diesem Fall gesichert, wenn der „freie Parameter“ B streng proper angesetzt wird.

Nun benötigen wir noch einen Algorithmus, mir dessen Hilfe wir über die Existenz eines geeigneten W entscheiden und gegebenenfalls ein solches W berechnen können. Dieses Problem wird J_γ -verlustfreie Faktorisierung genannt:

Satz 10.2 (J_γ -verlustfreie Faktorisierung)

Gegeben ist die asymptotisch stabile Zustandsdarstellung einer $(l+p) \times (q+p)$ -Übertragungsmatrix $\Omega(s)$,

$$\Omega(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Es läßt sich genau dann eine Matrix $W \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p) \times (q+p)}$ finden, so daß $\Omega(s)W^{-1}(s)$ J_γ -verlustfrei ist, wenn

1. eine reelle nichtsinguläre $(q+p) \times (q+p)$ -Matrix D_W existiert, so daß

$$D^T J_{\gamma lp} D = D_W^T J_{\gamma qp} D_W, \quad (10.14)$$

³zur Definition J_γ -verlustfreier Übertragungsmatrizen s. Abschnitt 3.3.

2. eine positiv-semidefinite Lösung Q der indefiniten Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = Q(A - BR_\gamma D^T J_{\gamma lp} C) + (A - BR_\gamma D^T J_{\gamma lp} C)^T Q - QBR_\gamma B^T Q + C^T J_{\gamma lp} C - C^T J_{\gamma lp} D R_\gamma D^T J_{\gamma lp} C \quad (10.15)$$

$$R_\gamma := (D^T J_{\gamma lp} D)^{-1} \quad (10.16)$$

existiert, so daß alle Eigenwerte der Matrix $A - BR_\gamma(D^T J_{\gamma lp} C + B^T Q)$ links der imaginären Achse liegen (vgl. Anhang C.2).

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man eine Lösung W aus:

$$W \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_W & D_W \end{array} \right] \quad (10.17)$$

$$C_W := J_{\gamma qp}^{-1} (D_W^{-1})^T (D^T J_{\gamma lp} C + B^T Q). \quad (10.18)$$

Beweis: Mit den „Rechenregeln“ für Inversion und Multiplikation von Zustandsdarstellungen (s. Seite 72) verschafft man sich eine Realisierung von ΩW^{-1} . Nach „Isolieren“ und „Eliminieren“ nicht steuerbarer Zustände erhält man

$$\Omega W^{-1} \cong \left[\begin{array}{c|c} A - BD_W^{-1} C_W & -BD_W^{-1} \\ \hline -C + DD_W^{-1} C_W & DD_W^{-1} \end{array} \right].$$

Für $Y = Q$ erfüllen die Matrizen dieser Zustandsdarstellung Gln. (3.40) - (3.42); ΩW^{-1} ist also tatsächlich J_γ -verlustfrei. W besitzt Dynamikmatrix A und ist deshalb voraussetzungsgemäß asymptotisch stabil. Die Durchgriffsmatrix D_W ist nichtsingulär; die Dynamikmatrix von W^{-1} lautet $A - BR_\gamma(D^T J_{\gamma lp} C + B^T Q)$; deswegen gilt: $W^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{(q+p) \times (q+p)}$ bzw. $W \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p) \times (q+p)}$. \square

Anmerkung: Wenn man $J_{\gamma lp}$ bzw. $J_{\gamma qp}$ durch Einheitsmatrizen passender Dimension ersetzt, erhält man die Formeln für die verlustfreie Zerlegung in Abschnitt 3.3.

Bedingung 1 kann man folgendermaßen überprüfen: Nichtsingularität von D_{22} vorausgesetzt, spaltet man die Matrix D in zwei Faktoren auf:

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} - D_{12} D_{22}^{-1} D_{21} & D_{12} D_{22}^{-1} \\ 0 & I_p \end{bmatrix}}_{:=D'} \underbrace{\begin{bmatrix} I_q & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}}_{:=T} \end{aligned}$$

Die $(q+p) \times (q+p)$ -Matrix T ist offensichtlich invertierbar und kann deswegen zur Transformation der Problemstellung verwendet werden: Wir versuchen, (10.14) für D' und $D'_W := D_W T^{-1}$ zu lösen und können anschließend – im Erfolgsfalle – auf D_W zurückrechnen. Der speziellen blockdreiecksförmigen Struktur von D' wegen, genügt es, für D'_W den Ansatz

$$D'_W = \begin{bmatrix} D'_{W11} & D'_{W12} \\ 0 & D'_{W22} \end{bmatrix}$$

zu machen. Betrachten wir die zu lösende Gleichung „blockweise“, so ergibt sich (voller Spaltenrang von D'_{11} vorausgesetzt)

$$(1,1)\text{-Block: } D'_{W11} = \sqrt{D'^T_{11} D'_{11}},$$

$$(1,2) \text{ bzw. } (2,1)\text{-Block: } D'_{W12} = (\sqrt{D'^T_{11} D'_{11}})^{-1} D'^T_{11} D'_{12},$$

$$(2,2)\text{-Block: } \gamma^2 (D'_{W22})^T D'_{W22} = \underbrace{\gamma^2 I_p - D'^T_{12} (I_l - D'_{11} (D'^T_{11} D'_{11})^{-1} D'^T_{11}) D'_{12}}_{:=\Phi},$$

und eine nichtsinguläre Lösung existiert genau dann, wenn die rechte Seite der letzten Gleichung positiv definit ist. In diesem Fall erhält man:

$$D_W = \begin{bmatrix} \sqrt{D'^T_{11} D'_{11}} & (\sqrt{D'^T_{11} D'_{11}})^{-1} D'^T_{11} D'_{12} \\ 0 & \sqrt{I_p - \gamma^{-2} \Phi} \end{bmatrix} T. \quad (10.19)$$

Damit besitzen wir alle rechentechnischen Voraussetzungen für das Problem der J_γ -verlustfreien Faktorisierung und können – falls eine Lösung existiert – eine geeignete Übertragungsmatrix $W(s)$ bestimmen. Inversion von Übertragungsmatrizen und damit die Berechnung von $W^{-1}(s)$ läßt sich im Zustandsraum ebenfalls problemlos durchführen. Das „einfache“ suboptimale H_∞ -Problem ist also gelöst, wenn wir eine asymptotisch stabile Realisierung für Ω kennen. In den nächsten Abschnitten werden wir Zustandsdarstellungen für Ω im $S/KS/T$ - und im NLKF-Fall angeben. Wenn $B(s) = 0$ gewählt wird, spricht man von der *zentralen Lösung*. Deren Ordnung stimmt mit der Ordnung von Ω und damit der Ordnung der verallgemeinerten Regelstrecke überein.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch explizit angegeben, wie man von einer Zustandsdarstellung für Zähler- und Nennermatrix des Reglers – die man mit den „Rechenregeln“ der Multiplikation und Inversion aus (10.13) und (10.17)-(10.19) erhält – auf eine Zustandsdarstellung für die Regler-Übertragungsmatrix $K(s) = N_K(s)M_K^{-1}(s)$ gelangt: Gegeben sei eine Realisierung

$$\begin{bmatrix} N_K \\ M_K \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_{KN} & D_{KN} \\ C_{KM} & D_{KM} \end{array} \right].$$

Durch Anwenden der „Rechenregeln“ für Inversion und Multiplikation und anschließendes Eliminieren nicht steuerbarer Zustände erhält man als mögliche Realisierung für K :

$$K \cong \left[\begin{array}{c|c} A_K - B_K D_{KM}^{-1} C_{KM} & B_K D_{KM}^{-1} \\ \hline C_{KN} - D_{KN} D_{KM}^{-1} C_{KM} & D_{KN} D_{KM}^{-1} \end{array} \right].$$

10.3.3.2 „Schwierige“ suboptimale H_∞ -Probleme

Besitzt das verallgemeinerte $(l+p) \times (p+q)$ -Streckenmodell P keine außer (5.28), (5.29) auch (10.10) genügende linkskopprime Faktorisierung oder liegt gar ein 4-Block-Problem vor, müssen wir einen zweistufigen Lösungsalgorithmus anwenden. In einem ersten Schritt wird das suboptimale Problem auf ein „einfach“ zu lösendes reduziert:

Satz 10.3 („Schwieriges“ suboptimales H_∞ -Problem)

Das verallgemeinerte $(l+p) \times (p+q)$ -Streckenmodell $P(s)$ sei stabilisierbar, besitze also eine linkskopprime Faktorisierung $\tilde{M}_v^{-1}(s)\tilde{N}_v(s)$, die (5.28) und (5.29) genügt. Notwendig für die Lösbarkeit des suboptimalen H_∞ -Problems ist die Existenz einer Matrix $X(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{(p+l) \times (p+l)}$, für die gilt:

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_{v21}(s)^T & \tilde{N}_{v11}(s)^T \\ 0 & I_l \end{bmatrix} X(s)^{T-1} \quad \dots \quad J_\gamma\text{-verlustfrei}. \quad (10.20)$$

Mit Hilfe der Matrix X definiere man eine zweite linkskopprime Faktorisierung des verallgemeinerten Streckenmodells P :

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_v & \hat{M}_v \end{bmatrix} := X^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}_v & \tilde{M}_v \end{bmatrix}. \quad (10.21)$$

Ist die notwendige Bedingung (10.20) erfüllt, so löst eine realisierbare $q \times p$ -Regler-Übertragungsmatrix K das H_∞ -Problem für P genau dann, wenn K auch eine Lösung des H_∞ -Problems für

$$P_t := \underbrace{\begin{bmatrix} I_l & \hat{M}_{v22} \\ 0 & \hat{M}_{v12} \end{bmatrix}^{-1}}_{:=\tilde{M}_t^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \hat{N}_{v22} \\ I_p & \hat{N}_{v12} \end{bmatrix}}_{:=\tilde{N}_t}. \quad (10.22)$$

darstellt.

Beweis: s. [39].

Überprüfung der Existenz und eventuelle Berechnung von $X(s)^T$ kann wiederum mit der oben dargestellten Zustandsraummethode zur J_γ -verlustfreien Faktorisierung erfolgen. Hierzu ist die Lösung einer algebraischen Riccati-Gleichung erforderlich. Mit der Berechnung von $X(s)$ haben wir das „schwierige“ H_∞ -Problem (für P) auf ein „einfaches“ (für P_t) zurückgeführt, das auf bekannte Weise angegangen werden kann: Wir definieren

$$\Omega_t := \begin{bmatrix} \hat{N}_{v22} & -\hat{M}_{v22} \\ -\hat{N}_{v12} & \hat{M}_{v12} \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

und prüfen, ob eine Matrix $W \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p) \times (q+p)}$ existiert, so daß $\Omega_t W^{-1}$ J_γ -verlustfrei ist.

Ist dies der Fall, so erhält man aus (10.13) alle Lösungen.

Ein (scheinbares) numerisches Problem dieser Vorgehensweise besteht im Auffinden einer Minimalrealisierung von Ω_t , da es bei der Durchführung der Multiplikation (10.21) zu Pol-Nullstellen-Kürzungen kommt. Im Folgenden wird deshalb gezeigt, wie man von Zustandsdarstellungen von X und $[\tilde{N}_v \ \tilde{M}_v]$ zu einer Zustandsdarstellung von $[\hat{N}_v \ \hat{M}_v]$ und damit von Ω_t kommt, ohne die Dimension des Zustandsraums unnötig aufzublähen.

$[\tilde{N}_v \ \tilde{M}_v]$ besitze eine Minimalrealisierung

$$[\tilde{N}_v \ \tilde{M}_v] \cong \left[\begin{array}{c|c} A_{NM} & B_{NM} \\ \hline C_{NM} & D_{NM} \end{array} \right].$$

Durch Anwenden der „Rechenregeln“ für Transponieren und J_γ -verlustfreies Faktorisieren erhält man (falls ein geeignetes X existiert):

$$X \cong \left[\begin{array}{c|c} A_{NM} & B_X \\ \hline \left[\begin{array}{cc} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{array} \right] C_{NM} & D_X \end{array} \right].$$

Die Matrizen B_X und D_X sind in diesem Zusammenhang irrelevant. Inversion von X , Multiplikation und Elimination der nicht beobachtbaren Zustände führen schließlich auf:

$$\begin{bmatrix} \hat{N}_v & \hat{M}_v \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|c} A_{NM} - B_X D_X^{-1} \left[\begin{array}{cc} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{array} \right] C_{NM} & B_{NM} - B_X D_X^{-1} \left[\begin{array}{cc} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{array} \right] D_{NM} \\ \hline D_X^{-1} \left[\begin{array}{cc} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{array} \right] C_{NM} & D_X^{-1} \left[\begin{array}{cc} 0 & I_p \\ I_l & 0 \end{array} \right] D_{NM} \end{array} \right].$$

Es stellt sich also heraus, daß P_t und damit auch die zentrale Lösung des „schwierigen“ H_∞ -Problems dieselbe Ordnung wie das verallgemeinerte Streckenmodell besitzen.

In den beiden folgenden Abschnitten wollen wir die Lösungsstrategie für das H_∞ -Standard-Problem auf $S/KS/T$ - und NLKF-Problem anwenden.

10.4 Lösung des $S/KS/T$ -Problems

10.4.1 Stabilisierbarkeit

Sind alle Gewichte asymptotisch stabil, so ist Stabilisierbarkeit beim $S/KS/T$ -Problem intuitiv gewährleistet: P_{22} (der mit u' steuer- und von y' beobachtbare Teil des verallgemeinerten Streckenmodells) enthält sämtliche möglichen instabilen Pole von P . Tatsächlich ist die Bedingung (5.28), (5.29) erfüllt: Ist $G(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ eine linkskoprieme Faktorisierung des Streckenmodells, so lautet eine mögliche Faktorisierung für das dem $S/KS/T$ -Problem zugeordnete verallgemeinerte Streckenmodell P :

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} I_l & \begin{bmatrix} -W_S \\ 0 \\ W_T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & -\tilde{M} \end{bmatrix}^{-1}}_{\tilde{M}_v^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -W_T W_i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ W_{KS} \\ 0 \\ \tilde{N} \end{bmatrix} \\ \tilde{M} W_i & \end{bmatrix}}_{\tilde{N}_v}. \quad (10.24)$$

Zähler- und Nennermatrix genügen offenbar Bedingung 2 in Satz 5.6.

10.4.2 Minimierungsstrategie

Für regelungstechnisch sinnvolle Gewichte läßt sich γ_{\min} nicht explizit angeben. Wir werden deswegen auf die γ -Iteration zurückgreifen und eine Folge suboptimaler $S/KS/T$ -Probleme lösen müssen.

10.4.3 Suboptimales $S/KS/T$ -Problem

10.4.3.1 „Einfaches“ suboptimales Problem

Das suboptimale $S/KS/T$ -Problem gehört zu der Klasse einfach lösbarer H_∞ -Aufgaben, wenn $W_i \in \mathcal{UH}_\infty^{q \times q}$ und neben den Gewichten W_S, W_{KS}, W_T auch

das *Streckenmodell* G asymptotisch stabil ist. In diesem Fall existiert eine Faktorisierung mit den geforderten Eigenschaften (5.28), (5.29) und (10.10):

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} I_l & \begin{bmatrix} -W_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & -W_i^{-1} \end{bmatrix}^{-1}}_{\tilde{M}_v^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ W_{KS} \\ W_T G \end{bmatrix} \\ I_p & W_i^{-1} G \end{bmatrix}}_{\tilde{N}_v}. \quad (10.25)$$

Aus den Minimalrealisierungen

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (10.26)$$

$$W_i(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A_i & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array} \right], \quad W_S(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A_S & B_S \\ \hline C_S & D_S \end{array} \right], \quad (10.27)$$

$$W_{KS}(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A_{KS} & B_{KS} \\ \hline C_{KS} & D_{KS} \end{array} \right], \quad W_T(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A_T & B_T \\ \hline C_T & D_T \end{array} \right] \quad (10.28)$$

erhält man direkt eine Zustandsdarstellung für Ω :

$$\Omega(s) \cong \left[\begin{array}{cccccc|cc} A_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_S \\ 0 & A_{KS} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{KS} & 0 \\ 0 & 0 & A_i - B_i D_i^{-1} C_i & 0 & B_i D_i^{-1} C & B_i D_i^{-1} D & B_i D_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_T & B_T C & B_T D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & 0 \\ \hline C_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_S \\ 0 & C_{KS} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{KS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_T & D_T C & D_T D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_i^{-1} C_i & 0 & -D_i^{-1} C & -D_i^{-1} D & -D_i^{-1} & 0 \end{array} \right]. \quad (10.29)$$

Durch Anwendung der oben beschriebenen Methode zur J_γ -verlustfreien Faktorisierung kann man sofort entscheiden, ob das „einfache“ suboptimale H_∞ -Problem Lösungen besitzt und gegebenenfalls die Menge aller Lösungen berechnen.

10.4.3.2 „Schwieriges“ suboptimales Problem

Bei Vorliegen eines grenz- oder instabilen Streckenmodells G muß zur Lösung des $S/KS/T$ -Problems die in Abschnitt 10.3 dargestellte zweistufige Strategie angewandt werden. Hierzu benötigt man eine Zustandsdarstellung für eine

(5.28) und (5.29) genügende linkskopprime Faktorisierung des verallgemeinerten Streckenmodells. Mit den Minimalrealisierungen (10.26)-(10.28) und einer reellen Matrix H , die alle Eigenwerte der Matrix $A + HC$ links der imaginären Achse plaziert, erhält man für die Faktorisierung (10.24):

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{N}_v & \tilde{M}_v \end{array} \right] \cong \dots$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} A_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & -B_S \\ 0 & A_{KS} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{KS} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & A_T & 0 & -B_T C_i & -B_T D_i & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B_T \\ 0 & 0 & 0 & A + HC & H C_i & H D_i & B + HD & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & -H \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_i & B_i & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \hline C_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \end{bmatrix} & -D_S \\ 0 & C_{KS} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{KS} & \begin{bmatrix} 0 & I_q & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & C_T & 0 & -D_T C_i & -D_T D_i & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} & D_T \\ 0 & 0 & 0 & C & C_i & D_i & D & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & -I_p \end{array} \right].$$

Mit den in Abschnitt 10.3.3 angegebenen Methoden läßt sich nun eine Zustandsdarstellung (derselben Ordnung) für $[\hat{N}_v, \hat{M}_v]$ berechnen. Hieraus bildet man nach Gl. (10.23) eine Zustandsdarstellung für $\Omega_t(s)$ und erhält durch J_γ -verlustfreie Faktorisierung von $\Omega_t(s)$ den Erzeuger aller Lösungen (10.13).

10.4.4 Beispiel: S/KS/T-Entwurf für ein Zweistoffdestillationsproblem

Die einzigen Freiheitsgrade beim S/KS/T-Entwurf sind die Gewichtungen W_S , W_{KS} , W_T und W_i . Bei ihrer Festlegung halten wir uns an die auf Seite 303 angegebenen Faustregeln: alle Gewichtsmatrizen werden diagonalförmig, asymptotisch stabil und minimalphasig angesetzt. Da wir annehmen, daß auf beide Regelgrößen gleichartige Störungen wirken können, brauchen wir zwischen den Störgrößen nicht zu differenzieren und können

$$W_i = I_2$$

wählen. Auch die Anforderungen an die Regeldifferenzen unterscheiden sich nicht; wir können deshalb beide Zeilen der Sensitivitätsmatrix mit demselben Faktor belegen, also

$$W_S = w_S I_2$$

setzen und uns auf die Bestimmung des skalaren Gewichts w_S beschränken. Nun liegt es nahe, w_S so zu wählen, daß der Amplitudengang seiner Inversen für alle (für das Störverhalten) relevanten Frequenzen im zulässigen Bereich in Bild 9.14 liegt: Finden wir nämlich einen stabilisierenden Regler K mit

$$\left\| \begin{bmatrix} W_S S \\ W_{KS} K S \\ W_T T \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1, \quad (10.30)$$

so gilt natürlich auch

$$\|w_S S\|_\infty = \sup_\omega |w_S(j\omega)| \bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq 1$$

bzw.

