Abschlussarbeit für die Prüfung zum Master of Science
im Studiengang Audiokommunikation und -technologie

Vorhersage der Absorptions- und Streuungseigenschaften von Raumbegrenzungsflächen mithilfe der Randelementmethode

Technische Universität Berlin
Fakultät I - Geistes- und Bildungswissenschaften
Fachgebiet Audiokommunikation

Gutachter:
Prof. Dr. Stefan Weinzierl
Dipl.-Ing. Ralf Bauer-Diefenbach

Vorgelegt von:
Felix Maiworm, [redacted]

Eingereicht am 25.10.2018

Zusammenfassung

Die Absorptions- und Streuungseigenschaften von Raumbegrenzungsflächen weisen einen maßgeblichen Einfluss auf die Simulation von raumakustischen Parametern, wie Nachhallzeit, Deutlichkeit oder Stärke im Rahmen der geometrischen Raumakustik auf. In der vorliegenden Arbeit wird ein geeignetes numerisches Berechnungsverfahren zur Vorhersage des Absorptionsgrades, des Streugrades und des Diffusitätsgrades von Raumbegrenzungsflächen mithilfe der Randelementmethode (REM) beschrieben. Der Berechnungsansatz besteht in der Bestimmung des Streumusters im Freifeld, welches nach einer einfallenden ebenen Welle auf einen kreisförmigen Probenausschnitt des betrachteten Wand- oder Deckenaufbaus abgestrahlt wird. Das Streumuster wird auf das Verhalten einer flachen, schallharten Referenzplatte normiert. Anhand von Messungen des Streugrades und des Absorptionsgrades in Anlehnung an die Vorgaben der ISO 17497-1 wird eine Überprüfung der numerischen Berechnungsergebnisse durchgeführt. Festzustellende Abweichungen sind vor allem durch die vereinfachende Annahme des lokal reagierenden Verhaltens von absorbierenden Schichten des Aufbaus zu erklären.

Abstract

The absorption and scattering of room boundary surfaces play an essential role in the calculation of room acoustical parameters such as reverberation time, clarity or strength within the methods of geometrical room acoustics. The present work describes a suitable numerical calculation model to predict the absorption, scattering and diffusion coefficients of room surfaces using the boundary element method (BEM). The applied calculation approach is to determine the reflection directivity of a circular sample of the considered wall or ceiling construction after an incident plane wave. The reflection directivity is normalized to the behaviour a flat reference plate. A verification of the numerical results is attempted by measurements of the scattering and absorption coefficients based on the instructions of ISO 17497-1. The discovered deviations must be explained primarily by the assumption of local reacting absorptive layers of the wall- or ceiling construction under test.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Eigenschaften von Raumbegrenzungsflächen **3**

2.1 Absorptionsgrad 4

2.2 Streugrad 9

2.3 Diffusitätsgrad 14

2.4 Simulationen in der geometrischen Raumakustik 15

3 Grundlagen und Entwicklung geeigneter Vorhersagemodelle **18**

3.1 Beschreibung des Schallfeldes in einem homogenen Absorber 18

3.2 Beschreibung des Wellenverhaltens von Schall 23

3.3 Berechnung des Schallfeldes mit der REM 25

3.4 Stand der Forschung zu Vorhersagen mithilfe der REM 28

4 Numerisches Vorhersagemodell mithilfe der REM **31**

4.1 Implementierung der REM in der Open Source Software *Bempp* . . 31

4.2 Beschreibung des Berechnungsmodells 33

4.3 Vergleich mit der Schallstreuung einer Kugel 38

4.4 Berücksichtigung des absorbierenden Verhaltens von Teilflächen . . 39

4.5 Ableitung der Koeffizienten 41

5 Beschreibung der untersuchten Proben und des Messaufbaus **45**

5.1 Beschreibung der fünf Proben 45

5.2 Beschreibung des Messverfahrens 49

6 Berechnungs- und Messergebnisse **51**

6.1 Einfluss der Kantenlänge des Dreiecksnetzes 51

6.2 Einfluss der Winkelauflösung 53

6.3 Berechnungsergebnisse für eine Halbkugel 54

6.4 Berechnungs- und Messergebnisse für die fünf Proben 55

6.5 Vergleich der Berechnungs- und Messergebnisse 58

7 Zusammenfassung und Diskussion **59**

Literaturverzeichnis **64**

Anhang: Polarplots für die fünf Proben **68**

1 Einleitung

Simulationen auf Basis von geometrischen Modellen werden im Bereich der Raumakustikplanung und Beschallungsplanung intensiv genutzt. Die Aussagekraft der zugrundeliegenden Modelle hängt wesentlich von der Kenntnis der physikalisch korrekten Absorptions- und Streuungseigenschaften der Raumbegrenzungsflächen ab, welche entweder durch Messungen oder durch Vorhersagemodelle bestimmt werden können.