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)] \leq \frac{1}{|w_S(j\omega)|} \quad \text{für alle } \omega.$$

Die Wahl $w_S(s) = 40/s$ ergibt also Sinn. Wir müssen lediglich eine kleine Modifikation vornehmen: Da das Gewicht w_S asymptotisch stabil sein soll, verschieben wir den Pol im Ursprung ein kleines Stückchen in die linke Halbebene; der Amplitudengang soll sich hierbei – außer für sehr kleine Frequenzen – allerdings nicht verändern. Dies erreichen wir z.B. durch die Wahl

$$w_S(s) = \frac{10000}{10000s/40 + 1}.$$

Der zugehörige Amplitudengang ist in der linken Hälfte von Bild 10.5 aufgetragen. Offensichtlich erfüllt er die gestellten Forderungen. Natürlich werden wir jetzt den größten Singulärwert von $S(0)$ (und damit bleibende Regeldifferenzen nach sprungförmigen Anregungen) nicht mehr *exakt* zum Verschwinden bringen. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen ist es aber irrelevant, ob $S(0) = 0$ oder – was durch (10.30) impliziert wird – $\bar{\sigma}[S(0)] \leq 1/10000$.

Zur Bestimmung der Gewichtsmatrix W_T argumentieren wir ganz analog: Wir setzen $W_T = w_T I_2$ und wählen den Frequenzgang $w_T(j\omega)$ so, daß sein Amplitudengang mit der oberen Schranke der betrachteten Fehlerklasse (9.17) zusammenfällt:

$$w_T(j\omega) = 0.175 \frac{\frac{j\omega}{7} + 1}{\frac{j\omega}{200} + 1}.$$

(10.30) impliziert natürlich auch

$$\bar{\sigma}[T(j\omega)] \leq \frac{1}{|w_T(j\omega)|} \quad \text{für alle } \omega$$

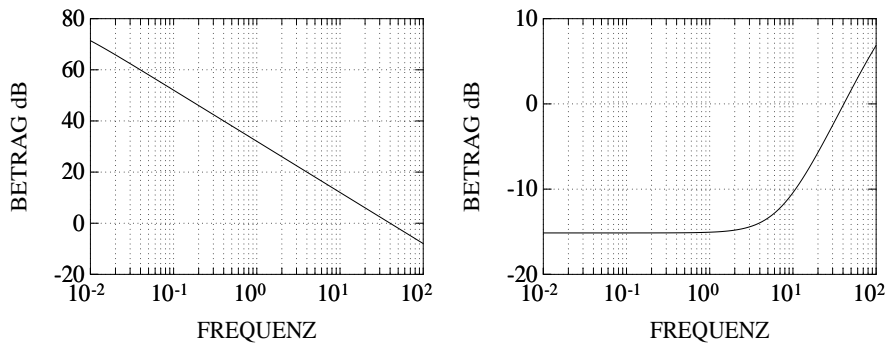


Bild 10.5: Amplitudengänge von $w_S(j\omega)$ (links) und $w_T(j\omega)$ (rechts).

und garantiert deswegen asymptotische Stabilität für alle zulässigen Modellfehler Δ_M . Den Amplitudengang von $w_T(j\omega)$ zeigt die rechte Hälfte von Bild 10.5.

Stellgliedbegrenzungen sind für unser Problem irrelevant. Die Matrix

$$\begin{bmatrix} -W_S G \\ W_{KS} \\ W_T G \end{bmatrix}$$

muß aber für alle ω (auch für $\omega = \infty$) vollen Spaltenrang besitzen – vgl. die „Richtlinien“ zur Festlegung der Gewichte auf Seite 303. Da das Streckenmodell G streng proper ist, darf W_{KS} für $\omega = \infty$ nicht verschwinden. Wir wählen deshalb eine „kleine“ konstante Gewichtung für die Stellvariablen:

$$W_{KS} = 0.01I_2.$$

Nun ist das $S/KS/T$ -Kostenfunktional bestimmt. Streckenmodell G und alle Gewichte sind asymptotisch stabil. Deswegen liegt ein „einfaches“ $S/KS/T$ -Problem vor. Wir müssen lediglich die Zustandsdarstellung (10.29) der Matrix Ω bestimmen und können dann mit Hilfe des Algorithmus zur J_γ -verlustfreien Faktorisierung sofort entscheiden, ob für ein vorgegebenes γ ein stabilisierender Regler existiert. Durch Iteration über γ findet man, daß $\gamma_{\min} \approx 0.905$. Wir wählen die zentrale Lösung K , die sich für $\gamma = 1$ ergibt; sie besitzt Ordnung 9. Wegen (10.30) sind die gewünschten Verläufe für die Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix garantiert. Trotzdem seien sie (in Bild 10.6) dargestellt. Die zeitliche Antwort des nominellen Regelkreises auf die in Abschnitt 9.1 definierten Störfälle zeigt Bild 10.7.

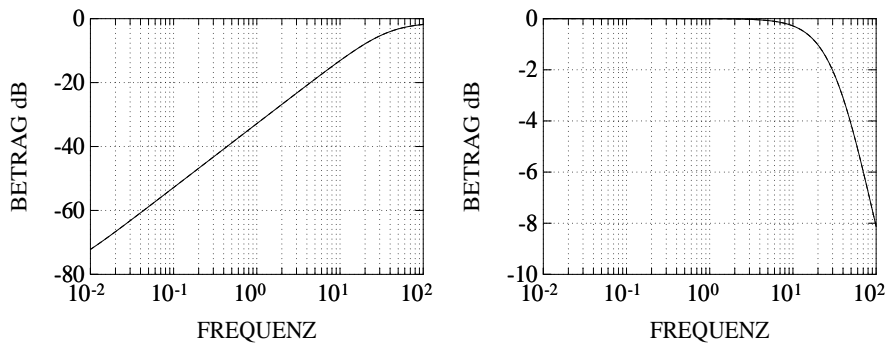


Bild 10.6: Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix (links) und komplementärer Sensitivitätsmatrix (rechts).

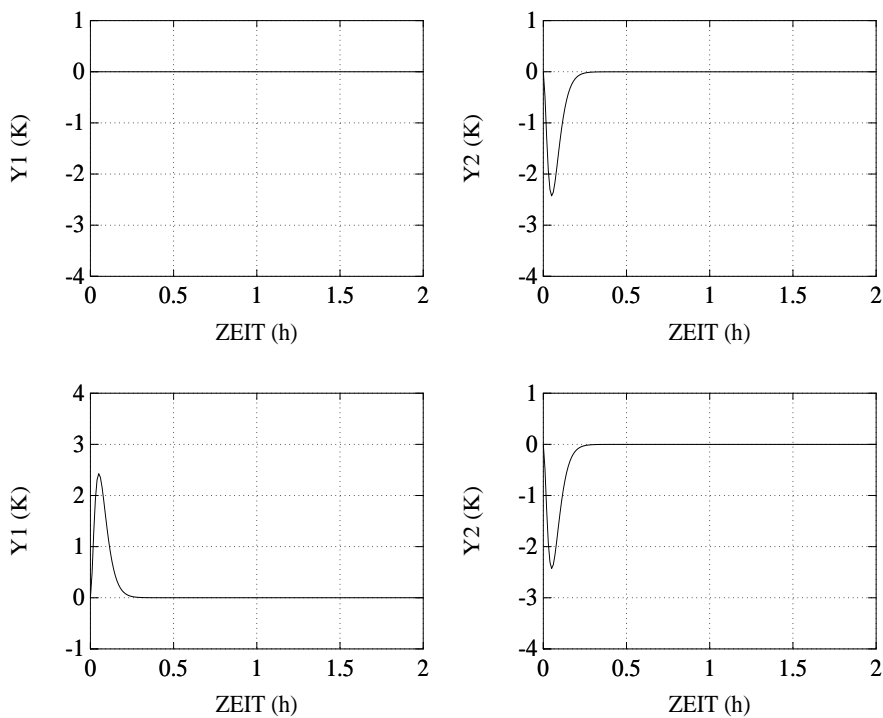


Bild 10.7: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen, Störfall 1 (oben) und Störfall 2 (unten).

10.5 Lösung des NLKF-Problems

10.5.1 Stabilisierbarkeit

Geht man von einer linkskoprimen Faktorisierung $\tilde{M}_w^{-1}(s)\tilde{N}_w(s)$ des gewichteten Streckenmodells $G_w(s) = W_a(s)G(s)W_e(s)$ aus, ergibt sich als mögliche

linkskopprime Faktorisierung für P aus (10.9):

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} I_l & \begin{bmatrix} -I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & -\widetilde{M}_w \end{bmatrix}}_{\widetilde{M}_v^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} \\ I_p & \widetilde{N}_w \end{bmatrix}}_{\widetilde{N}_v}. \quad (10.31)$$

Die Stabilisierbarkeitsbedingung (5.28), (5.29) ist also erfüllt.

10.5.2 Minimierungsstrategie

Verwendet man eine *normalisierte* linkskopprime Faktorisierung für $G_w(s)$, läßt sich das Minimum des H_∞ -Kriteriums explizit berechnen (vgl. Abschnitt 10.2.2):

$$\begin{aligned} \inf_{\text{stabilis. } K_w} \|\mathcal{F}_L(P, K_w)\|_\infty &= \sqrt{\frac{1}{1 - \|\widetilde{N}_w \widetilde{M}_w\|_H^2}} \\ &:= \gamma_{\min}. \end{aligned}$$

Die γ -Iteration kann also entfallen; es genügt, eine suboptimale H_∞ -Aufgabe für $\gamma = \gamma_{\min} + \epsilon$ zu lösen⁴. Diese gehört – da \widetilde{N}_v Bedingung (10.10) erfüllt – zu der Klasse „einfacher“ H_∞ -Probleme.

Mit der in Abschnitt 2.3 angegebenen „Rechenregel“ verschaffen wir uns zunächst aus einer Zustandsdarstellung minimaler Ordnung für G_w ,

$$G_w(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right],$$

eine Minimalrealisierung für Zähler- und Nennerterm einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung:

$$\left[\begin{array}{c|c} \widetilde{N}_w(s) & \widetilde{M}_w(s) \end{array} \right] \cong \left[\begin{array}{c|c} A + HC & B + HD & H \\ \hline \widetilde{\Xi}C & \widetilde{\Xi}D & \widetilde{\Xi} \end{array} \right]. \quad (10.32)$$

Zur Berechnung von H und $\widetilde{\Xi}$ nach (2.68) und (2.70) bedarf es der Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung (2.71). Mit (10.32) können wir unmittelbar eine Minimalrealisierung der Matrix Ω in (10.11) angeben:

$$\Omega(s) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline -\widetilde{N}_w(s) & -\widetilde{M}_w(s) \end{array} \right]$$

⁴Durch Wahrung eines „Abstandes“ vom erreichbaren Minimum vermeiden wir numerische Probleme – vgl. die Anmerkung in Abschnitt 10.3. Typisch ist $\epsilon = 0.05\gamma_{\min}$.

$$\cong \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & -B - HD & -H \\ \hline 0 & 0 & I_p \\ 0 & I_q & 0 \\ \tilde{\Xi}C & -\tilde{\Xi}D & -\tilde{\Xi} \end{array} \right]. \quad (10.33)$$

Durch Lösen einer weiteren algebraischen Riccati-Gleichung erhalten wir hieraus die Menge aller K_w , die dem „einfachen“ suboptimalen H_∞ -Problem genügen. Über (10.7) können wir schließlich auf einen im Regelkreis zu implementierenden Regler K zurückrechnen.

10.5.3 Beispiel: NLKF-Entwurf für ein Zweistoffdestillationsproblem

Beim NLKF-Entwurf geben wir im wesentlichen einen gewünschten Verlauf für die Singulärwerte der Frequenzgangmatrix $Q(j\omega)$ vor. Der Lösungsalgorithmus versucht dann, einen Regler zu finden, der den angestrebten Singulärwerte-Verlauf mit einem Maximum an Robustheit bezüglich faktorisierter Modellfehler verbindet. Wie beim Entwurf mittels Reversed Frame Normalizing zielen wir auf ein gleichförmiges Abfallen von 20dB pro Dekade im gesamten Frequenzbereich und Durchtrittsfrequenzen von ungefähr $40\frac{1}{h}$. Nun müssen wir Gewichtsmatrizen W_e und W_a finden, so daß die Singulärwerte des gewichteten Streckenmodells $W_a(j\omega)G(j\omega)W_e(j\omega)$ dieser Vorgabe näherungsweise entsprechen. Folgende Kombination stellt eine geeignete Wahl dar:

$$\begin{aligned} W_a(s) &= I_2 \\ W_e(s) &= W_{e1}W_{e2}(s). \end{aligned}$$

Die konstante reelle Matrix W_{e1} soll eine ungefähre Diagonalisierung des Streckenmodells in der Umgebung der gewünschten Durchtrittsfrequenz bewirken und wird deshalb mit Hilfe des Align-Algorithmus aus Abschnitt 9.1 so bestimmt, daß $G(j40)W_{e1} \approx e^{j\phi}$. Der zweite Faktor der Eingangsgewichtung soll das geforderte Integralverhalten einbringen und die Singulärwerte des offenen Kreises im niederfrequenten Bereich einander angleichen. Außerdem darf $G(j\omega)W_{e1}$ in der Nähe der angestrebten Durchtrittsfrequenz nicht verändert werden. Für W_{e2} setzen wir deshalb

$$W_{e2} = \frac{1}{s}(sI_2 + W_c),$$

wobei die konstante reelle Matrix W_c (wiederum mittels des Align-Algorithmus) so berechnet wird, daß $G(0)W_{e1}W_c \approx 40e^{j\phi}$. In Bild 10.8 (linke Seite) ist zu erkennen, daß die Singulärwerte des gewichteten Streckenmodells

die gewünschten Verläufe aufweisen. Nun können wir leicht eine Minimalrealisierung für $G_w(s)$ berechnen, uns eine Zustandsdarstellung einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung $\begin{bmatrix} \tilde{N}_w(s) & \tilde{M}_w(s) \end{bmatrix}$ verschaffen und hierdurch die Matrix $\Omega(s)$ in (10.33) festlegen. Als erreichbares Minimum γ_{\min} des H_∞ -Kostenfunktional ergibt sich 1.4176, die als „Erfolgs-Indikator“ zu deutende maximale Stabilitätsreserve beträgt also 0.7054. Wir können deshalb davon ausgehen, daß die angestrebten Ziele – gewünschter Verlauf für die Singulärwerte von $Q(j\omega)$ und Robustheit der Eigenschaft Stabilität hinsichtlich einer möglichst großen Klasse faktorisierten Modellfehler – erreicht werden. Nun berechnen wir für $\gamma = 1.05\gamma_{\min}$ die zentrale Lösung $K_w(s)$ des resultierenden „einfachen“ suboptimalen H_∞ -Problems – hierzu bedarf es lediglich der einmaligen Anwendung des Algorithmus zur J_γ -verlustfreien Faktorisierung. Durch Multiplikation mit den Gewichten W_e und W_a erhält man schließlich den gesuchten Regler

$$K(s) = W_e(s)K_w(s)W_a.$$

Er besitzt Ordnung 9 und bewirkt die in der rechten Hälfte von Bild 10.8 aufgetragenen Singulärwerte von $Q(j\omega)$. Sie unterscheiden sich offenbar von der in der linken Bildhälfte gezeigten Zielvorstellung nur unwesentlich.

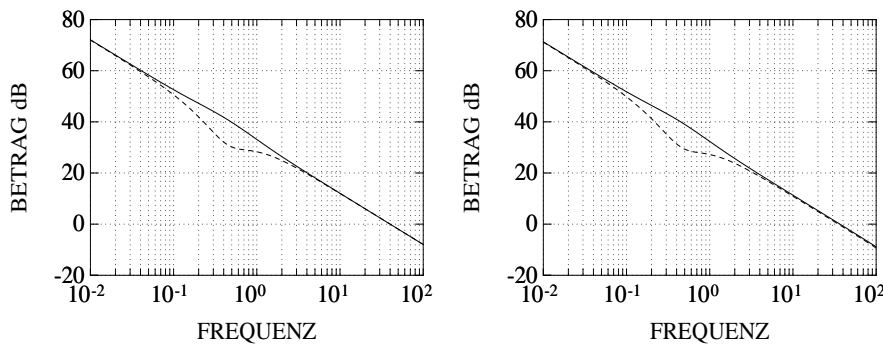


Bild 10.8: Singulärwerte von $G_w(j\omega) = W_a(j\omega)G(j\omega)W_e(j\omega)$ (links) und $Q(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ (rechts).

Die Singulärwerte-Verläufe von Sensitivitätsmatrix und komplementärer Sensitivitätsmatrix zeigt Bild 10.9. $\bar{\sigma}[S(j\omega)]$ liegt innerhalb des in Abschnitt 9.1 definierten zulässigen Gebietes, so daß die quantitativen Anforderungen zumindest im nominellen Fall als erfüllt gelten können. $\bar{\sigma}[T(j\omega)]$ verläuft unterhalb der Inversen der Schranke der Fehlerklasse (9.17), so daß wir nicht nur beträchtliche Robustheit bezüglich faktorisierten Modellfehler sondern auch Robustheit bezüglich aller zugelassenen multiplikativen Fehler Δ_M sichergestellt haben. In Bild 10.10 sind schließlich die Antworten des nominellen Regelkreises in Störfall 1 und 2 gezeigt.

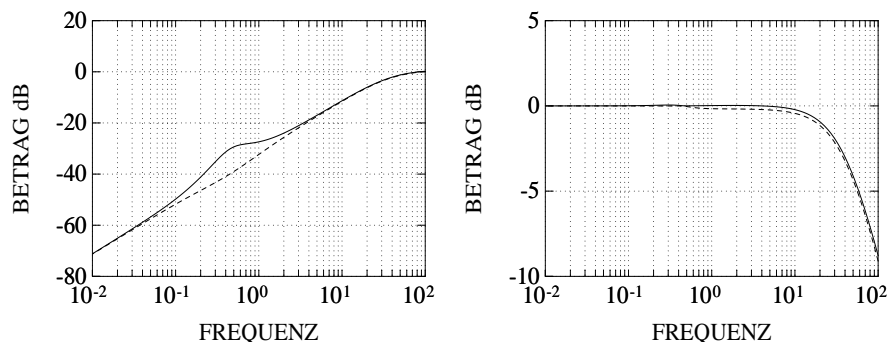


Bild 10.9: Singulärwerte von Sensitivitätsmatrix (links) und komplementärer Sensitivitätsmatrix (rechts).

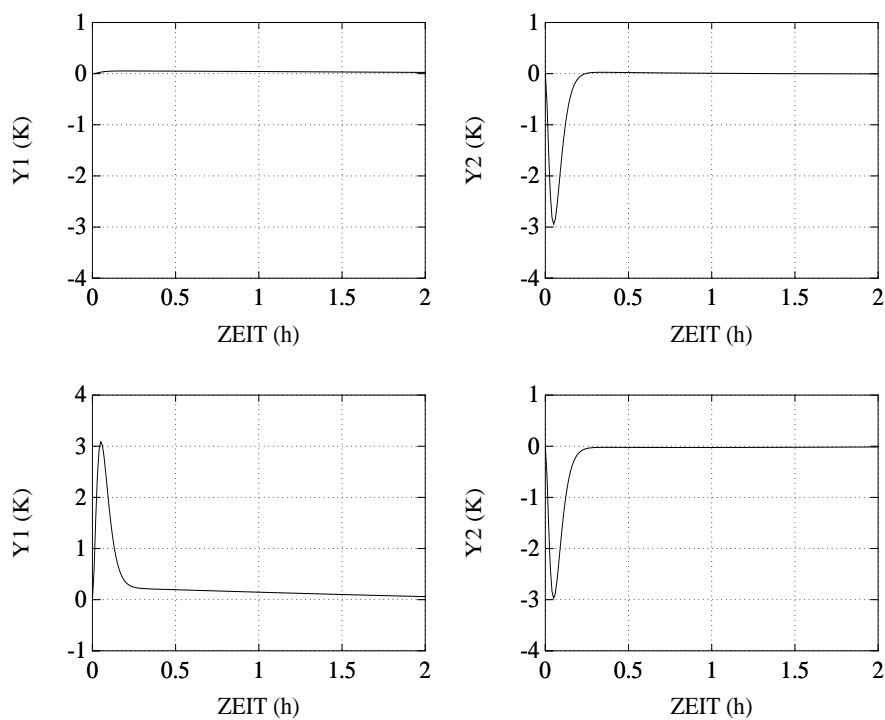


Bild 10.10: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen, Störfall 1 (oben) und Störfall 2 (unten).

10.6 Wertung und Zusammenfassung

H_∞ -Kriterien stellen eine einfache Möglichkeit dar, regelungstechnische Ziele mathematisch zu fassen. Wir haben zwei spezielle H_∞ -Minimierungsaufgaben besprochen: Beim $S/KS/T$ -Problem werden quantitative Anforderungen über

gewichtete Frequenzgangmatrizen des *geschlossenen* Kreises formuliert, beim NLKF-Problem durch Vorgeben gewünschter Singulärwerte-Verläufe für die Frequenzgangmatrix $Q(j\omega)$ des *offenen* Kreises. Diese Ansätze lassen sich in einen gemeinsamen Rahmen, das H_∞ -Standard-Problem, einbringen. Für letzteres haben wir einen von *Green* vorgeschlagenen Lösungsalgorithmus angegeben, der mit Hilfe der aufgeführten „Rechenregeln“ für Zustandsdarstellungen leicht implementiert werden kann. Für den Anwender ist es sicher nicht notwendig, die Details dieses Algorithmus zu kennen, da im Moment mehrere Software-Produkte zur Lösung des H_∞ -Standard-Problems zu beziehen sind. Trotzdem hat die Darstellung des Algorithmus ihre Berechtigung; mit ihrer Hilfe läßt sich nicht nur die Ordnung der (suboptimalen) Lösung ermitteln, sondern auch der numerische Aufwand zur (näherungsweise) Lösung abschätzen: Beim NLKF-Problem bedarf es nur der einmaligen Lösung zweier algebraischer Riccati-Gleichungen – einer zur Bestimmung einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung, einer zur Bearbeitung eines suboptimalen „einfachen“ H_∞ -Standard-Problems. Beim $S/KS/T$ -Problem muß die Lösung dagegen i.a. iterativ ermittelt werden. Ist das Modell der Regelstrecke stabil, so benötigt man in jedem Schritt der γ -Iteration die Lösung *einer*, andernfalls die Lösung *zweier* algebraischer Riccati-Gleichung(en).

Der Unterschied bezüglich des numerischen Aufwands zur Lösung von NLKF- und „Gemischtem Sensitivitäts“-Problem liegt also auf der Hand. Vom Standpunkt des Anwenders aus betrachtet, ist aber viel interessanter, welches der beiden Verfahren sich besser für welchen konkreten Anwendungsfall eignet. Wie in Abschnitt 6.1.1.3 diskutiert, ermöglicht die der Formulierung des NLKF-Problems zugrundeliegende faktorisierte Fehlerbeschreibung die Behandlung von Regelstrecken mit einer unbekanntem Zahl instabiler Pole. Eine solche Fehlerbeschreibung drängt sich auch auf, falls die Strecke leicht gedämpfte resonante Pole aufweist: Kleine Unsicherheiten in der Lage dieser Pole lassen sich nur durch sehr große additive oder multiplikative Fehlerstrahlen erfassen. Ein $S/KS/T$ -Entwurf muß deshalb in einem solchen Fall zu überaus konservativen Ergebnissen führen. Dies spiegelt sich auch in einer anderen Eigenschaft des $S/KS/T$ -Entwurfs wider: Um den verallgemeinerten Regelkreis entsprechend der vorgegebenen frequenzabhängigen Gewichte zu „formen“, wird der Regler versuchen, das Streckenmodell so weit als möglich zu „neutralisieren“: Sämtliche stabilen Pole von G werden durch Übertragungsnullstellen des Reglers gekürzt. Stimmen die Pole von Entwurfsmodell G und fehlerbehaftetem Streckenmodell G_r nicht exakt überein, so findet eine solche Pol-Nullstellenkürzung offenbar nur im nominellen Regelkreis, nicht aber in (G_r, K) statt; entsprechende Pole werden deshalb in (G_r, K) präsent sein und – bei schwacher Dämpfung – potentielle Probleme verursachen. Eine solche (versuchte) Pol-Nullstellenkürzung wird im NLKF-Fall durch die spezielle Wahl des Gewichts W_i (Gl. (10.5)) verhindert.

Als „closed loop shaping“ Verfahren besitzt der $S/KS/T$ -Ansatz hingegen Vorteile, wenn sich die Anforderungen bezüglich der geregelten Größen stark unterscheiden und die Maximalraten/zulässigen Wertebereiche der Stellvariablen sehr verschieden sind. Eine solche Situation ist mit dem $S/KS/T$ -Ansatz leicht zu beherrschen, da alle Stell- und Regelgrößen individuell gewichtet werden können.

Beim Vergleich mit den quasi-klassischen Verfahren fällt (neben den angesprochenen Vorteilen) auch ein gravierender Nachteil ins Auge: Der Entwurfsprozeß liefert i.a. eine vollbesetzte Regler-Übertragungsmatrix mit vergleichsweise hohem McMillan-Grad: Den vorangehenden Ausführungen kann man leicht entnehmen, daß beim $S/KS/T$ -Entwurf die Ordnung von verallgemeinertem Streckenmodell und Regler übereinstimmt; beim NLKF-Entwurf entspricht die Ordnung des Reglers der Summe der Ordnungen von gewichtetem Streckenmodell und Gewichtsmatrizen. Durch Anwendung von Modellreduktionsverfahren kann die Reglerordnung zwar nachträglich verringert werden, doch muß dann in jedem Fall überprüft werden, ob eine Einhaltung der gesetzten regelungstechnischen Ziele noch gewährleistet ist. Eine solche Vorgehensweise ist zwar praktikabel (in vielen Anwendungsfällen sogar unabdingbar), aber sicher weniger befriedigend, als ein direktes Vorgeben der maximalen Reglerordnung während des Entwurfs. Bis heute kennt man außerdem keine zufriedenstellende Vorgehensweise, um einem mittels H_∞ -Methoden entworfenen Regler eine vom Anwender gewünschte Struktur (z.B. (Block-) Diagonal- oder (Block-) Dreiecksform der Regler-Übertragungsmatrix) „aufzuzwingen“.

10.7 Literaturhinweise

Die Literatur über H_∞ -Verfahren ist so umfangreich, daß ein Aufzählen aller relevanten Publikationen an dieser Stelle nicht in Frage kommt. Hier sei nur auf einige „Meilensteine“ der Entwicklung dieser Methoden hingewiesen: H_∞ -Probleme wurden von Zames [117] in die Regelungstechnik eingeführt. Sie wurden zunächst durch folgenden Lösungsansatz angegangen: Man berechnet durch Youla-Parametrierung alle stabilisierenden Regler und stellt das H_∞ -Kriterium in Abhängigkeit vom frei zu wählenden Youla-Parameter $\hat{Q}(s)$ dar (diese Vorgehensweise werden wir bei der Lösung der H_2 -Minimierungsaufgabe in Abschnitt 11.2 näher kennenlernen). Das resultierende Minimierungsproblem wird als „model matching problem“ bezeichnet; durch Iteration kann eine (beliebig genaue) obere Schranke für den minimalen Wert der Kostenfunktion bestimmt werden; anschließend wird auf das sogenannte *Nehari-Problem* (optimale Approximation einer \mathcal{RL}_∞ -Matrix durch eine \mathcal{RH}_∞ -Matrix) reduziert. Letzteres kann dann mit einer Methode von Glover [34] gelöst werden. Dieser „indirekte Ansatz“ wird ausführlich von Francis und Doyle [26][27]

beschrieben. Alle notwendigen Berechnungen können zwar im Zustandsraum durchgeführt werden, die Dimensionen vergrößern sich aber in sukzessiven Schritten, so daß der resultierende Algorithmus numerisch überaus aufwendig ist. Ein sehr viel einfacherer und numerisch zuverlässigerer Algorithmus wurde von *Doyle, Glover, Khargonekar* und *Francis* [35][14][15] vorgeschlagen. Andere Herleitungen dieses oft als „2-Riccati-Ansatzes“ bezeichneten Algorithmus findet man in den Arbeiten von *Green et al.* [40], *Kimura* [52] und *Green* [38][39]. Letzterer Literaturstelle entstammt der in diesem Kapitel dargestellte Weg zur Lösung des H_∞ -Standard-Problems. Schließlich sei noch auf den alternativen, auf Polynommatrizen basierenden Ansatz von *Kwakernaak* (z.B. [56]) hingewiesen. Eine sehr viel ausführlichere Literaturübersicht findet man in den zitierten Abhandlungen [26], [15] und [39].

Die auf Seite 300 beschriebene Möglichkeit zur Berechnung der H_∞ -Norm mittels der Matrizen einer Zustandsdarstellung entstammt der Arbeit von *Boyd et al.* [7]. Die oft als „ H_∞ -loop-shaping“ bezeichnete NLKF-Entwurfsprozedur wurde von *Glover* und *McFarlane* [36][74] vorgeschlagen. Pol-Nullstellenkürzungen bei $S/KS/T$ - und NLKF-Problem wurden von *Sefton* und *Glover* [102] sowie *Postlethwaite* [89] untersucht.

Zur Lösung von H_∞ -Aufgaben existiert eine Reihe von Software-Produkten. Für nähere Informationen sei wiederum auf [29] und den WGS Newsletter [105] verwiesen. Viele Berechnungen in diesem Kapitel wurden mit Hilfe der auf MATLAB basierenden *Robust Control Toolbox* [71] oder der *μ -Analysis and Synthesis Toolbox* [72] durchgeführt.

Kapitel 11

Sonstige Verfahren

11.1 μ -Synthese

In Kapitel 6 wurde behandelt, wie sich mit Hilfe strukturierter Singulärwerte Robustheit von Stabilität und quantitativen Regelkreiseigenschaften überprüfen lässt. Diese Vorgehensweise wird als μ -Analyse bezeichnet. Nun liegt es nahe, dieses Werkzeug nicht nur zur Analyse, sondern auch zur *Synthese* von Reglern einzusetzen. Nehmen wir an, wir hätten quantitative Anforderungen durch Definition einer geeigneten Übertragungsmatrix \hat{R} festgelegt (vgl. Bild 11.1 und die Diskussion in Abschnitt 6.3). \hat{R} hängt natürlich vom

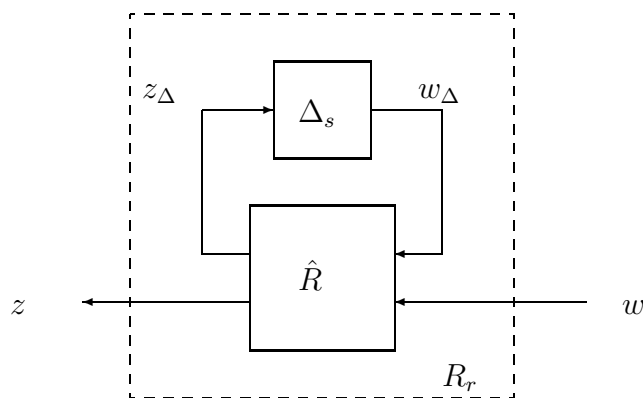


Bild 11.1: Verallgemeinerter Regelkreis mit strukturiertem Fehler Δ_s .

zu entwerfenden Regler K ab; „trennen“ wir diesen „heraus“, so erhalten wir eine Übertragungsmatrix \hat{V} mit jeweils drei vektoriellen Ein- und Ausgangssignalen (s. Bild 11.2). Offensichtlich gilt:

11.1.1 $D - K$ -Iteration

Die $D - K$ -Iteration sieht ein abwechselndes Minimieren über der Menge \mathbf{D} der Skalierungsmatrizen D und der Menge der stabilisierenden Regler-Übertragungsmatrizen vor. Zweiteres ist ein H_∞ -Problem, dessen Lösung wir aus Abschnitt 10.3 kennen. k sei der Iterationsindex; die Details des Iterationsvorgangs lauten dann¹:

Iterationsbeginn: $k = 0$, $D^{(k)}(j\omega) = I_{l_{\Delta_s}}$.

Iterationsschritt: $k = k + 1$.

Lösung des H_∞ -Problems

$$\inf_{\text{stabilis. } K^{(k)}} \sup_{\omega} \bar{\sigma} \underbrace{[D^{(k-1)}(j\omega) \mathcal{F}_L(\hat{V}(j\omega), K^{(k)}(j\omega)) (D^{(k-1)})^{-1}(j\omega)]}_{\|D^{(k-1)} \mathcal{F}_L(\hat{V}, K^{(k)}) (D^{(k-1)})^{-1}\|_\infty}.$$

Mit dem eben berechneten $K^{(k)}(s)$ löse man für eine Reihe von Frequenzen ω_i , $i = 1, \dots, N$, das Minimierungsproblem

$$\inf_{D_i^{(k)} \in \mathbf{D}} \bar{\sigma} [D_i^{(k)} \mathcal{F}_L(\hat{V}(j\omega_i), K^{(k)}(j\omega_i)) (D_i^{(k)})^{-1}],$$

d.h. man berechnet für den betrachteten diskreten Frequenzbereich und den Regler $K^{(k)}$ eine obere Schranke des strukturierten Singulärwertes $\mu_{\bar{\Delta}_s}[\mathcal{F}_L(\hat{V}, K^{(k)})]$. Diesen trägt man über der Frequenz auf. Falls der Maximalwert kleiner oder gleich 1 ist, hat man das gesteckte Ziel erreicht. Andernfalls löst man ein Interpolationsproblem und bestimmt eine in \mathcal{RH}_∞ invertierbare Übertragungsmatrix $D^{(k)}(s)$, die die Skalierungsmatrizen $D_i^{(k)}$ für die Frequenzen ω_i , $i = 1, \dots, N$, approximiert:

$$D^{(k)}(j\omega_i) \approx D_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Man bricht die Iteration ab, wenn

- man eine obere Schranke für das gesuchte $\mu_{\bar{\Delta}_s}$ gefunden hat, die für alle ω kleiner oder gleich 1 ist. In diesem Fall verwirklicht der bestimmte Regler alle gestellten Anforderungen;
- das Maximum der berechneten oberen Schranke für $\mu_{\bar{\Delta}_s}$ auf einen größeren Wert als 1 zustrebt. In diesem Fall existiert entweder kein Regler mit den gewünschten Eigenschaften, oder der Algorithmus kann ihn nicht finden.

¹Wir beschreiben wiederum nur den Sonderfall einer quadratischen Struktur $\bar{\Delta}_s$. Zur Behandlung des nichtquadratischen Falles s. die Anmerkung auf Seite 199.

Man kann sich leicht vorstellen, daß diese Prozedur selbst für einfache Probleme einen enormen Rechenaufwand bedeutet: Zum einen wird der H_∞ -Minimierung – die selbst einen iterativen Vorgang darstellt – eine weitere Iterationsschleife überlagert; zum andern erhöht sich die Ordnung des H_∞ -Problems durch Einbeziehung der dynamischen Skalierungen $D^{(k)}(s)$. Auch der resultierende Regler besitzt deswegen höhere Ordnung als ein „gewöhnlicher“ H_∞ -Regler. Die Dimension einer Zustandsdarstellung hängt natürlich von der Komplexität der Skalierungen ab; in den meisten Fällen wird man aber die Reglerordnung vor einer Implementierung durch Modellreduktion drastisch verkleinern müssen. Weiterhin ist nicht gewährleistet, daß das beschriebene Schema gegen das tatsächliche Minimum konvergiert. Eine alternative, als $\mu - K$ -Iteration bezeichnete Vorgehensweise wird in [59] vorgeschlagen. Auch dieses Schema braucht nicht gegen das gesuchte Minimum zu konvergieren.

11.1.2 Beispiel: Zweistoffdestillationsproblem

Nun wollen wir das Verfahren der μ -Synthese zum Entwurf eines Reglers für das Zweistoffdestillationsproblem aus Abschnitt 9.1 einsetzen. Mittels dieser Methode lassen sich sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Fehler behandeln. Wir beginnen mit der unstrukturierten Fehlerklasse (9.17). Die gesuchte Regler-Übertragungsmatrix soll also für alle zulässigen Fehlermatrizen Δ_M asymptotische Stabilität garantieren und sicherstellen, daß (wiederum für alle Δ_M)

$$\bar{\sigma}[S_r(j\omega)] = \bar{\sigma} \left[\left(I_2 + \underbrace{(I_2 + \Delta_M(j\omega))G(j\omega)}_{G_r(j\omega)} K(j\omega) \right)^{-1} \right]$$

inner- oder unterhalb der in Bild 9.14 gezeigten Bänder verläuft. Wir greifen deshalb einen Frequenzgang mit „am oberen Rand“ des zulässigen Bereiches angesiedeltem Betrag heraus (z.B.: $\frac{j\omega}{j\omega+26}$) und fordern

$$\bar{\sigma}[S_r(j\omega)] \leq \left| \frac{j\omega}{j\omega + 26} \right| \quad \text{für alle } \omega$$

bzw.

$$\left\| \frac{s+26}{s} S_r(s) \right\|_\infty \leq 1.$$

Für das unterlagerte H_∞ -Problem benötigen wir allerdings asymptotisch stabile Gewichte, so daß wir als Gewichtungsmatrix statt $(s+26)/s I_2$ das im

relevanten Frequenzbereich praktisch identische

$$W_s(s) = \underbrace{\frac{s + 26}{s + 0.00001}}_{:=w_s(s)} I_2$$

wählen.