Häufig werden die Innenraummodelle für die Simulationen in ihrer Detalliertheit begrenzt und Feinstrukturen oder Rauheiten von Oberflächen zu glatten Flächen vereinfacht. Die Flächen sind daraufhin durch normgerechte Koeffizienten hinsichtlich ihres absorbierenden oder streuenden Verhaltens zu beschreiben, welche in Form des Absorptionsgrades, Streugrades und Diffusitätsgrades definiert sind. Abb. 1 stellt zur Veranschaulichung eine Raumbegrenzungsfläche dar, die in den Modellen der geometrischen Raumakustik typischerweise als eine glatte Fläche aufgefasst und deren Feinstruktur durch einen hohen Streugrad beschrieben wird.

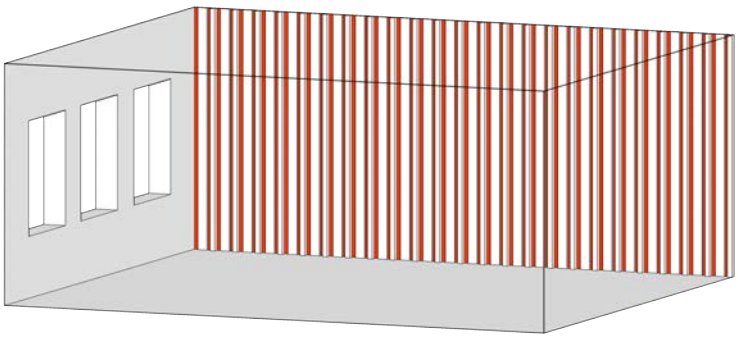

Abbildung 1: Ansicht einer schallstreuenden Raumbegrenzungsfläche

Die vorliegende Arbeit behandelt die Vorhersage des Absorptionsgrades, des Streugrades und des Diffusitätsgrades für Raumbegrenzungsflächen mithilfe der Randelementmethode (REM). Durch die Implementierung der REM lässt sich das Schallfeld, welches ein geschlossenes Objekt umgibt, durch Randbedingungen auf der Objektoberfläche berechnen. Das Reflexionsverhalten des Objektes nach einer einfallenden Welle kann damit an jedem Punkt im unendlichen Raum bestimmt

werden. Die Methode bildet die Gesetze der Wellengleichung ab und eignet sich somit für die numerische Berechnung des Absorptions- und Streuverhaltens von Hindernissen und Raumbegrenzungsflächen.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Grundlagen zur Beschreibung der Raumbegrenzungsflächen und zu geeigneten Vorhersagemodellen erläutert. Daraufhin wird ein numerisches Berechnungsverfahren mithilfe der REM vorgeschlagen. Anhand von Messungen des Absorptions- und des Streugrades für fünf Proben werden die so vorhergesagten Koeffizienten hinsichtlich ihrer Validität überprüft.

2 Eigenschaften von Raumbegrenzungsflächen

Die Raumakustik beschäftigt sich sinngemäß mit der Ausbreitung von Schall innerhalb von Räumen, die zumeist geschlossene Volumina darstellen. Das Medium der Schallausbreitung ist im Fall der vorliegenden Arbeit die Luft. Die den Raum begrenzenden Flächen wie der Boden, die Decke und die Wände aber auch Hindernisse wie Möbel oder Raumtrennelemente führen zu Reflexionen der sich ausbreitenden Schallwellen. Sie werden durch Kennwerte charakterisiert, die ihr Verhalten bei auftreffendem Schall beschreiben und in Form von Koeffizienten für Simulationen in der geometrischen Raumakustik Anwendung finden.