Um die Matrix \hat{V} zu bestimmen, betrachten wir das in Bild 11.3 dargestellte Signalflußdiagramm.

$$l_M(j\omega) := 0.175 \frac{\left| \frac{j\omega}{7} + 1 \right|}{\left| \frac{j\omega}{200} + 1 \right|}$$

bezeichnet die frequenzabhängige obere Schranke des Fehlers Δ_M . Δ_1 steht für die „normierte“ Version des Fehlermodells: $\Delta_1 := \frac{1}{l_M} \Delta_M$. Die resultieren-

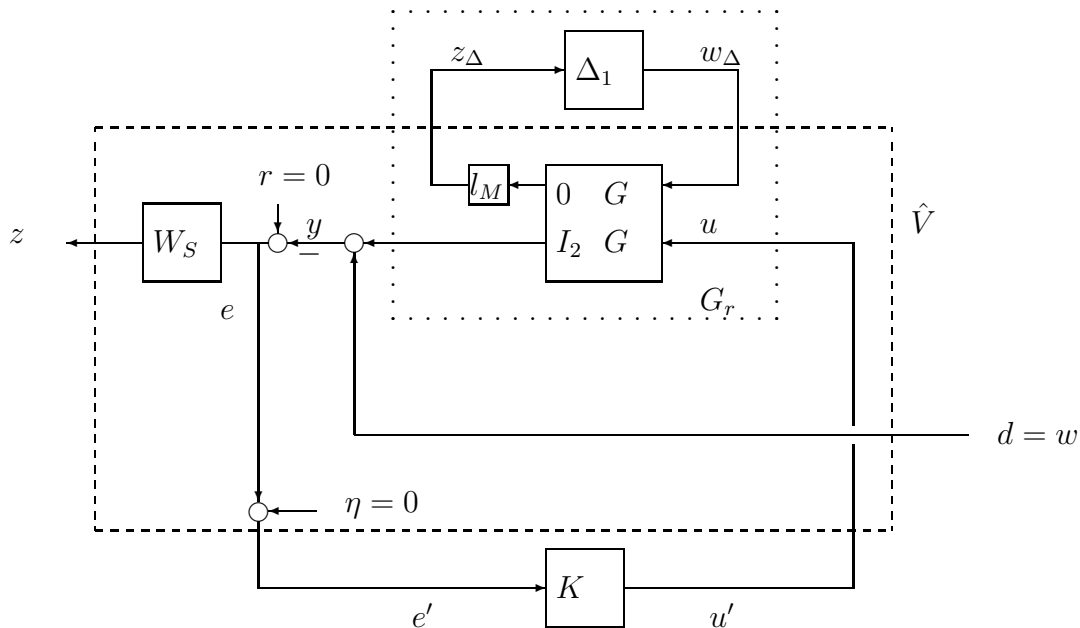


Bild 11.3: Verallgemeinerter Regelkreis für das Zweistoffdestillationsproblem – Version 1.

de Matrix \hat{V} erfüllt aber nicht die zur Lösung des H_∞ -Problems notwendige Rangbedingung: Da G streng proper ist, verschwindet $\hat{V}_{12}(j\omega)$ für $\omega = \infty$ und besitzt somit nicht wie gefordert vollen Spaltenrang für alle Frequenzen. Deshalb erweitern wir den Vektor z durch eine gewichtete Version der Stellvariablen (s. Bild 11.4). Da Stellgliedbeschränkungen für das betrachtete Problem keine Rolle spielen, können wir deren Gewichtung sehr klein wählen: $W_{KS} = 0.01I_2$. Nun liegt eine geeignete Matrix \hat{V} fest. Aus Bild 11.4 läßt sich

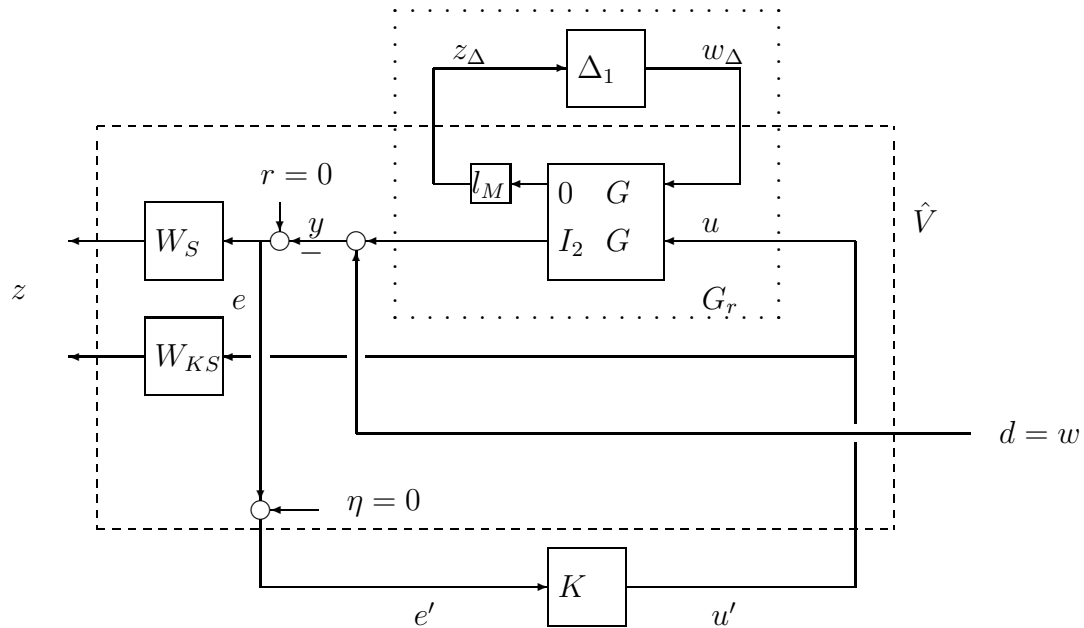


Bild 11.4: Verallgemeinerter Regelkreis für das Zweistoffdestillationsproblem – Version 2.

sofort ablesen, daß gilt:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\Delta} \\ z \\ e' \end{bmatrix} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\Delta} \\ W_S e \\ W_{KS} u \\ e' \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -W_S & -W_S \\ 0 & 0 \\ -I_2 & -I_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} l_M G \\ -W_S G \\ W_{KS} \\ -G \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{=\hat{V}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{\Delta} \\ w \\ u' \end{bmatrix} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Die erweiterte Struktur $\bar{\Delta}_s$, die das μ -Problem definiert, besteht aus einem vollbesetzten 2×2 -Block $\bar{\Delta}_1$ in der linken oberen Ecke und einem ebenfalls vollbesetzten 2×4 -Block $\bar{\Delta}$ in der rechten unteren Ecke (Bild 11.5).

Mit dieser Information können wir die $D - K$ -Iteration beginnen. Bild 11.6 zeigt die berechnete obere Schranke für $\mu_{\bar{\Delta}_s}[\mathcal{F}_L(\hat{V}, K^{(k)})]$ im ersten und zweiten Iterationsschritt. Die Regler-Übertragungsmatrix $K^{(2)}$ gewährleistet also Robustheit von asymptotischer Stabilität und gewünschten (im Frequenzbereich formulierten) quantitativen Eigenschaften. Für alle zulässigen Δ_M ist

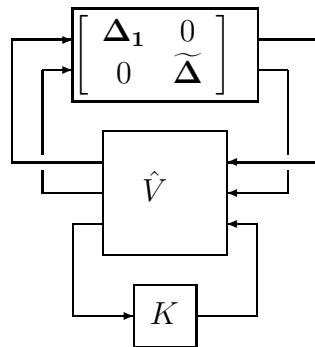


Bild 11.5: Verallgemeinerter Regelkreis mit erweiterter Blockstruktur.

also sichergestellt, daß

$$\left\| \begin{bmatrix} W_S S_r \\ W_{KS} K S_r \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq 1$$

und damit natürlich auch – wie gefordert –

$$\bar{\sigma}[S_r(j\omega)] \leq \frac{1}{|w_S(j\omega)|} \quad \text{für alle } \omega.$$

Die in Abschnitt 9.1 vorgenommene Übersetzung von Zeitbereichsspezifikationen in den Frequenzbereich war allerdings nur heuristischer Natur; deshalb gibt es *keine Garantie*, daß auch die geforderten *Zeitbereichsbedingungen* für alle zulässigen Fehler eingehalten werden; eine gewisse Zuversicht ist in dieser Hinsicht dagegen durchaus angebracht – vor allen Dingen, wenn man zur Überprüfung nicht nur die Sprungantworten des nominellen Regelkreises auf verschiedene Störungen berechnet (Bild 11.7), sondern das Regelkreisverhalten auch bei Auftreten einiger zulässiger Fehlerterme simuliert. Bei keinem dieser Versuche wurde eine Verletzung der Zeitbereichsspezifikationen festgestellt.

Wenn wir die Klasse (9.16) strukturierter Fehler behandeln wollen, müssen wir lediglich G_r in Bild 11.4 durch eine geeignete „Upper Linear Fractional Transformation“ ersetzen, in der die unabhängigen relativen Fehler der Elemente des Streckenmodells auftreten.

$$l(j\omega) := 0.125 \frac{\left| \frac{j\omega}{7} + 1 \right|}{\left| \frac{j\omega}{200} + 1 \right|}$$

bezeichnet die frequenzabhängige obere Schranke der Fehler δ_{ik} , $i, k = 1, 2$. Die normierten Versionen dieser Fehler nennen wir

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \frac{\delta_{11}}{l}, & \Delta_2 &:= \frac{\delta_{12}}{l}, \\ \Delta_3 &:= \frac{\delta_{21}}{l}, & \Delta_4 &:= \frac{\delta_{22}}{l}. \end{aligned}$$

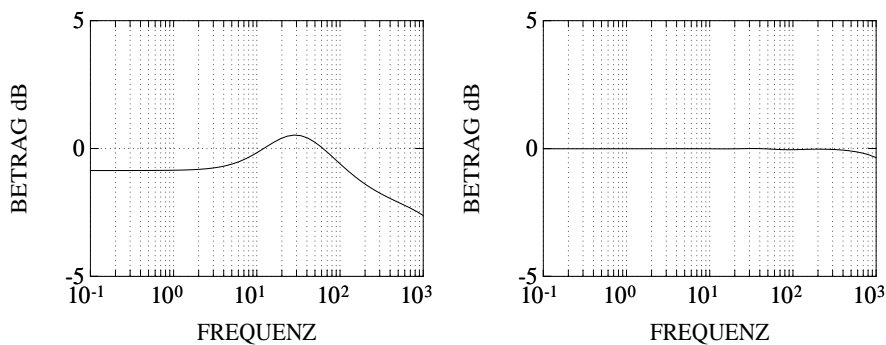


Bild 11.6: Obere Schranke für $\mu_{\Delta_s}[\mathcal{F}_L(\hat{V}, K^{(k)})]$, $k = 1$ (links) und $k = 2$ (rechts).

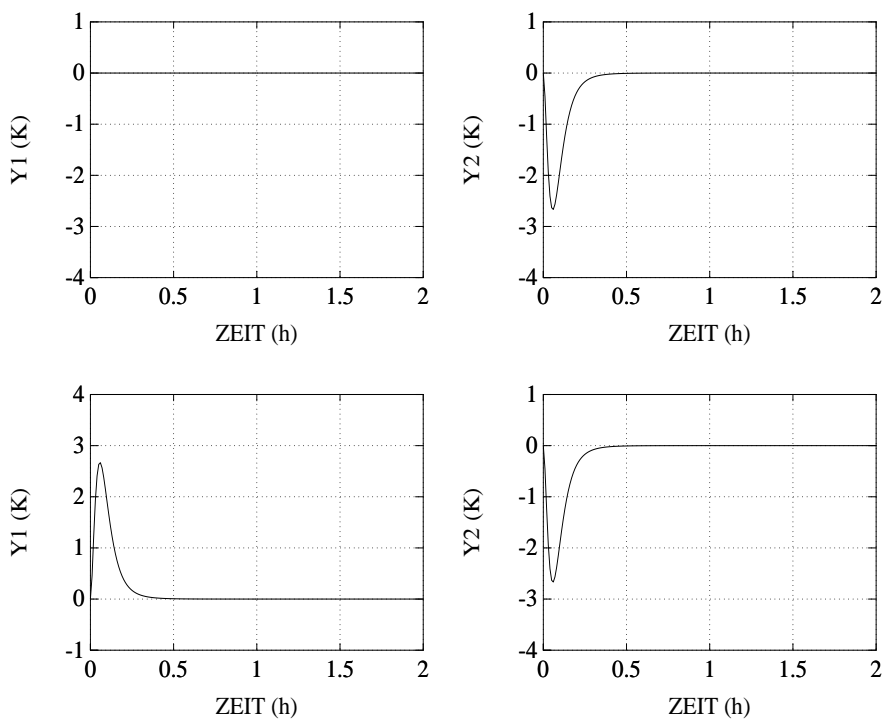


Bild 11.7: Zeitliche Verläufe der Regelgrößen, Störfall 1 (oben) und Störfall 2 (unten).

Wie wir vorgehen müssen, um die Matrix \hat{V} zu finden, läßt sich wiederum am besten anhand eines Signalflußdiagrammes veranschaulichen. Aus Bild 11.8 läßt sich sofort ablesen, daß gilt:

$$G_r = \mathcal{F}_U(\Theta, \text{diag}\{\Delta_i\}), \quad (11.1)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} & & & & \begin{bmatrix} lg_{11} & 0 \\ 0 & lg_{12} \\ lg_{21} & 0 \\ 0 & lg_{22} \end{bmatrix} \\ & 0 & & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & & & & G \end{bmatrix}. \quad (11.2)$$

Nun müssen wir lediglich das fehlerbehaftete Streckenmodell G_r in Bild 11.4

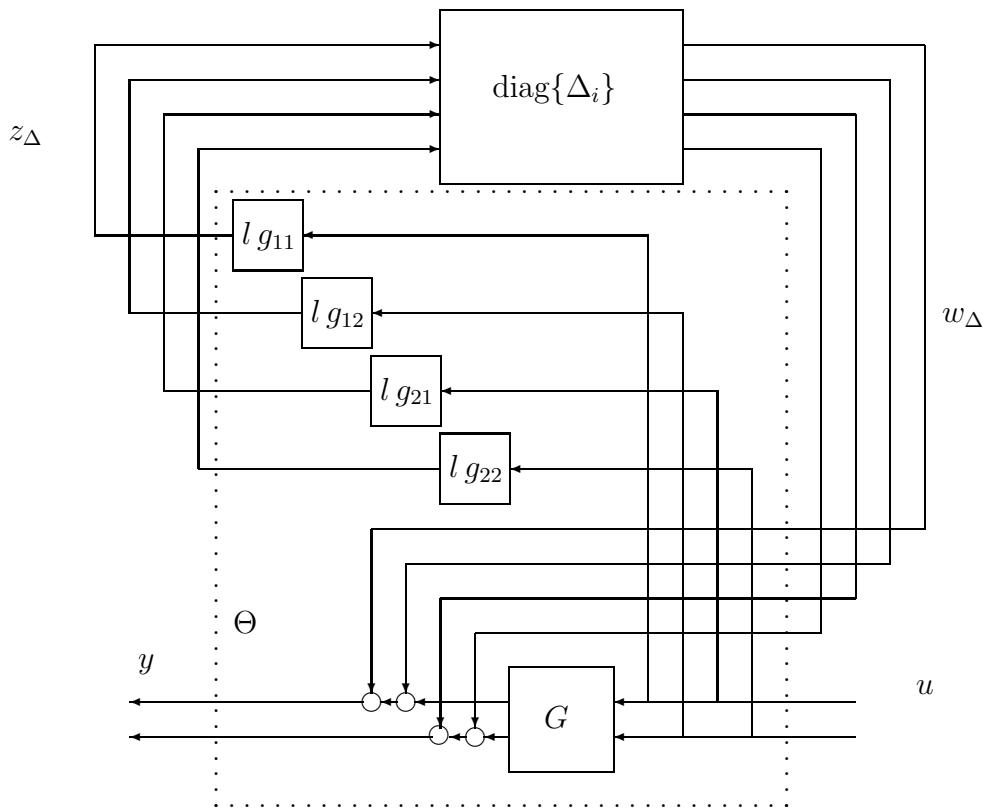


Bild 11.8: Streckenmodell mit relativen Fehlern in den Einzelementen.

durch (11.1) und (11.2) ersetzen; wir erhalten dann die Matrix \hat{V} , die zusammen mit der (diagonalen) Blockstruktur $\text{diag}\{\Delta_i\}$ das μ -Problem bestimmt;

sie lautet:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \begin{bmatrix} lg_{11} & 0 \\ 0 & lg_{12} \\ lg_{21} & 0 \\ 0 & lg_{22} \end{bmatrix} \\ -W_S \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & -W_S & -W_S G \\ 0 & 0 & W_{KS} \\ -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & -I_2 & -G \end{bmatrix}.$$

Die übrige Problemstellung, insbesondere die Wahl der Gewichtungsmatrizen W_S und W_{KS} , bleibt unverändert.

11.1.3 Wertung

Mit Hilfe der μ -Synthese lassen sich allgemeinere Probleme angehen als mit allen bisher behandelten Entwurfsverfahren. Mittels des strukturierten Singulärwertes μ kann man notwendige *und* hinreichende Bedingungen für Robustheit von Stabilität und quantitativen Regelkreiseigenschaften bezüglich einer weiten Klasse strukturierter und unstrukturierter Modellfehler angeben. Wie beim H_∞ -Standard-Problem (als dessen Verallgemeinerung man μ -Synthese auffassen kann) wird dem Anwender ein Rahmen zur Verfügung gestellt, in den er durch Definition einer geeigneten „Problem-Matrix“ \hat{V} eine Vielzahl von regelungstechnischen Zielen einbringen kann.

Auf der Negativseite ist anzumerken, daß die im Moment zur Verfügung stehenden Algorithmen zur μ -Synthese noch nicht als ausgereift bezeichnet werden können. Die als $D - K$ -Iteration bekannte Vorgehensweise braucht nicht zu konvergieren. Für höherdimensionale Probleme wird der rechentechnische Aufwand (und damit die „Wartezeit“) so groß, daß das notwendige interaktive Eingreifen in den Entwurfsprozeß (z.B. das Anpassen von Gewichtungsmatrizen) zum mehrstündigen (oder schlimmer) Geduldsspiel ausarten kann. Ein zweiter dem Verfahren eigener Nachteil ist die sich ergebende hohe Reglerordnung – der Implementierung des Reglers muß fast immer eine Modellreduktion seiner Übertragungsmatrix vorgeschaltet werden.

Ob zusätzlicher Aufwand und Komplexität der μ -Synthese lohnen, muß man im Einzelfall entscheiden. Entsprechend dem Guy Fawkes zugeschriebenen Ausspruch von Seite 123 existieren aber sicherlich Problemstellungen, bei denen von allen behandelten Verfahren nur der Einsatz der μ -Synthese Erfolg verspricht.

11.2 H_2 -Minimierung

H_2 -Minimierung fügt sich nur schwer in den Rahmen dieses Buches ein und soll deshalb – im Gegensatz zu anderen Methoden – lediglich angerissen werden. Allen bisher besprochenen Verfahren war gemein, daß für *jede* Frequenz bestimmte Betrags- oder Norm-Bedingungen erfüllt werden mußten. Auf diese Art und Weise konnten wir sowohl quantitative Anforderungen wie auch Robustheitsprobleme behandeln. Die H_2 -Norm kann zwar ebenfalls sinnvolle (wenn auch andere) quantitative Zielsetzungen widerspiegeln, Robustheitsbedingungen lassen sich jedoch i.a. nicht direkt mit ihr verknüpfen. Der Grund hierfür ist, daß die H_2 -Norm (wie wir gleich sehen werden) als *Integral* über *alle* Frequenzen definiert ist. Keine obere Schranke für die H_2 -Norm kann deswegen ausschließen, daß Beträge oder maximaler Singulärwert der zugehörigen Frequenzgangmatrix für ein bestimmtes ω einen vorgegebenen Maximalwert überschreiten und so Robustheitsbedingungen verletzen.

11.2.1 Die H_2 -Norm

Definition 11.1 (\mathcal{RL}_2 und L_2 -Norm) _____

Die Menge aller $p \times q$ -Übertragungsmatrizen, die streng proper sind und keine Pole auf der imaginären Achse aufweisen, bezeichnet man mit $\mathcal{RL}_2^{p \times q}$. Für jedes $G(s) \in \mathcal{RL}_2^{p \times q}$ ist die L_2 -Norm definiert:

$$\|G\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur}[G(j\omega)^*G(j\omega)] \, d\omega}. \quad (11.3)$$

Anmerkung: Man kann zeigen, daß auch gilt:

$$\begin{aligned} \|G\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(j\omega)\|_F^2 \, d\omega} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{\min\{p,q\}} \sigma_i^2[G(j\omega)] \, d\omega}. \end{aligned}$$

Für eine Untermenge – alle asymptotisch stabilen Übertragungsmatrizen aus $\mathcal{RL}_2^{p \times q}$ – benutzen wir das Symbol $\mathcal{RH}_2^{p \times q}$:

Definition 11.2 (\mathcal{RH}_2 und H_2 -Norm) _____

Die Menge aller asymptotisch stabilen $p \times q$ -Übertragungsmatrizen, die streng proper sind, nennt man $\mathcal{RH}_2^{p \times q}$. Für $G(s) \in \mathcal{RH}_2^{p \times q}$ bezeichnet man (11.3) als H_2 -Norm. _____

Die H_2 -Norm einer Übertragungsmatrix läßt sich auf einfache Art und Weise anhand einer Zustandsdarstellung berechnen:

Satz 11.1 (Berechnung der H_2 -Norm)

Die Übertragungsmatrix $G(s)$ sei streng proper. Sie besitze eine (nicht notwendigerweise minimale) asymptotisch stabile Zustandsdarstellung,

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right].$$

P_o und P_c bezeichnen die in (3.31) bzw. (3.32) definierten Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeits-Gramm-Schen. Dann gilt:

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\text{Spur}[B^T P_o B]} \quad (11.4)$$

$$= \sqrt{\text{Spur}[C P_c C^T]}. \quad (11.5)$$

Beweis: Die Impulsantwort (i.e. die Laplace-Rücktransformierte) von $G(s)$ ist $Ce^{At}B$. Mittels des Parseval-Theorems folgt nun unmittelbar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur}[G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega &= \int_0^{\infty} \text{Spur}[(Ce^{At}B)^T Ce^{At}B] dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{Spur}[B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B] dt \\ &= \text{Spur}[B^T \underbrace{\int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt}_{=P_o} B]. \end{aligned}$$

(11.5) zeigt man analog.

11.2.2 H_2 -Norm und regelungstechnische Ziele

Welche quantitativen regelungstechnischen Ziele kann man nun mittels der H_2 -Norm formulieren? Hier sind vor allem zwei Fälle zu nennen – beide sind im Zeitbereich angesiedelt:

Untersuchung stochastischer stationärer Signale: Die Eingangsgröße $u(t)$ des asymptotisch stabilen Übertragungssystems $G(s)$ sei mittelfreies weißes Rauschen, besitze also Spektraldichte $\Phi_{uu}(\omega) = I_q$.

Die Spektraldichte des Ausgangssignals ist dann bekanntlich

$$\begin{aligned}\Phi_{yy}(\omega) &= G(j\omega)\Phi_{uu}(\omega)G(j\omega)^* \\ &= G(j\omega)G(j\omega)^*.\end{aligned}$$

Für die Autokorrelationsmatrix des Ausgangsvektors erhält man darum

$$E[y(t)y(t)^T] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)G(j\omega)^* d\omega$$

(E steht für „Erwartungswert“); deswegen gilt:

$$E[y(t)^T y(t)] = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur} [G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega}_{(\|G\|_2)^2}.$$

Systemantwort auf impulsförmige Eingangssignale: $y^{(i)}(t)$ bezeichne die (vektorielle) Systemantwort auf eine impulsförmige Anregung der i -ten Eingangsgröße:

$$y^{(i)}(t) = C e^{At} b_i, \quad i = 1, \dots, q.$$

Nun betrachten wir die Quadrate der in den Impulsantworten enthaltenen Energien und summieren diese auf:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^q \int_0^{\infty} y^{(i)}(t)^T y^{(i)}(t) dt &= \sum_{i=1}^q \int_0^{\infty} (C e^{At} b_i)^T C e^{At} b_i dt \\ &= \int_0^{\infty} \text{Spur} [(C e^{At} B)^T C e^{At} B] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \text{Spur} [G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega}_{(\|G\|_2)^2}.\end{aligned}$$

Die letzte Zeile erhält man wiederum durch Anwendung des Parseval-Theorems.

Die H_2 -Norm läßt sich also zur Charakterisierung des Systemverhaltens nutzen, wenn die Eingangsgröße oder – im stochastischen Fall – ihre Spektraldichte festliegt. Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied zur H_∞ -Norm, die wir bekanntlich als „worst-case“ Verstärkung einer ganzen Klasse von Eingangssignalen deuten können.

Soll ein Reglerentwurf mittels H_2 -Minimierung durchgeführt werden, bestimmt man – wie im H_∞ -Fall – durch Definition eines verallgemeinerten

Streckenmodells P die regelungstechnische Zielsetzung. Die Aufgabe lautet dann, das Kostenfunktional

$$\|\mathcal{F}_L(P, K)\|_2$$

über alle stabilisierenden Regler-Übertragungsmatrizen $K(s)$ zu minimieren. Wie beim H_∞ -Problem setzt man voraus, daß P_{12} für alle ω vollen Spalten-, P_{21} vollen Zeilenrang besitzt. Zusätzlich fordert man, daß $P_{11}(\infty) = 0$ – ansonsten wäre i. a. die Übertragungsmatrix $\mathcal{F}_L(P, K)$ des geschlossenen Kreises nicht streng proper und ihre H_2 -Norm deshalb nicht endlich. Im Vergleich zu H_∞ -Problemen erweist sich die H_2 -Minimierungsaufgabe als um vieles leichter. Als mathematische Erklärung hierfür läßt sich anführen, daß \mathcal{RL}_2 einen Hilbert-Raum bildet, während \mathcal{RL}_∞ lediglich einen Banach-Raum darstellt. Das Minimum des H_2 -Problems ist eindeutig und läßt sich exakt bestimmen. Es stellt sich heraus (z.B. [15]), daß die zentrale Lösung des zugeordneten suboptimalen H_∞ -Problems $\|\mathcal{F}_L(P, K)\|_\infty < \gamma$ für $\gamma \rightarrow \infty$ gegen die optimale Lösung des H_2 -Problems konvergiert. Zur Bestimmung des optimalen K löst man also lediglich zwei Riccati-Gleichungen (in Sonderfällen gar nur eine). Mit diesem Ergebnis könnten wir uns eigentlich zufriedengeben. Wir wollen aber zusätzlich eine alternative Herleitung der optimalen Lösung des H_2 -Problems angeben, die eine „schöne“ Anwendung der Youla-Parametrierung darstellt:

11.2.3 Lösung des H_2 -Minimierungsproblems

Das verallgemeinerte Streckenmodell

$$P(s) \cong \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (11.6)$$

sei durch eine Rückführung der internen Ausgangs- auf die interne Eingangsvariable stabilisierbar (i.e. das Paar (A, B_2) ist stabilisierbar, (C_2, A) ist entdeckbar – vgl. Abschnitt 5.1.7). Dann gilt laut Satz 5.7: Der verallgemeinerte Regelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn der aus P_{22} und der negativen Regler-Übertragungsmatrix gebildete „konventionelle“ Regelkreis asymptotisch stabil ist. Um die Formeln der Youla-Parametrierung direkt anwenden zu können, betrachten wir eine Rückführung mit negativem Vorzeichen ($K = -\tilde{K}$ – vgl. Bild 11.9). Weiterhin setzen wir – wie bereits erwähnt – voraus, daß $P_{12}(s)$ für alle $s = j\omega$ vollen Spalten-, $P_{21}(s)$ für alle $s = j\omega$ vollen Zeilenrang besitzt.

Mit Hilfe der Youla-Parametrierung können wir alle stabilisierenden Regler \tilde{K} als „Lower linear fractional transformation“ des Youla-Parameters $\hat{Q}(s) \in$

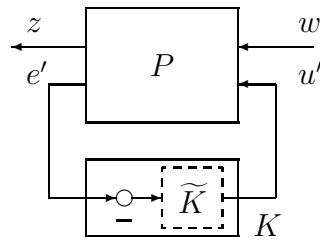


Bild 11.9: Verallgemeinerter Regelkreis.

$\mathcal{RH}_\infty^{q \times p}$ bezüglich einer Matrix $L(s)$ darstellen (vgl. Abschnitt 5.1.6, s. Bild 11.10):

$$\tilde{K} = \mathcal{F}_L(L, \hat{Q}).$$

Aus (5.24) lesen wir ab, daß $L(s)$ folgende Zustandsdarstellung besitzt:

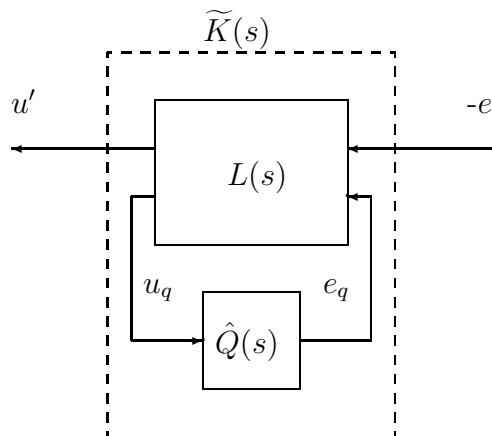


Bild 11.10: Alle stabilisierenden Regler.

$$L(s) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2F + HC_2 + HD_{22}F & H & HD_{22} + B_2 & \\ \hline F & 0 & I_q & \\ C_2 + D_{22}F & I_p & D_{22} & \end{array} \right],$$

wobei H und F beliebige reelle Matrizen (passender Dimension) sind, die garantieren, daß alle Eigenwerte der Matrizen $A + HC_2$ und $A + B_2F$ links der imaginären Achse liegen. Fassen wir die in Bild 11.9 und 11.10 gezeigten Signalflußdiagramme zusammen, so erhalten wir den verallgemeinerten

Regelkreis als „Lower linear fractional transformation“ des Youla-Parameters bezüglich eines Übertragungssystems $Z(s)$ (vgl. Bild 11.11):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_L(P, K) &= \mathcal{F}_L(P, -\tilde{K}) \\ &= \mathcal{F}_L(P, -\mathcal{F}_L(L, \hat{Q})) \\ &= \mathcal{F}_L(Z, \hat{Q}).\end{aligned}$$

Setzt man die Zustandsdarstellungen von $P(s)$ und $L(s)$ ineinander ein (und

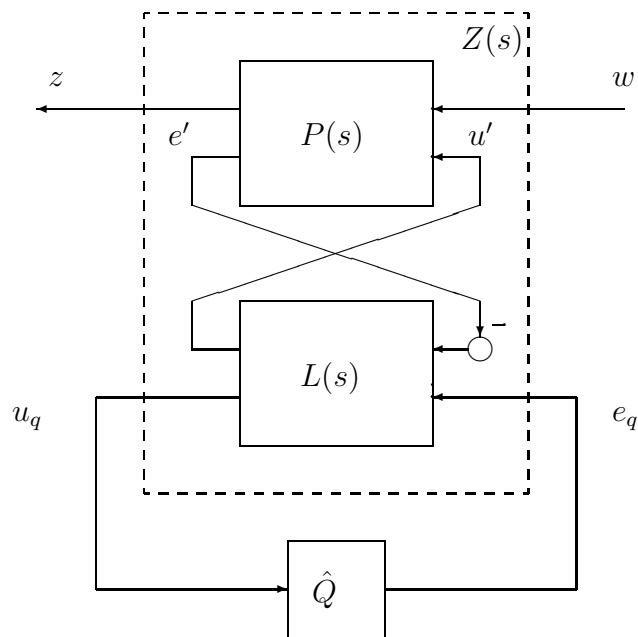


Bild 11.11: Verallgemeinerter Regelkreis in Abhängigkeit von \hat{Q} .

eliminiert damit die Größen e' und u'), so erhält man eine Realisierung für $Z(s)$:

$$Z(s) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_2 F & B_1 & B_2 \\ -H C_2 & A + B_2 F + H C_2 & -H D_{21} & B_2 \\ \hline C_1 & D_{12} F & 0 & D_{12} \\ -C_2 & C_2 & -D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

Nach Einführen der Ähnlichkeitstransformation

$$T := \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

ergibt sich:

$$Z(s) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A + HC_2 & 0 & B_1 + HD_{21} & 0 \\ -HC_2 & A + B_2F & -HD_{21} & B_2 \\ \hline C_1 & C_1 + D_{12}F & 0 & D_{12} \\ -C_2 & 0 & -D_{21} & 0 \end{array} \right]. \quad (11.7)$$

Wie man leicht nachprüft, wird $Z_{22}(s) = 0$; das Übertragungsverhalten des verallgemeinerten Regelkreises hängt somit affin vom Youla-Parameter \hat{Q} ab:

$$\mathcal{F}_L(P, K) = \mathcal{F}_L(Z, \hat{Q}) = Z_{11} + Z_{12}\hat{Q}Z_{21}.$$

Zustandsdarstellungen für Z_{11} , Z_{12} und Z_{21} entnimmt man (11.7): Nach Elimination nicht beobachtbarer bzw. nicht steuerbarer Zustände erhält man:

$$\begin{aligned} Z_{11} &\cong \left[\begin{array}{cc|cc} A + HC_2 & 0 & B_1 + HD_{21} & \\ -HC_2 & A + B_2F & -HD_{21} & \\ \hline C_1 & C_1 + D_{12}F & 0 & \end{array} \right], \\ Z_{12} &\cong \left[\begin{array}{c|c} A + B_2F & B_2 \\ \hline C_1 + D_{12}F & D_{12} \end{array} \right], \\ Z_{21} &\cong \left[\begin{array}{c|c} A + HC_2 & B_1 + HD_{21} \\ \hline -C_2 & -D_{21} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Bis auf die Restriktion, daß sämtliche Eigenwerte von $A + HC_2$ und $A + B_2F$ links der imaginären Achse liegen müssen, sind die Matrizen H und F noch frei wählbar. Wir setzen sie (und zwei reelle nichtsinguläre Matrizen Θ und Γ) nun so fest, daß $\tilde{Z}_{12}(s) := Z_{12}(s)\Theta^{-1}$ verlustfrei, $\tilde{Z}_{21}(s) := \Gamma^{-1}Z_{21}(s)$ koverlustfrei wird. Durch Anwenden von Satz 3.5 und 3.6 erkennt man, daß dieser Fall genau dann eintritt, wenn gilt:

$$\Gamma = \sqrt{D_{21}D_{21}^T}, \quad (11.8)$$

$$H = -(B_1D_{21}^T + XC_2^T)\Gamma^{-2}, \quad (11.9)$$

$$\Theta = \sqrt{D_{12}^TD_{12}}, \quad (11.10)$$

$$F = -\Theta^{-2}(D_{12}^TC_1 + B_2^TY); \quad (11.11)$$

X und Y sind diejenigen symmetrischen und positiv-semidefiniten Lösungen der algebraischen Riccati-Gleichungen

$$\begin{aligned} (A - B_1D_{21}^T\Gamma^{-2}C_2)X + X(A - B_1D_{21}^T\Gamma^{-2}C_2)^T - XC_2^T\Gamma^{-2}C_2X + \\ + (B_1 - B_1D_{21}^T\Gamma^{-2}D_{21})(B_1 - B_1D_{21}^T\Gamma^{-2}D_{21})^T = 0, \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} (A - B_2\Theta^{-2}D_{12}^TC_1)^TY + Y(A - B_2\Theta^{-2}D_{12}^TC_1) - YB_2\Theta^{-2}B_2^TY + \\ + (C_1 - D_{12}\Theta^{-2}D_{12}^TC_1)^T(C_1 - D_{12}\Theta^{-2}D_{12}^TC_1) = 0, \end{aligned} \quad (11.13)$$

die garantieren, daß alle Eigenwerte von $A + HC_2$ und $A + B_2F$ negativen Realteil besitzen.

Anmerkung: Im allgemeinen existieren mehrere symmetrische positiv-semidefinite Lösungen für (11.12) und (11.13). Nur jeweils eine besitzt aber die geforderte Stabilisierungseigenschaft (z.B. [55]; s. auch Anhang C.1).

Welchen Nutzen ziehen wir nun aus dieser speziellen Festlegung der Übertragungsmatrizen \tilde{Z}_{12} und \tilde{Z}_{21} ? Zur Beantwortung dieser Frage beachte man, daß

$$U_{12}(s) := \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{12}^T(-s) \\ I_l - \tilde{Z}_{12}(s)\tilde{Z}_{12}^T(-s) \end{bmatrix}$$

unitär,

$$U_{21}(s) := \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{21}^T(-s) & I_m - \tilde{Z}_{21}^T(-s)\tilde{Z}_{21}(s) \end{bmatrix}$$

ko-unitär ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} U_{12}\tilde{Z}_{12} &= \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{Z}_{21}U_{21} &= \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation von links (rechts) mittels einer unitären (ko-unitären) Übertragungsmatrix werden die Singulärwerte und damit die L_2 -Norm eines Übertragungssystems nicht verändert:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}_L(P(s), K(s))\|_2 \\ &= \|Z_{11}(s) + \tilde{Z}_{12}(s) \underbrace{\Theta\hat{Q}(s)\Gamma}_{:=\tilde{Q}(s)} \tilde{Z}_{21}(s)\|_2 \\ &= \left\| \underbrace{U_{12}(s)Z_{11}(s)U_{21}(s)}_{:=V(s)} + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{Q}(s) \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \right\|_2. \end{aligned} \quad (11.14)$$

$V(s)$ besitzt keinen Pol auf der imaginären Achse; wegen $D_{11} = 0$ verschwindet außerdem die zugehörige Durchgriffsmatrix. Es gilt also $V(s) \in \mathcal{RL}_2^{(q+l) \times (p+m)}$. (11.14) nimmt genau dann einen endlichen Wert an, wenn auch die Durchgriffsmatrix des (asymptotisch stabilen) Übertragungssystems $\tilde{Q}(s)$ verschwindet, wenn also $\tilde{Q}(s) \in \mathcal{RH}_2^{q \times p}$. Da \mathcal{RL}_2 einen Hilbert-Raum bildet, findet man das

(11.14) minimierende $\tilde{Q}(s)$ durch orthogonale Projektion des $(1, 1)$ -Blocks von $V(s)$ auf den Unterraum \mathcal{RH}_2 – man sucht also ein $\tilde{Q}(s) \in \mathcal{RH}_2^{q \times p}$, so daß $V_{11} - \tilde{Q}(s)$ die kleinstmögliche L_2 -Norm besitzt. Durch Anwenden der entsprechenden „Rechenregeln“ für Manipulationen von Zustandsdarstellungen stellt man fest, daß bei der Bildung von $V_{11}(s) = \tilde{Z}_{12}^T(-s)Z_{11}(s)\tilde{Z}_{21}^T(-s)$ sämtliche stabilen Übertragungspole gekürzt werden – die Projektion von V_{11} auf den Unterraum aller asymptotisch stabilen Übertragungsmatrizen ergibt deshalb die Nullmatrix:

$$\tilde{Q}(s)_{opt} = 0.$$

Hieraus folgt natürlich:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(s)_{opt} &= \Theta^{-1}\tilde{Q}(s)_{opt}\Gamma^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Als optimalen Regler (im Sinne des zu minimierenden H_2 -Kriteriums) findet man also:

$$\begin{aligned} K(s) &= -\mathcal{F}_L(L(s), 0) \\ &= -L_{11}(s) \\ &\cong \left[\begin{array}{c|c} A + B_2F + HC_2 + HD_{22}F & -H \\ \hline F & 0 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Abschließend fassen wir den gerade bewiesenen Sachverhalt zusammen:

Satz 11.2 (Lösung des H_2 -Minimierungsproblems)_____

Das verallgemeinerte Streckenmodell (11.6) sei stabilisierbar, $P_{12}(s)$ besitze für alle $s = j\omega$ vollen Spalten-, $P_{21}(s)$ für alle $s = j\omega$ vollen Zeilenrang. Die H_2 -Norm des verallgemeinerten Regelkreises wird durch die Regler-Übertragungsmatrix

$$K(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A + B_2F + HC_2 + HD_{22}F & -H \\ \hline F & 0 \end{array} \right]$$

minimiert. Die Matrizen F und H berechnet man über die Gleichungen (11.8) - (11.13). _____

11.2.4 Ein Spezialfall: LQG-Regelung

Die bekannte (Zeitbereichs-) LQG-Regelungstheorie stellt einen Sonderfall des H_2 -Ansatzes dar: LQG (linear quadratisch Gaußsche) Probleme bestehen –

wie man unschwer der Bezeichnung entnehmen kann – aus einem *linearen* (zeitinvarianten) Streckenmodell mit voneinander unabhängigen mittelwertfreien weißen *Gaußschen* Rauschprozessen d , η mit Spektraldichten W_d bzw. W_η ,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_d d + B_2 u \\ y &= C_y x + \eta,\end{aligned}$$

sowie einem *quadratischen* Gütekriterium

$$J_{LQG} := E \left[x^T(t) R_x x(t) + u^T(t) R_u u(t) \right],$$

das über alle stabilisierenden Regler minimiert werden soll. (Die reellen Gewichtungsmatrizen R_x und R_u sind symmetrisch; R_x ist positiv-semidefinit, R_u positiv-definit; E steht für „Erwartungswert“.) Definieren wir nun ein verallgemeinertes Streckenmodell

$$P(s) \cong \left[\begin{array}{c|cc} A & \begin{bmatrix} B_d \sqrt{W_d} & 0 \end{bmatrix} & B_2 \\ \hline \begin{bmatrix} \sqrt{R_x} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{R_u} \end{bmatrix} \\ \hline -C_y & \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{W_\eta} \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right], \quad (11.16)$$

so erhalten wir als externe Ein- und Ausgangsvariable

$$\begin{aligned}w &= \begin{bmatrix} \sqrt{W_d}^{-1} d \\ \sqrt{W_\eta}^{-1} \eta \end{bmatrix}, \\ z &= \begin{bmatrix} \sqrt{R_x} x \\ \sqrt{R_u} u \end{bmatrix},\end{aligned}$$

sowie als Reglerein- und -ausgangssignal ($-y$) und u . Da w nun mittelwertfreies weißes Rauschen mit Spektraldichte I_m darstellt, kann man das LQG-Gütekriterium als Quadrat der H_2 -Norm der Übertragungsmatrix des geschlossenen Regelkreises schreiben:

$$\begin{aligned}J_{LQG} &= E[z^T(t)z(t)] \\ &= (\|\mathcal{F}_L(P, K)\|_2)^2.\end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch die Matrizen des verallgemeinerten Streckenmodells (11.16) in die allgemeine Lösung (11.8) - (11.13) und (11.15) einsetzen,

um die bekannte Lösung des LQG-Problems ablesen zu können: Die optimale Rückführung von $(-y)$ auf u besitzt Zustandsdarstellung

$$K(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + B_2F - HC_y}{F} & -H \\ \hline & 0 \end{array} \right],$$

$$H = XC_y^T W_\eta^{-1},$$

$$F = -R_u^{-1} B_2^T Y;$$

die Matrizen X und Y sind hierbei diejenigen symmetrischen positiv-semidefiniten Lösungen der algebraischen Riccati-Gleichungen

$$AX + XA^T - XC_y^T W_\eta^{-1} C_y X + B_d W_d B_d^T = 0,$$

$$A^T Y + Y A - Y B_2 R_u^{-1} B_2^T Y + R_x = 0,$$

die dafür sorgen, daß alle Eigenwerte der Matrizen $A - HC_y$ und $A + B_2 F$ links der imaginären Achse liegen.