Dabei liegt die in Fuchs (2016, S.20 ff.) ausgeführte Annahme zugrunde, dass sich die auf eine Raumbegrenzung auftreffende Schallleistung P_E mit Komponenten reflektierter Leistung P_R, transmittierter Leistung P_T, fortgeleiteter Leistung P_F und dissipierter Leistung P_D ins Gleichgewicht bringen lässt (siehe Abb. 2):

$$P_E = P_R + P_T + P_F + P_D \tag{2.0.1}$$

Die Summe aus transmittierter, fortgeleiteter und dissipierter Leistung steht dem Raum dann nicht mehr zur Verfügung und ist somit in direktem Zusammenhang mit der Nachhallzeit des Raumes zu betrachten. Die reflektierte Leistung kann entweder die Form von gespiegelten, geometrischen Reflexionen annehmen, die auch als spekulare Reflexionen bezeichnet werden. Sie kann allerdings auch in den Raum gestreut werden, falls das Hindernis zum Beispiel eine raue Oberfläche aufweist. Das räumliche Verhalten von Hindernissen bzw. Raumbegrenzungsflächen wird in der vorliegenden Arbeit in Kugelkoordinaten betrachtet, welche einen Halbraum vor der Oberfläche mit einem Polarwinkel $\theta = 0°$ für die senkrechte z-Achse definieren (siehe Abb. 3).

Für alle folgenden Ausführungen werden harmonische Zeitverläufe vorausgesetzt. Dies entspringt der Annahme, dass sich alle beschriebenen Vorgänge zeitlich als Sinus- oder Cosinus-Funktionen auffassen lassen und stets der eingeschwungene, stationäre Zustand des Vorgangs betrachtet wird. Somit kann der Zeitbezug, welcher im Fall der komplexen Exponentialfunktion dem Term $e^{j\omega t}$ entspricht, in den Formulierungen entfallen. Als Schallfeld wird immer das Schalldruckfeld bezeichnet. Die beschriebenen Koeffizienten sind immer frequenzabhängig und werden entweder für reine Töne mit der Frequenz f oder für Frequenzbänder mit der Mittenfrequenz f_M angegeben.

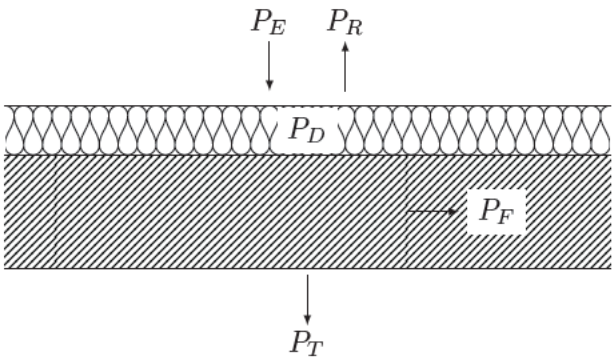

Abbildung 2: Komponenten der Schallleistung an Raumbegrenzungsflächen

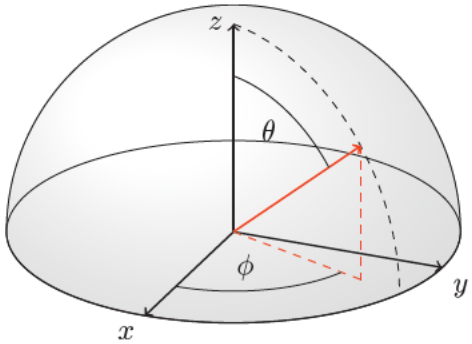

Abbildung 3: Halbraum über einer Fläche in Kugelkoordinaten

2.1 Absorptionsgrad

Schallabsorption bezeichnet die Dämpfung der Schallleistung im Medium der Schallausbreitung oder der reflektierten Schallleistung bei dem Auftreffen der einfallenden Schallleistung auf ein Hindernis. Sie lässt sich daher in zwei grundlegende Domänen einteilen:

- die Absorption im Medium der Schallausbreitung
- die Absorption von einfallender Schallleistung auf Hindernisse bzw. Raumbegrenzungsflächen

Die Schallabsorption im Medium wird im Fall des Luftschalls häufig auch als Luftabsorption bezeichnet. Nach der Norm 9613-1 der ISO (1993) ist die Berechnung der Luftabsorption als Dämpfungsmaß in Abhängigkeit von der Distanz zur Schallquelle angegeben. Die Dämpfung hängt von der Frequenz, der Lufttemperatur, der relativen Luftfeuchtigkeit und dem athmosphärischen Luftdruck ab.