Anmerkung: Setzt man weiterhin voraus, daß das Paar $(\sqrt{R_x}, A)$ entdeckbar und $(A, B_d \sqrt{W_d})$ stabilisierbar ist, so existiert für jede der beiden Riccati-Gleichungen *genau eine* symmetrische positiv-semidefinite Lösung; die geforderte Stabilisierungseigenschaft ist jeweils gewährleistet (z.B. [55]).

Anmerkung: Das so berechnete H ist gerade die Verstärkungsmatrix eines Kalman-Filters, F die optimale Zustands-Rückführungsmatrix im Falle eines exakt und vollständig meßbaren x . Das LQG-Problem zerfällt demnach in zwei voneinander unabhängig zu lösende Teilprobleme – den Entwurf eines Kalman-Filters und die Auslegung einer optimalen Zustandsrückführung. Man spricht in diesem Zusammenhang vom *Separationsprinzip*.

Anmerkung: Erwähnt sei noch ein Ansatz, wie man LQG- und damit H_2 -Methoden verwenden kann, um auf indirekte Weise ein robustes Regelgesetz zu finden. Dieses als LTR (Loop Transfer Recovery) bekannte Verfahren basiert auf der Erkenntnis, daß ein LQG-Entwurf mit *Zustandsrückführung* gute Robustheitseigenschaften besitzt. Da i.a. aber nicht alle Zustandsvariablen gemessen werden können, muß man einen Kalman-Filter zur Rekonstruktion von Zuständen einsetzen. Die Filterparameter (die Matrizen W_d und W_η) betrachtet man nun als *Entwurfs-Freiheitsgrade* und wählt sie so, daß sich die Singulärwerte einer dem offenen

Kreis zugeordneten Übertragungsmatrix ähnlich verhalten wie bei vollständiger Zustandsrückführung. Wir werden auf diesen Ansatz nicht näher eingehen, da uns mit dem NLKF-Verfahren eine „open loop shaping“ Methode mit vergleichbarer Intention, aber überlegenen Eigenschaften zur Verfügung steht.

11.2.5 Wertung

Der Reglerentwurf durch Minimierung der Norm $\|\mathcal{F}_L(P, K)\|_2$ ist in erster Linie dann angebracht, wenn die auf den Regelkreis wirkenden Signale bekannt sind oder – im stochastischen Fall – bekannte Spektraldichte besitzen. Durch Beschränken der H_2 -Norm per se läßt sich Robustheit allerdings nicht erreichen. Der Einsatzbereich einer reinen H_2 -Minimierung muß deswegen als beschränkt betrachtet werden. Ein möglicher Ausweg ist die Untersuchung gemischter H_2/H_∞ -Probleme, bei denen angestrebt wird, die H_2 -Norm einer Übertragungsmatrix unter der Nebenbedingung zu minimieren, daß die H_∞ -Norm einer anderen Übertragungsmatrix einen vorgegebenen Wert nicht übersteigt.

11.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zwei Verfahren behandelt, die – was Aufwand und Leistungsfähigkeit angeht – die in den vorangehenden Abschnitten besprochenen H_∞ -Methoden umklammern. Mittels μ -Synthese können allgemeinere Aufgabenstellungen behandelt werden; hierfür bezahlt man allerdings mit drastisch erhöhtem numerischem Aufwand. H_2 -Minimierung ist zwar rechnerisch einfacher als H_∞ -Minimierung, ihre Anwendbarkeit muß aber wegen mangelnder Robustheitsgarantien in vielen Bereichen als fragwürdig angesehen werden.

11.4 Literaturhinweise

μ -Synthese geht wie μ -Analyse in erster Linie auf Arbeiten von *Doyle* zurück [18]. Eine ausführliche Darstellung findet sich im Handbuch der „ μ -Analysis and Synthesis Toolbox“ [72]. Weitere Informationen enthält auch der Aufsatz [86] von *Packard* und *Doyle*. Die $\mu - K$ -Iteration wurde von *Lin et al.* eingeführt [59].

LQG-Theorie wird in den meisten Standardwerken der Regelungstechnik beschrieben. Hier seien nur die Bücher von *Kwakernaak* und *Sivan* [57] und *Anderson* und *Moore* [2] erwähnt. *Doyle* [16] wies auf die fehlende Robustheit bei LQG-Verfahren hin. Loop Transfer Recovery (LTR) als möglicher Ausweg wurde von *Doyle* und *Stein* [20][21] vorgeschlagen. Gemischte H_2/H_∞ -Probleme werden z.B. von *Khargonekar* und *Rotea* [51] behandelt.

Anhang A

Matrizen und Determinanten

In diesem Abschnitt sollen einige nützliche Formeln für Matrizen und ihre Determinanten zusammengestellt werden. Mehr Information findet man in jedem Buch über Matrizenrechnung (z.B. [37]).

A.1 Rang einer Matrix

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen und Spalten einer Matrix stimmt überein. Diese Zahl wird als *Rang* der Matrix bezeichnet. Besitzt eine $p \times q$ -Matrix Rang p (Rang q) – bilden die Zeilen (Spalten) also ein linear unabhängiges System – so sagt man, die Matrix habe *vollen Zeilenrang* (*vollen Spaltenrang*); dies ist natürlich nur im Falle $p \leq q$ ($p \geq q$) möglich.

Eine $p \times p$ -Matrix mit Rang p heißt *nichtsingulär*, *invertierbar* oder *regulär*.

Für das Produkt zweier ($p \times n$ - bzw. $n \times q$ -) Matrizen A und B gilt:

$$\text{Rang}\{A\} + \text{Rang}\{B\} - n \leq \text{Rang}\{AB\} \leq \min\{\text{Rang}\{A\}, \text{Rang}\{B\}\}.$$

Diese Beziehung wird als *Sylvester-Ungleichung* bezeichnet. Hieraus folgt unmittelbar, daß der Rang einer Matrix durch Multiplikation mit einer nichtsingulären Matrix nicht verändert wird.

A.2 Formeln für Determinanten

A und B seien zwei $p \times p$ -Matrizen, c ein Skalar. $\lambda_i[A]$, $i = 1, \dots, p$, bezeichne die Eigenwerte der Matrix A . Dann gilt:

$$\det\{A\} = \det\{A^*\}$$

$$\begin{aligned}\det \{A\} &= \prod_{i=1}^p \lambda_i[A] \\ \det \{cA\} &= c^p \det \{A\} \\ \det \{AB\} &= \det \{A\} \det \{B\}.\end{aligned}$$

A sei eine nichtsinguläre quadratische Matrix. Dann gilt:

$$\det \{A^{-1}\} = \frac{1}{\det \{A\}}.$$

A und D seien zwei quadratische Matrizen mit möglicherweise verschiedener Dimension. Die Matrizen B und C besitzen „passende Dimension“. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} &= \det \{A\} \det \{D\} \\ \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} &= \det \{A\} \det \{D\} \\ \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det \{A\} \det \{D - CA^{-1}B\}, \quad \text{falls } A \text{ nichtsingulär ist,} \\ \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det \{D\} \det \{A - BD^{-1}C\}, \quad \text{falls } D \text{ nichtsingulär ist.}\end{aligned}$$

Die beiden letztgenannten Beziehungen werden oft als *Schur-Formeln* bezeichnet.

A sei eine $p \times q$ -, B eine $q \times p$ -Matrix. Dann gilt

$$\det (I_p + AB) = \det (I_q + BA).$$

A.3 Formeln für Inverse

A sei eine $p \times q$ -, B eine $q \times p$ -Matrix. Dann gilt:

$$(I_p + AB)^{-1}A = A(I_q + BA)^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

A und D seien zwei nichtsinguläre quadratische Matrizen mit möglicherweise verschiedener Dimension. Die Matrizen B und C besitzen „passende Dimension“. Dann gilt:

$$(D + CAB)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}C(BD^{-1}C + A^{-1})^{-1}BD^{-1}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sind die Matrizen A , D und $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ nichtsingulär, so trifft dies auch auf

$$S := D - CA^{-1}B$$

und

$$R := A - BD^{-1}C$$

zu. Man kann dann schreiben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CR^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Läßt man auch singuläre D zu, kann (A.2) folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

S wird als *Schur-Komplement* bezeichnet.

A.4 Spur

Die Spur einer $p \times p$ -Matrix A ist als die Summe ihrer Diagonalelemente definiert. Sie kann auch als Summe ihrer Eigenwerte dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \text{Spur}[A] &:= \sum_{i=1}^p a_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i[A]. \end{aligned}$$

Für zwei $p \times q$ - bzw. $q \times p$ -Matrizen A und B gilt:

$$\text{Spur}[AB] = \text{Spur}[BA].$$

Anhang B

Rechenregeln für Systeme in Zustandsdarstellung

An dieser Stelle werden die wichtigsten Rechenregeln für Zustandsdarstellungen

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (\text{B.1})$$

zusammengefaßt. Beweise, Erläuterungen und Literaturhinweise findet man in den Kapiteln, in denen diese „Regeln“ eingeführt wurden.

B.1 Grundoperationen

Transponieren:

$$G^T(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right]$$

Konjugiert Transponieren:

$$G^T(-s) \cong \left[\begin{array}{c|c} -A^T & C^T \\ \hline -B^T & D^T \end{array} \right]$$

Negieren:

$$-G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -C & -D \end{array} \right]$$

Invertieren: $G(s)$ sei eine $p \times q$ -Übertragungsmatrix mit $p \leq q$ ($p \geq q$), die Durchgriffsmatrix D besitze vollen Zeilen- (Spalten-)Rang. Die Rechts- (Links-)Inverse von $G(s)$ kann dann mit Hilfe der Rechts- (Links-)Inversen D^\dagger von D dargestellt werden als:

$$G^\dagger(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A - BD^\dagger C & -BD^\dagger \\ \hline D^\dagger C & D^\dagger \end{array} \right].$$

Addition:

$$G_1(s) + G_2(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

Multiplikation:

$$G_1(s)G_2(s) \cong \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array} \right]$$

„Stapeln“:

$$\begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix} \cong \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \end{array} \right]$$

„Aneinanderreihen“

$$(G_1(s) \ G_2(s)) \cong \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 & D_2 \end{array} \right]$$

B.2 Koprime Faktorisierungen

(B.1) sei eine Minimalrealisierung der $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$; F und H seien reelle Matrizen, so daß sämtliche Eigenwerte von $A + BF$ und $A + HC$ links der imaginären Achse liegen. Ξ und $\tilde{\Xi}$ sind schließlich beliebige nichtsinguläre reelle Matrizen „passender“ Dimension ($q \times q$ bzw. $p \times p$). Eine Zustandsdarstellung für die Matrizen einer doppelt koprime Faktorisierung

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \\ \tilde{M}(s) & -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & \tilde{Y}(s) \\ M(s) & -\tilde{X}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

lautet dann:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ \widetilde{M} & -\widetilde{N} \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & -H & B + HD \\ \hline -\widetilde{\Xi}^{-1}F & 0 & \widetilde{\Xi}^{-1} \\ \hline -\widetilde{\Xi}C & \widetilde{\Xi} & -\widetilde{\Xi}D \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} N & \widetilde{Y} \\ M & -\widetilde{X} \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + BF & B\Xi & -H\widetilde{\Xi}^{-1} \\ \hline C + DF & D\Xi & \widetilde{\Xi}^{-1} \\ \hline F & \Xi & 0 \end{array} \right].$$

Für Zähler- und Nennermatrizen rechts- bzw. linkskopriemer Faktorisierungen kann man hieraus ablesen:

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ M(s) \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B\Xi \\ \hline C + DF & D\Xi \\ \hline F & \Xi \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{N}(s) & \widetilde{M}(s) \end{bmatrix} \cong \left[\begin{array}{c|cc} A + HC & B + HD & H \\ \hline \widetilde{\Xi}C & \widetilde{\Xi}D & \widetilde{\Xi} \end{array} \right]. \quad (\text{B.2})$$

B.3 Normalisierte linkskoprieme Faktorisierung einer Übertragungsmatrix

Die linkskoprieme Faktorisierung (B.2) genügt zusätzlich der „Normalisierungsbedingung“

$$\widetilde{N}(s)\widetilde{N}^T(-s) + \widetilde{M}(s)\widetilde{M}^T(-s) = I_p,$$

wenn die „freien Parameter“ $\widetilde{\Xi}$ und H folgendermaßen gewählt werden:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Xi} &= R^{\frac{1}{2}} \\ R &:= (I_p + DD^T)^{-1}, \\ H &= -(BD^T + ZC^T)R. \end{aligned}$$

Z ist die eindeutige positiv-definite Lösung folgender *algebraischer Riccati-Gleichung*:

$$(A - BSD^TC)Z + Z(A - BSD^TC)^T - ZC^TRCZ + BSB^T = 0,$$

$$S := (I_q + D^TD)^{-1}.$$

B.4 Unitäre, verlustfreie und J_γ -verlustfreie Übertragungsmatrizen

(B.1) sei eine (nicht notwendigerweise minimale) Realisierung der $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$. $G(s)$ ist genau dann unitär, wenn

$$D^T D = I_q$$

und eine reelle symmetrische Matrix Y existiert, so daß

$$\begin{aligned} A^T Y + Y A + C^T C &= 0 \\ D^T C + B^T Y &= 0. \end{aligned}$$

Sie ist ko-unitär, wenn

$$D D^T = I_p$$

und eine reelle symmetrische Matrix X existiert, so daß

$$\begin{aligned} A X + X A^T + B B^T &= 0 \\ D B^T + C X &= 0. \end{aligned}$$

Eine (ko-)unitäre Übertragungsmatrix ist (ko-)verlustfrei, wenn sie asymptotisch stabil ist. Dies ist natürlich gesichert, wenn sämtliche Eigenwerte der Dynamikmatrix A links der imaginären Achse liegen.

Die $(l+p) \times (m+p)$ -Übertragungsmatrix $G(s)$ ist genau dann J_γ -verlustfrei, wenn

$$D^T J_{\gamma lp} D = J_{\gamma mp}$$

und eine positiv-semidefinite reelle symmetrische Matrix Y existiert, so daß

$$\begin{aligned} A^T Y + Y A + C^T J_{\gamma lp} C &= 0 \\ D^T J_{\gamma lp} C + B^T Y &= 0. \end{aligned}$$

B.5 Verlustfreie und J_γ -verlustfreie Zerlegung

(B.1) sei eine asymptotisch stabile Zustandsdarstellung der $p \times q$ -Übertragungsmatrix $G(s)$. G besitze für alle $s = j\omega$ vollen Spaltenrang q . Eine Zustandsdarstellung für den verlustfreien und den minimalphasigen Anteil $G_v(s)$ und $G_m(s)$ der verlustfreien (oder Spektral-) Zerlegung

$$G = G_v G_m$$

findet man dann folgendermaßen:

$$G_m(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_m & D_m \end{array} \right]$$

$$G_v(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A - BD_m^{-1}C_m & -BD_m^{-1} \\ \hline -C + DD_m^{-1}C_m & DD_m^{-1} \end{array} \right],$$

wobei:

$$D_m = (D^T D)^{\frac{1}{2}}$$

$$C_m = D_m^{-1}(D^T C + B^T X);$$

X ist die symmetrische positiv-semidefinite Lösung der Riccati-Gleichung

$$(A - BD_m^{-2}D^T C)^T X + X(A - BD_m^{-2}D^T C) -$$

$$-XBD_m^{-2}B^T X + (C - DD_m^{-2}D^T C)^T (C - DD_m^{-2}D^T C) = 0,$$

die garantiert, daß alle Eigenwerte der Matrix

$$A - BD_m^{-2}(D^T C + B^T X) = A - BD_m^{-1}C_m$$

links der imaginären Achse liegen.

(B.1) sei eine asymptotisch stabile Zustandsdarstellung der $(l+p) \times (q+p)$ -Übertragungsmatrix G ($l \geq q$). Eine J_γ -verlustfreie Zerlegung von G existiert genau dann, wenn

1. eine reelle nichtsinguläre $(q+p) \times (q+p)$ -Matrix D_W existiert, so daß

$$D^T J_{\gamma lp} D = D_W^T J_{\gamma qp} D_W,$$

2. eine positiv-semidefinite Lösung Q der indefiniten Riccati-Gleichung

$$0 = Q(A - BR_\gamma D^T J_{\gamma lp} C) + (A - BR_\gamma D^T J_{\gamma lp} C)^T Q -$$

$$-QBR_\gamma B^T Q + C^T J_{\gamma lp} C - C^T J_{\gamma lp} DR_\gamma D^T J_{\gamma lp} C$$

$$R_\gamma := (D^T J_{\gamma lp} D)^{-1}$$

existiert, so daß alle Eigenwerte der Matrix $A - BR_\gamma(D^T J_{\gamma lp} C + B^T Q)$ links der imaginären Achse liegen.

Eine Zustandsdarstellung für den Anteil $W(s) \in \mathcal{UH}_\infty^{(q+p) \times (q+p)}$ der J_γ -verlustfreien Zerlegung

$$G = G_{\gamma v} W, \quad G_{\gamma v} \dots J_\gamma\text{-verlustfrei},$$

erhält man dann aus:

$$W \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_W & D_W \end{array} \right],$$

$$C_W := J_{\gamma qp}^{-1} (D_W^{-1})^T (D^T J_{\gamma lp} C + B^T Q).$$

Anhang C

Algebraische Riccati-Gleichungen

Viele der im vorliegenden Buch behandelten Verfahren basieren auf der Lösung algebraischer Riccati-Gleichungen. Beispiele sind normalisierte links- (und rechts-) kopprime Faktorisierung, verlustfreie und J_γ -verlustfreie Faktorisierung, die ihrerseits wiederum die Grundlage zur Lösung von H_2 - bzw. H_∞ -Regelungsproblemen darstellen. Im folgenden sollen Bedingungen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen solcher Riccati-Gleichungen zusammengefaßt werden. Wir bedienen uns hierbei im wesentlichen der Ausführungen in [55] und [26].

C.1 Der Standard-Fall

Als „Standard-Fall“ bezeichnen wir folgende Version der algebraischen Riccati-Gleichung:

$$Y\bar{A} + \bar{A}^T Y - Y\bar{B}\bar{B}^T Y + \bar{C}^T \bar{C} = 0. \quad (\text{C.1})$$

\bar{A} , \bar{B} und \bar{C} sind vorgegebene reelle $n \times n$ -, $n \times q$ - und $p \times n$ -Matrizen. Gesucht werden reelle symmetrische positiv-semidefinite Lösungen Y . Der Standard-Fall zeichnet sich durch (Positiv-) Semidefinitheit des Absolut-Terms – der Matrix $\bar{C}^T \bar{C}$ – aus.

Der Riccati-Gleichung (C.1) kann man eine *Hamilton-Matrix*

$$M := \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{B}^T \\ -\bar{C}^T \bar{C} & -\bar{A}^T \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

zuordnen. Die Eigenwerte dieser Matrix liegen symmetrisch zur imaginären Achse: Führt man nämlich eine Ähnlichkeitstransformation

$$T := \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

ein, so erhält man

$$T^{-1}MT = -M^T;$$

eine Ähnlichkeitstransformation verändert aber die Eigenwerte einer Matrix nicht; M und $-M^T$ besitzen also dieselben Eigenwerte. Deshalb existiert für jeden Eigenwert λ_i von M auch ein Eigenwert $-\lambda_i$ von M .