Die Luftabsorption ist sowohl im Rahmen von raumakustischen Vorhersagen als auch in der Messtechnik zu berücksichtigen und spielt somit auch in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit eine Rolle. Viel relevanter ist für die vorliegende

Arbeit allerdings jene Schallabsorption, welche an Raumbegrenzungsflächen oder Hindernissen in einem Raum stattfindet. Sie bestimmt die Dämpfung einfacher oder vielfacher Reflexionen von Schallwellen, durch welche die Nachhallzeit eines Raumes maßgeblich beeinflusst wird und stellt somit ein zentrales Phänomen in der Raumakustik dar.

In 2.0.1 wird die einfallende Schallleistung in die Komponenten reflektierter, transmittierter, fortgeleiteter und dissipierter Schallleistung aufgeteilt. Für die weiteren Betrachtungen dieser Leistungskomponenten wird der Anteil der transmittierten und fortgeleiteten Leistung zur dissipierten Leistung hinzugerechnet:

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P_T + P_F + P_D \\ P_E &= P_R + P_\alpha \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Dies fasst die an den Raumbegrenzungsflächen auftretende Verlustleistung P_α zusammen. Wie in Möser (2015) dargestellt, kann man Begrenzungsflächen wie Türen oder Fenstern im Allgemeinen eine Verlustleistung aufgrund von transmittierter Leistung zusprechen, während beispielsweise Stoffvorhänge eine dissipierte Leistung hervorrufen. So wäre eine Situation denkbar, in der ein leichtes, bzw. dünnes Fenster mit einem davor angebrachten Vorhang beide Leistungskomponenten vereint.

Der Absorptionsgrad α bezeichnet das Verhältnis von Verlustleistung zu einfallender Leistung und lässt sich nach Fuchs (2016) nun wie folgt definieren:

$$\alpha = \frac{P_\alpha}{P_E} = \frac{P_E - P_R}{P_E} = 1 - \frac{P_R}{P_E} \tag{2.1.2}$$

Ebene Wellen stellen einen idealisierten Fall der Schallausbreitung dar und bieten den Vorteil, dass ihre Amplitude ortsunabhängig ist. Ein Abfall der Amplitude über die Distanz zur Schallquelle muss daher in der Betrachtung von einfallenden und reflektierten Wellen nicht berücksichtigt werden, wenn vereinfachend ein dämpfungsfreies Medium angenommen wird. Für Hindernisse und Raumbegrenzungsflächen ergibt sich damit ein praktisches Modell für die Beschreibung von Schallreflexionen, das in Abb. 4 für den Fall einer glatten Oberfläche dargestellt ist.

Die Reflexion erfolgt nach dem Prinzip der Spiegelung, gesetzt den Fall, dass das Hindernis sehr viel größer als die Wellenlänge λ der einfallenden Welle ist. Kuttruff (2009, S.42 ff.) bietet hierzu einige anschauliche Darstellungen. Der Ausfallswinkel zur Senkrechten des Hindernisses θ' ist gleich dem Einfallswinkel θ. Für die weitere Betrachtung wird angenommen, dass das Hindernis unendlich weit ausgedehnt ist.

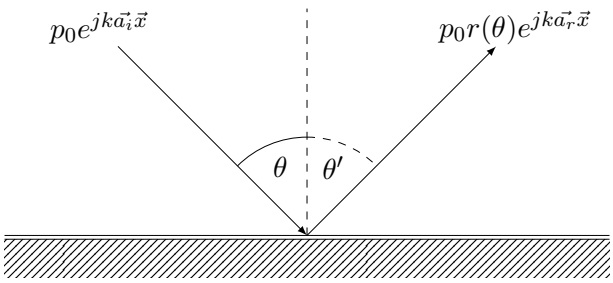

Abbildung 4: Reflexion einer ebenen Welle auf einem glatten Hindernis

Das Schallfeld lässt sich nun als Überlagerung der einfallenden und ausfallenden ebenen Welle mithilfe der komplexen Exponentialfunktion ausdrücken:

$$p(\vec{x}) = p_0(e^{jk\vec{a_i}\vec{x}} + r(\theta)e^{jk\vec{a_r}\vec{x}}) \tag{2.1.3}$$

Hierbei stellt p_0 die Amplitude der einfallenden Welle dar. Die komplexe Zahl r bezeichnet den Reflexionsfaktor, welcher Amplitude und Phase der reflektierten Welle gewichtet. Die Zahl k entspricht der Wellenzahl bzw. der Kreiswellenzahl, für die mit einem Richtungsvektor $\vec{a}$, der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Schallgeschwindigkeit c folgende Notation gilt:

$$k = |\vec{k}| = |k \cdot \vec{a}| = \frac{\omega}{c} \tag{2.1.4}$$

Die Vektoren $\vec{a_i}$, $\vec{a_r}$ und $\vec{x}$ benennen den Richtungsvektor der einfallenden Welle, der ausfallenden Welle und den Aufpunkt im Raum. Der von dem Einfallswinkel θ abhängige Reflexionsfaktor steht in Zusammenhang mit dem Absorptionsgrad für diese Betrachtungen, welcher ebenfalls von θ abhängig ist und mit dem Subskript G in Anlehnung an das spekulare, geometrische Verhalten der Reflexion notiert wird:

$$\alpha_G(\theta) = 1 - |r(\theta)|^2 \tag{2.1.5}$$

Im Fall des senkrechten Schalleinfalls ist $\theta = 0$ und die ebenen Wellen bewegen sich nur in eine Achsenrichtung. Dieser Zustand kann mithilfe eines schallharten Rohrs, dessen Querschnitt sich nicht ändert und an dessen Ende ein Lautsprecher montiert ist, hergestellt werden. Hierbei spricht man von einem Kundt'schen Rohr oder Impedanzrohr. Bis zu einer oberen Grenzfrequenz, ab der sich senkrecht zur Rohrlänge Moden ausbilden, kann das Schallfeld im Rohr als hin- und rücklaufende Welle entsprechend 2.1.3 beschrieben werden. Der Reflexionsfaktor einer am anderen Ende des Rohres eingebrachten Probe kann nun durch Messungen im Rohr bestimmt werden. Die von der ISO (2001) als Zwei-Mikrofon-Technik bezeichnete Methode sieht hierfür die Bildung der Übertragungsfunktion H_{12}

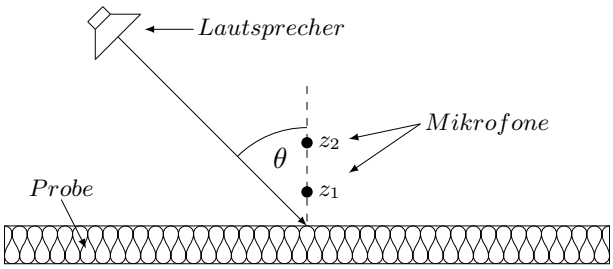

Abbildung 5: Messaufbau für die Bestimmung des Reflexionsfaktors im Freifeld

zwischen zwei Messpunkten z_1 und z_2 im Rohr vor, welche mit den analytisch berechneten Schallfeldern an den Messpunkten verrechnet wird :

$$r = \frac{H_{12}e^{jkz_1} - e^{jkz_2}}{e^{-jkz_2} - H_{12}e^{-jkz_1}} \tag{2.1.6}$$

Für den schrägen Schalleinfall ist nach Cox und D'Antonio (2017, S.100 ff.) eine Messung des Reflexionsfaktors im Freifeld möglich. Dabei wird ein Lautsprecher möglichst weit entfernt von der Probe platziert, um einfallende ebene Wellen annehmen zu können. Zwei Messpunkte werden in der senkrechten Achse übereinander gesetzt. Abb. 5 zeigt den Messaufbau des Verfahrens. Die Fläche der Probe sollte hierbei möglichst groß sein und die Messpunkte sollten möglichst nah an der Probe platziert werden, um den Einfluss rücklaufender Wellen von den Probenkanten zu minimieren. Die Berechnung entspricht der Methode im Kundt'schen Rohr mit einer winkelabhängigen Gewichtung der Exponenten:

$$r(\theta) = \frac{H_{12}e^{jkz_1\cos(\theta)} - e^{jkz_2\cos(\theta)}}{e^{-jkz_2\cos(\theta)} - H_{12}e^{-jkz_1\cos(\theta)}} \tag{2.1.7}$$

Die Norm 13472-1 der ISO (2002) beschreibt ein weiteres Freifeldverfahren für die Messung des Absorptionsgrades mit einem Lautsprecher und nur einem Messpunkt, welcher sich zwischen dem Lautsprecher und der Probe befindet. Nach Anregung mit einem deterministischen Signal wie einer Maximalfolge oder einem Sinus-Sweep wird die gemessene Impulsantwort in Direkt- und Reflexionsweg aufgeteilt und jeweils eine Übertragungsfunktion gebildet. Da der Lautsprecher realistischerweise nicht weit von der Probe entfernt ist, wird ein Reflexionsfaktor für Kugelwellen Q berechnet, der nicht mit der Definition des Reflexionsfaktors für ebene Wellen r übereinstimmt. Diese Messmethode wird auch als In-Situ-Verfahren bezeichnet.