Man kann nun zeigen ([69]), daß gilt:

Lemma C.1

Ein Eigenwert von M liegt genau dann auf der imaginären Achse, wenn $(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B}$ eine Eingangs-Entkopplungsnulstelle oder $\bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}$ eine Ausgangs-Entkopplungsnulstelle mit verschwindendem Realteil besitzt – wenn also ein (über \bar{B}) nicht steuerbarer bzw. ein (über \bar{C}) nicht beobachtbarer Eigenwert von \bar{A} auf der imaginären Achse auftritt.

Hiermit läßt sich die im folgenden Satz genannte Voraussetzung überprüfen:

Satz C.1

Eine symmetrische positiv-semidefinite Lösung Y der Riccati-Gleichung (C.1), die negativen Realteil aller Eigenwerte der Matrix $\bar{A} - \bar{B}\bar{B}^TY$ gewährleistet, existiert genau dann, wenn (\bar{A}, \bar{B}) stabilisierbar ist und kein Eigenwert von M auf der imaginären Achse liegt. Falls eine solche Lösung Y existiert, ist sie eindeutig.

Beweis: s. [55].

Anmerkung: Unter den genannten Bedingungen können mehrere symmetrische positiv-semidefinite Lösungen existieren; nur eine allerdings bewirkt negativen Realteil für alle Eigenwerte der Matrix $\bar{A} - \bar{B}\bar{B}^TY$.

Satz C.2

Eine eindeutige symmetrische positiv-semidefinite Lösung Y der Riccati-Gleichung (C.1) existiert genau dann, wenn (\bar{A}, \bar{B}) stabilisierbar und (\bar{C}, \bar{A}) entdeckbar ist. Alle Eigenwerte der Matrix $\bar{A} - \bar{B}\bar{B}^TY$ liegen links der imaginären Achse.

Beweis: s. [114] bzw. [55].

Anmerkung: Unter etwas stärkeren Voraussetzungen – Steuerbarkeit des Paares (\bar{A}, \bar{B}) und Beobachtbarkeit von (\bar{C}, \bar{A}) – ist die Lösung Y positiv-definit ([49]).

Wie läßt sich nun die gesuchte Lösung berechnen? Wir nehmen an, die in Satz C.1 genannten (notwendigen und hinreichenden) Bedingungen liegen vor. Es existiert dann immer eine orthogonale Matrix T , so daß

$$T^{-1}MT = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_{11} & \widetilde{M}_{12} \\ 0 & \widetilde{M}_{22} \end{bmatrix}$$

und die Eigenwerte der reellen $n \times n$ -Matrix \widetilde{M}_{11} mit den n links der imaginären Achse liegenden Eigenwerten von M übereinstimmen. Demzufolge besitzen alle Eigenwerte der Matrix \widetilde{M}_{22} positiven Realteil – man erinnere sich, daß die Eigenwerte der Matrix M symmetrisch zur (laut Voraussetzung aber nicht auf der) imaginären Achse liegen. Eine geeignete Transformationsmatrix T erhält man z.B. aus der reellen Schur-Zerlegung (z.B. [37]). Man kann also schreiben

$$M \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix}}_{:=T_1} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} \widetilde{M}_{11}.$$

Die Spalten von T_1 spannen denselben n -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^{2n} auf, wie die den Eigenwerten mit negativem Realteil zugeordneten (verallgemeinerten) Eigenvektoren – den sogenannten *stabilen modalen Unterraum* der Matrix M . Man kann zeigen, daß (unter den genannten Voraussetzungen) T_{11} immer nichtsingulär ist. Die gesuchte Lösung erhält man dann aus ([91] [55])

$$Y = T_{21}T_{11}^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

C.1.1 Anwendungen

Nun ist es ein Leichtes, die an dieser Stelle zusammengefaßten Bedingungen auf die behandelten Ausprägungen der Riccati-Gleichung anzuwenden und damit zu einer Aussage bezüglich Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gelangen.

C.1.1.1 Normalisierte linkskopprime Faktorisierung

Wir betrachten Gleichung (2.71), deren Lösung wir zur Berechnung einer normalisierten linkskoprimen Faktorisierung benötigen: In der Schreibweise von (C.1) erhält man

$$\begin{aligned}\bar{A} &= (A - BSD^T C)^T, \\ \bar{B} &= C^T \sqrt{R}, \quad R = (I_p + DD^T)^{-1}, \\ \bar{C} &= \sqrt{S} B^T, \quad S = (I_q + D^T D)^{-1}.\end{aligned}$$

Da

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

als Minimalrealisierung angesetzt wurde, ist (A, B) steuerbar. Die Matrix $\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix}$ besitzt also für alle $s \in \mathbb{C}$ Rang n (PBH-Steuerbarkeitstest). Durch Transponieren und durch Multiplikation mit einer nichtsingulären Matrix ändert sich der Rang nicht – deshalb hat auch

$$\begin{aligned}\left(\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ \sqrt{S} & SD^T C \end{bmatrix} \right)^T &= \begin{bmatrix} B\sqrt{S} & sI_n - (A - BSD^T C) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \bar{C}^T & sI_n - \bar{A}^T \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ sI_n - \bar{A} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ Rang n . (\bar{C}, \bar{A}) ist also beobachtbar. Ganz analog folgert man aus Beobachtbarkeit von (C, A) Steuerbarkeit von (\bar{A}, \bar{B}) . Laut Satz C.2 und der daran anschließenden Bemerkung besitzt die fragliche Riccati-Gleichung (2.71) also eine eindeutige positiv-definite Lösung.

C.1.1.2 Spektralzerlegung

Nächster konkreter Anwendungsfall ist die Riccati-Gleichung in Satz 3.7 – sie müssen wir bei der Spektralzerlegung bzw. der Zerlegung eines asymptotisch stabilen Übertragungssystems in ein minimalphasiges und ein verlustfreies System lösen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A - BD_m^{-2} D^T C, \quad D_m = \sqrt{D^T D}, \\ \bar{B} &= BD_m^{-1}, \\ \bar{C} &= (I_p - DD_m^{-2} D^T) C.\end{aligned}$$

Da wir von einer asymptotisch stabilen Zustandsdarstellung

$$G(s) \cong \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (\text{C.4})$$

ausgehen, ist (A, B) natürlich stabilisierbar, d.h. die Matrix $\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix}$ besitzt für alle $s \in \overline{\mathbb{C}}^+$ Rang n . Multiplikation mittels einer nichtsingulären Matrix läßt den Rang unverändert; die Matrix

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ D_m^{-2} D^T C & D_m^{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} sI_n - (A - BD_m^{-2} D^T C) & BD_m^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

hat also ebenfalls für alle $s \in \overline{\mathbb{C}}^+$ Rang n : (\bar{A}, \bar{B}) ist stabilisierbar.

Da $G(s)$ voraussetzungsgemäß für alle $s = j\omega$ vollen Spaltenrang aufweist, können keine Übertragungsnullstellen auf der imaginären Achse auftreten. Rein imaginäre Entkopplungsnullstellen sind wegen asymptotischer Stabilität der Zustandsdarstellung (C.4) ebenfalls ausgeschlossen. Somit existiert auch keine System- oder invariante Nullstelle von (C.4) mit verschwindendem Realteil. Hieraus folgt – wie wir gleich zeigen werden –, daß keine Ausgangs-Entkopplungsnullstelle von $\bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}$ auf der imaginären Achse liegen kann: Man betrachte die Beziehung

$$\begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} \\ -\bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ D_m^{-2} D^T C \end{bmatrix}.$$

Laut Sylvester-Ungleichung (s. Anhang A) gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} \\ -\bar{C} \end{bmatrix} &\geq \underbrace{\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}}_{P_{PR}(s)} + \text{Rang} \begin{bmatrix} I_n \\ D_m^{-2} D^T C \end{bmatrix} - (n + q) \\ &= \text{Rang} \{P_{PR}(s)\} - q. \end{aligned}$$

Da $s = j\omega$ aber keine invariante Nullstelle von (C.4) sein kann, besitzt die Rosenbrock-System-Matrix $P_{PR}(s)$ für alle $s = j\omega$ vollen Spaltenrang $n + q$. Damit ist gezeigt, daß

$$\begin{aligned} \text{Rang} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ sI_n - \bar{A} \end{bmatrix} &= \text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - \bar{A} \\ -\bar{C} \end{bmatrix} \\ &= n \quad \text{für alle } s = j\omega, \end{aligned}$$

$\bar{C}(sI_n - \bar{A})^{-1}$ also keine Ausgangs-Entkopplungsnullstelle mit verschwindendem Realteil besitzt. Da (\bar{A}, \bar{B}) stabilisierbar ist, kann kein $s = j\omega$ Eingangsentkopplungsnullstelle von $(sI_n - \bar{A})^{-1}\bar{B}$ und – wegen Lemma C.1 – Eigenwert der Hamilton-Matrix sein.

Nun läßt sich Satz C.1 anwenden; wir schließen, daß die untersuchte Riccati-Gleichung genau eine symmetrische positiv-semidefinite Lösung aufweist, die den negativen Realteil aller Eigenwerte der Matrix (3.35) bewirkt.

C.2 Der indefinite Fall

Nun betrachten wir folgende allgemeinere Version der algebraischen Riccati-Gleichung:

$$Y\bar{A} + \bar{A}^T Y - Y\bar{B}\bar{B}^T Y + \bar{Q} = 0. \quad (\text{C.5})$$

\bar{A} , \bar{B} und \bar{Q} sind vorgegebene reelle Matrizen passender Dimension. Gesucht sind reelle symmetrische Lösungen Y . Anders als im Standard-Fall wird Semi-Definitheit des Absolut-Terms – der Matrix \bar{Q} – *nicht* vorausgesetzt.

Der Riccati-Gleichung (C.5) wird wiederum eine Hamilton-Matrix

$$M := \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}\bar{B}^T \\ -\bar{Q} & -\bar{A}^T \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

zugeordnet. Auf dieselbe Art und Weise wie im Standard-Fall zeigt man, daß die Eigenwerte dieser Matrix symmetrisch zur reellen Achse liegen. Besitzt kein Eigenwert verschwindenden Realteil, so definiert man – ebenfalls wie im Standard-Fall – eine Matrix

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix},$$

so daß die Spalten von $\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix}$ den stabilen modalen Unterraum von M aufspannen. Dann gilt:

Satz C.3

Kein Eigenwert der Matrix M liege auf der imaginären Achse. Das Paar (\bar{A}, \bar{B}) sei stabilisierbar. Dann ist T_{11} nichtsingulär, $Y = T_{21}T_{11}^{-1}$ eine symmetrische Lösung der Riccati-Gleichung (C.5), und alle Eigenwerte der Matrix $\bar{A} - \bar{B}\bar{B}^T Y$ besitzen negativen Realteil.

Beweis: s. [26].

Literaturverzeichnis

- [1] *Allgöwer, F. und Raisch, J.*: Multivariable controller design for an industrial distillation column. Proc. 5th IMA International Conference on Control Theory, 1988, veröffentlicht als: The Mathematics of Control Theory (Hrsg.: N. K. Nichols, D. H. Owens), Oxford University Press, Oxford 1992, S. 381–406.
- [2] *Anderson, B. D. O. und Moore, J. B.*: Linear Optimal Control. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.
- [3] *Araki, M. und Nwokah, O. I.*: Bounds for closed-loop transfer functions of multivariable systems. IEEE Transactions on Automatic Control 20 (1975), S. 666–670.
- [4] *Berman, A. und Plemmons, R. J.*: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press, New York, 1979.
- [5] *Bode, H. W.*: Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, New York, 1945.
- [6] *Boksenbom, A. S. und Hood, R.*: General Algebraic Method Applied to Control Analysis of Complex Engine Types. Technical Report 980, NACA, 1950.
- [7] *Boyd, S. P., Balakrishnan, V. und Kabamba, P.*: A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer function matrix and related problems. Math. Control Signals Syst. 2 (1989), S. 207–219.
- [8] *Bristol, E. H.*: On a new measure of interaction for multivariable process control. IEEE Transactions on Automatic Control 11 (1966), S. 133–134.
- [9] *Cambridge Control Limited* MATLAB - Multivariable Frequency Domain Toolbox, User's Guide, 1. Ausgabe, Cambridge, 1988.
- [10] *Cook, P. A.*: Estimates for the inverse of a matrix. Linear Algebra and its Applications 10 (1975), S. 41–53.

- [11] *Cruz, J. B., Freudenberg, J. S. und Looze, D. P.*: A relationship between sensitivity and stability of multivariable feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981), S. 66–74.
- [12] *Desoer, C. A., Liu, R. W., Murray, J. und Saeks, R.*: Feedback system design: The fractional representation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 25 (1980), S. 399–412.
- [13] *van Dooren, P. M.*: The generalized eigenstructure problem in linear system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981), S. 111–129.
- [14] *Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P. und Francis, B.*: State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *Proc. 1988 American Control Conference, IEEE, 1988*, S. 1691–1696.
- [15] *Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P. und Francis, B.*: State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 34 (1989), S. 831–847.
- [16] *Doyle, J. C.*: Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* 23 (1978), S. 756–757.
- [17] *Doyle, J. C.*: Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Proc. IEE Part D* 129 (1982), S. 242–250.
- [18] *Doyle, J. C.*: Structured uncertainty in control system design. *Proc. 24th IEEE Conference on Decision and Control, Ft. Lauderdale 1985*, S. 260–265.
- [19] *Doyle, J. C., Francis, B. A. und Tannenbaum, A. R.*: *Feedback Control Theory*. Macmillan, New York, 1992.
- [20] *Doyle, J. C. und Stein, G.*: Robustness with observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 24 (1979), S. 607–611.
- [21] *Doyle, J. C. und Stein, G.*: Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26 (1981), S. 4–16.
- [22] *Doyle, J. C., Wall, J. E. und Stein, G.*: Performance and robustness analysis for structured uncertainty. *Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Orlando 1982*, S. 629–636.
- [23] *Edmunds, J. M. und Kouvaritakis, B.*: Extensions of the frame alignment technique and their use in the characteristic locus design method. *International Journal of Control* 29 (1979), S. 787–796.

- [24] *Engell, S.*: Optimale lineare Regelung. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [25] *Föllinger, O.*: Regelungstechnik. Hüthig, Heidelberg, 1985.
- [26] *Francis, B. A.*: A Course in H_∞ Control Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [27] *Francis, B. A. und Doyle, J. C.*: Linear control theory with an H_∞ optimality criterion. SIAM Journal on Control and Optimization 25 (1987), S. 815–844.
- [28] *Frank, P. M.*: Entwurf von Regelkreisen mit vorgeschriebenem Verhalten. G. Braun, Karlsruhe, 1974.
- [29] *Frederick, D. K., Herget, C. J., Kool, R. und Rinvall, M.*: ELCS - The extended list of control software. Eindhoven University of Technology, Dept. of Mathematics and Computer Science, P.O. Box 513, NL-6600 MB Eindhoven, 1991.
- [30] *Freudenberg, J. S. und Looze, D. P.*: Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [31] *Frobenius, G.*: Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen. S.B. Preuss. Akademie d. Wiss. (1912).
- [32] *Garcia, C. E. und Morari, M.*: Internal model control – 1: A unifying review and some new results. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. 21 (1982), S. 308–323.
- [33] *Genin, Y., van Dooren, P. und Kailath, T.*: On Σ -lossless transfer functions and related questions. Linear Algebra and its Applications 50 (1983), S. 251–275.
- [34] *Glover, K.*: All optimal Hankel norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds. International Journal of Control 43 (1984), S. 1115–1193.
- [35] *Glover, K. und Doyle, J. C.*: State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ norm bound and relations to risk sensitivity. Systems and Control Letters 11 (1988), S. 167–172.
- [36] *Glover, K. und McFarlane, D. C.*: Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞ -bounded uncertainty. IEEE Transactions on Automatic Control 34 (1989), S. 821–830.

- [37] *Golub, G. H. und Van Loan, C. F.:* Matrix Computations. John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [38] *Green, M.:* H_∞ controller synthesis by J-lossless coprime factorization. Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, 1990.
- [39] *Green, M.:* H_∞ controller synthesis by J-Lossless coprime factorization. SIAM Journal on Control and Optimization 30 (1992), S. 522–547.
- [40] *Green, M., Glover, K., Limebeer, D. und Doyle, J.:* A J-spectral factorization approach to H_∞ control. SIAM Journal on Control and Optimization 28 (1990), S. 1350–1371.
- [41] *Horowitz, I. M.:* Quantitative synthesis of uncertain multiple input-output feedback systems. International Journal of Control 30 (1979), S. 81–106.
- [42] *Horowitz, I. M.:* Quantitative feedback theory. IEE Proceedings, Part D 129 (1982), S. 317–328.
- [43] *Horowitz, I. M.:* Survey of quantitative feedback theory (QFT). International Journal of Control 53 (1991), S. 255–291.
- [44] *Horowitz, I. M.:* Quantitative Feedback Design Theory (QFT), Vol. 1. QFT Publications, Boulder, Co., 1993.
- [45] *Hsu, C. H. und Chen, C. T.:* A proof of the stability of multivariable systems. Proc. JEEE 56 (1968).
- [46] *Hung, Y. S. und MacFarlane, A. G. J.:* Multivariable Feedback: A Quasi-Classical Approach. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [47] *Kailath, T.:* Linear Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1980.
- [48] *Kalman, R. E.:* On the general theory of control systems. Proc. 1st International Congress on Automatic Control, IFAC, Moscow 1960, S. 481–493.
- [49] *Kalman, R. E.:* When is a linear control system optimal? Trans. ASME J. Basic Eng. 86 (1964), S. 51–60.
- [50] *Kantor, J. C. und Andres, R. P.:* Characterization of “allowable perturbations” for robust stability. IEEE Transactions on Automatic Control 28 (1983), S. 107–109.

- [51] *Khargonekar, P. P. und Rotea, M. A.*: Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 36 (1991), S. 824–837.
- [52] *Kimura, H.*: Conjugation, interpolation and model-matching in H_∞ . *International Journal of Control* 49 (1989), S. 269–307.
- [53] *Korn, U. und Wilfert, H.-H.*: Mehrgrößenregelungen. VEB Verlag Technik, Berlin, 1982.
- [54] *Kröner, A., Holl, P., Marquardt, W. und Gilles, E.*: DIVA – an open architecture for dynamic simulation. In: *Dechema-Monographs vol. 116*, VCH Verlagsgesellschaft 1989.
- [55] *Kučera, V.*: A contribution to matrix quadratic equations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 17 (1972), S. 344–347.
- [56] *Kwakernaak, H.*: A polynomial approach to H_∞ -optimization of control systems. In: *Modelling, Robustness and Sensitivity Reduction in Control Systems* (Curtain, R. F. (Hrsg.):), Springer, Berlin 1987, S. 84–94.
- [57] *Kwakernaak, H. und Sivan, R.*: *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [58] *Limebeer, D. J. N.*: The application of generalized diagonal dominance to linear system stability theory. *International Journal of Control* 36 (1982), S. 185–212.
- [59] *Lin, J. L., Postlethwaite, I. und Gu, D.-W.*: $\mu - k$ iteration: A new algorithm for μ -synthesis. *Automatica* 29 (1993), S. 219–224.
- [60] *Lunze, J.*: Robustness tests for feedback control systems using multidimensional uncertainty bounds. *Systems and Control Letters* 4 (1984), S. 85–89.
- [61] *Lunze, J.*: *Robust Multivariable Control*. Prentice Hall, New York, 1989.
- [62] *MacDuffee, C. C.*: *Theory of Matrices*. Chelsea, New York, 1946.
- [63] *MacFarlane, A. G. J. und Belletrutti, J. J.*: The characteristic locus design method. *Automatica* 9 (1973), S. 575–588.
- [64] *MacFarlane, A. G. J. und Karcanias, N.*: Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. *International Journal of Control* 24 (1976), S. 33–74.

- [65] *MacFarlane, A. G. J. und Kouvaritakis, B.:* A design technique for linear multivariable feedback systems. *International Journal of Control* 25 (1977), S. 837–874.
- [66] *MacFarlane, A. G. J. und Postlethwaite, I.:* The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci. *International Journal of Control* 25 (1977), S. 81–127.
- [67] *MacFarlane, A. G. J. und Scott-Jones, D. F. A.:* Vector gain. *International Journal of Control* 29 (1979), S. 65–91.
- [68] *Maciejowski, J. M.:* *Multivariable Feedback Design.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
- [69] *Martensson, K.:* On the matrix Riccati equation. *Inform. Sci.* 3 (1971), S. 17–49.
- [70] *The Math Works, Inc.* MATLAB – Control System Toolbox, User’s Guide, 1. Ausgabe, South Natick, MA, 1986.
- [71] *The Math Works, Inc.* MATLAB – Robust Control Toolbox, User’s Guide, 1. Ausgabe, South Natick, MA, 1988.
- [72] *The Math Works, Inc. und MUSYN Inc.* MATLAB – μ -Analysis and Synthesis Toolbox, 1. Ausgabe, South Natick, MA, 1991.
- [73] *The Math Works, Inc.* PRO-MATLAB User’s Guide, 1. Ausgabe, South Natick, MA, 1988.
- [74] *McFarlane, D. C. und Glover, K.:* *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [75] *Mees, A. I.:* Achieving diagonal dominance. *Systems and Control Letters* 2 (1981), S. 155–158.
- [76] *Mesarovic, M. D.:* *The Control of Multivariable Systems.* J. Wiley, New York, 1960.
- [77] *Meyer, D. G. und Franklin, G.:* A connection between normalized coprime factorizations and Linear Quadratic Regulator theory. *IEEE Transactions on Automatic Control* 32 (1987), S. 227–228.
- [78] *Morari, M. und Zafiriou, E.:* *Robust Process Control.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

- [79] *Nett, C. N., Jacobson, C. A. und Balas, M. J.:* A connection between state-space and doubly coprime fractional representations. *IEEE Transactions on Automatic Control* 29 (1984), S. 831–832.
- [80] *Newton, G. C., Gould, L. A. und Kaiser, J. F.:* Analytical Design of Linear Feedback Controls. J. Wiley, New York, 1957.
- [81] *Owens, D. H.:* Persönliche Mitteilung.
- [82] *Owens, D. H.:* Feedback and Multivariable Systems. Peter Peregrinus, Stevenage, 1978.
- [83] *Owens, D. H. und Chotai, A.:* Robust controller design for linear dynamic systems using approximate models. *IEE Proceedings* 130 (1983), S. 45–56.
- [84] *Owens, D. H. und Chotai, A.:* On eigenvalues, eigenvectors and singular values in robust stability analysis. *International Journal of Control* 40 (1984), S. 285–296.
- [85] *O’Young, S. D. und Francis, B. A.:* Sensitivity trade-offs for multivariable plants. *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), S. 625–632.
- [86] *Packard, A. und Doyle, J.:* The complex structured singular value. *Automatica* 29 (1993), S. 71–109.
- [87] *Patel, R. V. und Munro, N.:* Multivariable System Theory and Design. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [88] *Perron, O.:* Zur Theorie der Matrizen. *Math. Ann.* 64 (1907), S. 248–263.
- [89] *Postlethwaite, I.:* Robust control of multivariable systems using H_∞ -optimization. *Proc. Symposium on Robust Control System Design Using H_∞ and Related Methods*, Cambridge, 1991.
- [90] *Postlethwaite, I. und MacFarlane, A. G. J.:* A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [91] *Potter, J. E.:* Matrix quadratic solutions. *SIAM J. Appl. Math.* 14 (1966), S. 496–501.
- [92] *Raisch, J.:* Entwurf dezentraler Regler im Frequenzbereich. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1991.

- [93] *Raisch, J. und Gilles, E. D.*: Reglerentwurf mittels H_∞ -Minimierung – Eine Einführung, Teil 2. *Automatisierungstechnik* 40 (1992), S. 123–131.
- [94] *Raisch, J. und Gilles, E. D.*: Design of decentralized controllers in the frequency domain – theory and application to a binary distillation control problem. *Proc. 2nd European Control Conference, Groningen 1993*, S. 1725–1730.
- [95] *Raisch, J., Lang, L. und Gilles, E. D.*: H_∞ -Reglerentwurf für Zwei- und Dreistoffdestillationsprozesse. *Automatisierungstechnik* 41 (1993), S. 215–224.
- [96] *Raisch, J., Lang, L. und Gilles, E. D.*: Reversed frame normalizing design of a decentralized control system for a binary distillation column. *Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control, IEEE, Honolulu 1990*, S. 1153–1155.
- [97] *Raisch, J., Lang, L. und Gröbel, M.*: Loop shaping controller design for a binary distillation column. *Proc. International Conference on Control 91, IEE, Edinburgh 1991*, S. 1271–1276.
- [98] *Rosenbrock, H. H.*: *State-Space and Multivariable Theory*. Nelson, London, 1970.
- [99] *Rosenbrock, H. H.*: The stability of multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 17 (1972), S. 105–107.
- [100] *Rosenbrock, H. H.*: *Computer-Aided Control System Design*. Academic Press, London, 1974.
- [101] *Rosenbrock, H. H. und Storey, C.*: *Mathematics of Dynamical Systems*. Nelson, London, 1970.
- [102] *Sefton, J. und Glover, K.*: Pole/zero cancellations in the general H_∞ problem with reference to a two block design. *Systems & Control Letters* 14 (1990), S. 295–306.
- [103] *Seneta, E.*: *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Springer, New York, 1973.
- [104] *Smith, O. J. M.*: Closer control of loops with dead time. *Chem. Eng. Progress* 53 (1957), S. 217–219.
- [105] *Working Group on Software.*: WGS newsletter. WGS, Eindhoven University of Technology, Dept. of Mathematics and Computer Science, P.O. Box 513, NL-6600 MB Eindhoven.

- [106] *Strang, G.*: Linear Algebra and Its Applications. Academic Press, New York, 1980.
- [107] *Tolle, H.*: Mehrgrößen-Regelkreissynthese. R. Oldenbourg Verlag, München, 1983.
- [108] *Van der Waerden*: Moderne Algebra (8. Ausgabe). Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [109] *Vidyasagar, M.*: Input-output stability of a broad class of linear time-invariant multivariable systems. SIAM J. Control 10 (1972), S. 203–209.
- [110] *Vidyasagar, M.*: Control System Synthesis – A Factorization Approach. MIT Press, Massachusetts, 1985.
- [111] *Vidyasagar, M.*: Normalized coprime factorizations for non strictly proper systems. IEEE Transactions on Automatic Control 33 (1988), S. 300–301.
- [112] *Vidyasagar, M. und Kimura, H.*: Robust controllers for uncertain linear multivariable systems. Automatica (1986).
- [113] *Wonham, W. M.*: On pole assignment of multi-input controllable linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control 12 (1967), S. 660–665.
- [114] *Wonham, W. M.*: On a matrix Riccati equation of stochastic control. SIAM J. Contr. 6 (1968), S. 681–698.
- [115] *Youla, D., Jabr, H. und Bongiorno, J.*: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, Part 2: the multivariable case. IEEE Transactions on Automatic Control 21 (1976), S. 319–338.
- [116] *Zames, G.*: On input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, Part 1. IEEE Transactions on Automatic Control 11 (1966), S. 228–238.
- [117] *Zames, G.*: Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative semi-norms, and approximate inverses. IEEE Transactions on Automatic Control 26 (1981), S. 301–320.

Sachwortverzeichnis

- $D - K$ -Iteration, 332
- H_2 -Minimierung, 341
- H_2 -Norm, 341, 342
 - Berechnung, 342
- H_∞ -Norm, 299
 - Berechnung, 300
- H_∞ -Problem
 - suboptimales, 311
 - einfaches, 311
 - schwieriges, 315
- H_∞ -Standard-Problem, 308
- H_∞ -Verfahren, 299
- L_2 -Norm, 341
- L_∞ -Norm, 299
- $S/KS/T$ -Problem, 302, 317
- γ -Iteration, 301
- μ -Synthese, 331
- $\mu - K$ -Iteration, 334
- J_γ -verlustfreie Faktorisierung, 120, 312
- 1-Block-Problem, 309
- 2-Block-Problem, 309
- 4-Block-Problem, 309

- Ähnlichkeitstransformation, 62
- Align-Algorithmus, 249, 279
- Allpaß, 112
- Amplituden-Phasen-Beziehung, 218
- Amplitudenverhältnis, 40
- Ausgangsmatrix, 62
- Ausgangssignal
 - externes, 127, 308
 - internes, 127, 308
- Autokorrelationsmatrix, 343

- Bandbreite, 207

- Beobachtbarkeit, 66
- Beobachtbarkeits-Gramsche, 116, 306
- Beobachtbarkeits-Test, 66
- Beobachtbarkeitsmatrix, 66
- Bezout-Identität, 52, 83
 - einfache, 52, 83
 - verallgemeinerte, 59, 84
- Bode array, 39
- Bode Diagramm, 39

- Charakteristische Ortskurven, 139, 275
- Charakteristische Richtungen, 273
- Charakteristische Übertragungsfunktionen, 273
- Chen-Hsu-Theorem, 135
- CL (Characteristic Locus) Methode, 273
- closed loop shaping, 231

- Destillationskolonne, 255
- Dezentraler Mehrgrößen-Regler, 241
- Dezibel, 39
- Diagonaldominanz, 233
 - Spaltendiagonaldominanz, 233
 - verallgemeinerte, 235, 236, 238
 - Zeilendiagonaldominanz, 233
- Direct Nyquist Array (DNA) Verfahren, 233
- Dreiecksungleichung, 167
- Durchgriffsmatrix, 62
- Durchtrittsfrequenz, 209, 219, 221, 249
- Dynamikmatrix, 62

- Ein-/Ausgangs- (E/A-)Modell, 34
- Eingangsmatrix, 62

- Eingangssignal
 - externes, 127, 308
 - internes, 127, 308
- Einheit, 82
- elementare Spaltenoperationen, 53
- elementare Zeilenoperationen, 48
- Energieverstärkung, 300
 - maximale, 300
- Entdeckbarkeit, 106
- Entwurfsmodell, 126
- Faktorisierung in \mathcal{RH}_∞ , 80
 - doppelt kopprime, 84
 - linkskopprime, 84
 - normalisierte kopprime, 87, 305
 - rechtskopprime, 84
- Fehlerklasse, 177
- Frequenzgangmatrix, 38
- Frobenius-Norm, 249, 288
- Führungsfilter, 129
- Funktion
 - algebraische, 275
- Gemischtes Sensitivitätsproblem, 302
- Gershgorin-Bänder, 238
 - robuste verallgemeinerte, 243, 244
 - verallgemeinerte, 238, 240, 245
- Gershgorin-Kreise, 234
 - Spalten-Gershgorin-Kreise, 234
 - verallgemeinerte, 236
 - Zeilen-Gershgorin-Kreise, 234
- Gershgorin-Theorem, 234
 - verallgemeinertes, 236
- Gewichtungsmatrizen, 174, 302, 303
- Grenzen quantitativer Regelkreiseigenschaften, 217
 - algebraische Einschränkungen, 172, 217
 - analytische Einschränkungen, 218
- größter Singulärwert, 166, 201
- Hamilton-Matrix, 365
- Hardy-Raum, 81
- Hauptausgangsrichtungen, 168
- Haupteingangsrichtungen, 168
- Hauptidealring, 41, 81
- Hauptverstärkungen, 168
- Inner-outer-factorization, 117
- Integrität, 252
 - bezüglich Sensorausfällen, 252
 - bezüglich Stellgliedausfällen, 252
- Internal Model Control, 157
- Interne Variable, 74
- Internes Modell, 33
- Interpolationsproblem, 333
- Invariante Nullstellen, 110
- Inverse Nyquist Array (INA) Verfahren, 253
- Kalman-Zerlegung, 109
- kleinster Singulärwert, 168
- Kommutativer Regler, 278
- Kompensationsmatrix, 241, 247
 - dynamische, 251
 - konstante, 241, 248
- Konditionszahl, 220
- Linksteiler, 44
 - größter gemeinsamer (ggLt), 45
- Lower linear fractional transformation (LLFT), 128, 192
- LQG (Linear Quadratisch Gaußsche) Theorie, 349
- LTR (Loop Transfer Recovery), 351
- Markov-Parameter, 147
- Matrizenorm, 167
- McMillan-Grad, 97
- Minimalrealisierungen, 62
- Minoren, 54
- Modellbildung, 29, 30, 33
- Modellfehler, 177
 - strukturierte, 185
 - additive, 186
 - verallgemeinerte, 187
 - unstrukturierte, 178
 - additive, 178

- faktorierte, 181
- multiplikative, 180
- proportionale, 180
- verallgemeinerte, 183
- Modellkomplexität, 29, 30
- Nehari-Problem, 328
- Nichtnegative Matrizen, 196
- Nichtsingularität, 355
- NLKF-Entwurf, 305
- NLKF-Problem, 322
- Normale Matrix, 287
- Normalrang, 42
- Nullstellen, 91
 - einer Übertragungsmatrix, 91
 - Ausgangs-Entkopplungsnullstellen, 105
 - linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 106
 - rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 106
 - Zustandsmodell, 106
 - Ein/Ausgangs-Entkopplungsnullstellen, 107
 - Eingangs-Entkopplungsnullstellen, 102
 - linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 103
 - rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 103
 - Zustandsmodell, 103
 - invariante, 110
 - System-Nullstellen, 108
- Nullstellen-Polynom, 92
 - Mehrgrößensystem, 96
 - skalares System, 92
- Nyquist array, 39, 187
- Nyquist-Kontur, 136
- Nyquist-Kriterium, 138
 - für Mehrgrößensysteme, 138
 - verallgemeinertes, 140, 221, 237
- Nyquist-Ortskurve, 39, 136
- open loop shaping, 231
- Ostrowski-Kreise, 254
- Parameterfehler, 185
- parity interlacing property, 263
- Parseval-Theorem, 342
- PBH Beobachtbarkeitstest, 106
- PBH Steuerbarkeitstest, 104
- Permutationsmatrix, 247
- Perron-Frobenius-Eigenwert, 196, 236
- Perron-Frobenius-Theorem, 196
- Phasenreserve, 220
- Phasenverschiebung, 40
- Pivot, 148
- Pol-Nullstellenkürzung, 252
- Pol-Polynom, 92
 - des geschlossenen Kreises, 134
 - des offenen Kreises, 134
 - Mehrgrößensystem, 97
 - skalares System, 92
- Pole, 91
 - einer Übertragungsmatrix, 91
- Polschwerpunkt, 143
- Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 56
 - linkskopprime, 58
 - rechtskopprime, 58
- Polynome, 41
 - Anfangskoeffizient, 42
 - Grad, 42
 - invariante, 53
 - kopprime, 47
 - teilerfremde, 47
 - verallgemeinerte, 80
- Polynommatrizen, 41
 - linkskopprime, 47
 - nichtsinguläre, 42
 - rechtskopprime, 47
 - Spaltengrad, 42
 - spaltenreduziert, 43
 - unimodulare, 46
 - verallgemeinerte, 81
 - unimodulare, 82
 - Zeilengrad, 42

- zeilenreduziert, 43, 289
- Popov-Form, 291
- Prozeß, 27
- Prozeßmodell, 27
- Quantitative Feedback Design Theory (QFT), 232
- Quasi-klassische Verfahren, 231, 233
- Rang, 355
- Rayleigh-Prinzip, 166
- Rechtsteiler, 44
 - größter gemeinsamer (ggRt), 44
- Reduzierbare Matrizen, 196
- Regeldifferenz, 126, 128, 163, 165
 - bleibende, 169
 - maximal zulässige, 170
 - verschwindende, 169
- Regelkreis, 126
 - asymptotische Stabilität, 131
 - Führungsverhalten, 163
 - interne Stabilität, 131
 - mit einem Freiheitsgrad, 127
 - mit mehreren Freiheitsgraden, 129
 - quantitative Eigenschaften, 162
 - sinnvoll konfiguriert, 131
 - Störverhalten, 163
 - Unterdrückung von Meßrauschen, 163
 - verallgemeinerter, 128, 302, 308
 - Stabilisierbarkeit, 159, 310
 - Stabilität, 161
- Regelstrecke, 27
 - verallgemeinerte, 127, 157, 209, 308
- Regelung, 28, 29
- Relative Gain Array, 30, 247
- Reversed Frame Normalizing, 287
- RFN Verfahren, 287
- RGA, 30, 247
- Riccati-Gleichung, 88, 117, 313, 316, 347, 351, 361, 365
 - indefiniten Fall, 370
 - Standard-Fall, 365
- Riemannsche Fläche, 275
- Robustheit, 177
 - der Eigenschaft Stabilität, 192, 194, 195, 197, 203
 - quantitativer Eigenschaften, 204–206, 211–213
- Rosenbrock-System-Matrix, 75
- Rückführdifferenzenmatrix, 135, 233, 237
- Rückführungsstruktur, 28
- Rückkopplungsstruktur, 28
- Satz der kleinen Verstärkungen, 140, 193
- Schur-Formeln, 356
- Schur-Komplement, 357
- Sensitivitätsintegral, 224
- Singulärwerte, 165, 276
 - strukturierte, 198, 332
- Singulärwertzerlegung, 167, 287
- SISO-Modelle, 30
- Smith-Form, 53
- Smith-Form-Kriterium, 55
- Smith-McMillan-Form, 94
- Spalten-Hermite-Form, 291
- Spektral-Zerlegung, 118
- Spektraldichte, 342
- Spektralradius, 141, 201
- Sperr-Eigenschaft, 92
 - skalares System, 92
 - Mehrgrößenfall, 98
- Spur, 357
- Stabilisierbarkeit, 104
 - verallgemeinerter Streckenmodelle, 159
- Stabilitätsreserve, 306
- Staircase-Algorithmus, 65
- Steuerbarkeit, 64
- Steuerbarkeits-Gramsche, 116, 306
- Steuerbarkeits-Test, 64
- Steuerbarkeitsmatrix, 64
- Steuerung, 28, 29
- Stochastische Signale, 342

- Störmodell, 261
 Störungs-Kompensation, 129
 Streckenmodell, 27
 Strukturiertes Singulärwert, 198
 obere Schranke, 202
 untere Schranke, 202
 subunitäre Matrix, 168
 Sylvester-Ungleichung, 355
 System-Äquivalenz, 77
 System-Matrix, 73
 nicht reduzierbare, 80
 System-Nullstellen, 108
 System-Pole, 99
 linke Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 102
 rechte Polynom-Matrizenbruchdarstellung, 102
 Zustandsmodell, 102
 Teiler, 44
 größter gemeinsamer (ggT), 44
 Übertragungsmatrix, 37
 Eigenvektoren, 273
 Eigenwerte, 273
 proper, 38
 streng proper, 38
 J_γ -verlustfreie, 118
 J_γ -ko-verlustfreie, 119
 Allpaß, 112
 ko-unitäre, 112
 ko-verlustfreie, 115
 minimalphasige, 116, 221, 223
 unitäre, 112
 verlustfreie, 115, 221
 Übertragungsnullstellen, 91
 Mehrgrößensystem, 96
 skalares System, 91
 Vielfachheit, 96
 Übertragungspole, 91
 Mehrgrößensystem, 96
 skalares System, 91
 Vielfachheit, 96
 unitäre Matrix, 167, 201
 Upper linear fractional transformation (ULFT), 183, 189, 192
 Vektornorm, 165
 Euklidische, 165
 Vergleichsmatrix, 236, 249
 Verlustfreie Zerlegung, 118
 Verstärkung, 165, 167
 Hauptverstärkungen, 168
 voller Spaltenrang, 355
 voller Zeilenrang, 355
 Vorfilter, 129
 Wasserbett-Effekt, 222
 weißes Rauschen, 342
 Wurzelortskurven, 141
 für Eingößensysteme, 142
 für Mehrgrößensysteme, 145
 Wurzelschwerpunkt, 143
 Youla-Parameter, 151
 Youla-Parametrierung, 151, 328, 344
 Zeitbereichsspezifikationen, 261
 Übersetzung in den Frequenzbereich, 261
 Zustandsmodelle, 62
 Ordnung, 62
 Zustandsvariable, 62