Die vorangegangenen Betrachtungen, welche die Abhängigkeit des Absorptionsgrades von dem Einfallswinkel der auftreffenden ebenen Welle beschreiben, setzten die Reflexion nach dem Prinzip der Spiegelung voraus. Reflektierte Schallleistung wird hierbei ausschließlich in Form einer ebenen reflektierten Welle transportiert.

Dies wird auch als spekulare Reflexion bezeichnet und trifft im Allgemeinen nur auf ebene Wellenfronten und glatte, ausgedehnte Hindernisse zu. Cox und D'Antonio (2017, S.375 ff.) stellen diese Abhängigkeit von der Geometrie der Hindernisse anhand von zahlreichen Beispielen dar.

Unter der Annahme, dass das Schallfeld in einem Raum durch zahlreiche, inkohärente Reflexionen an den Raumbegrenzungsflächen entsteht, kann von einem diffusen Schallfeld ausgegangen werden. Die Wahrscheinlichkeit für einen Winkel, aus dem eine Welle auf einen Aufpunkt im Raum fällt, ist in einiger Entfernung von den Raumbegrenzungsflächen damit überall und für jeden Winkel gleich groß. Betrachtet man das Auftreffen von Schallwellen auf eine Fläche in Kugelkoordinaten (siehe Abb. 3), kann die Schallleistung nach Kuttruff (2009, S.52 ff.) in Abhängigkeit von dem Raumwinkel $\sin(\theta)d\theta d\phi$ wie folgt formuliert werden:

$$P = IdS \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \tag{2.1.8}$$

Mit einem von dem Polarwinkel abhängigen Absorptionsgrad $\alpha(\theta)$ kann nun ein Absorptionsgrad für diffusen Schalleinfall formuliert werden, was in der Literatur häufig als Paris'sche Formel bezeichnet wird. Hierbei ist zu beachten, dass die Abhängigkeit von dem Azimuthwinkel vernachlässigt wird. Die azimuthale Abhängigkeit wird in den folgenden Kapiteln im Sinne einer arithmetischen Mittelwertbildung über die betrachteten Azimuthwinkel behandelt.

Der Absorptionsgrad für diffusen Schalleinfall bekommt das Subskript $\overline{\theta}$ zugeordnet:

$$\alpha_{\overline{\theta}} = \int_0^{2\pi} \alpha(\theta)\sin(2\theta)d\theta \tag{2.1.9}$$

Eine Messmethode zur Bestimmung des Absorptionsgrades für diffusen Schalleinfall wird von der ISO (2003) in der DIN EN ISO 354 definiert. Diese nimmt für das diffuse Schallfeld in einem Hallraum den stationären, eingeschwungenen Zustand an, in dem die absorbierte Leistung und die in den Raum eingebrachte Leistung über $P_\alpha = \alpha P_E$ im Gleichgewicht stehen. Wird die Leistungsquelle abgeschaltet, kann die Nachhallzeit T, welche einen Abfall des Schalldruckpegels um $60dB$ beschreibt, durch das Raumvolumen V und die äquivalente Absorptionsfläche A des Raums beschrieben werden:

$$T = 0,163\frac{V}{A} \tag{2.1.10}$$

Dieser Zusammenhang wird auch als die Sabine'sche Formel bezeichnet, welche in Möser (2015, S.242 ff.) hergeleitet wird. Die äquivalente Absorptionsfläche A ist aus den absorbierenden Teilflächen S_n aller Raumbegrenzungsflächen sowie sich

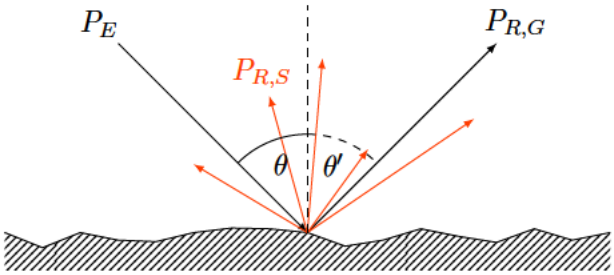

Abbildung 6: Spekulare und gestreute Leistung nach einer einfallenden ebenen Welle

im Raum befindenden Hindernissen und der äquivalenten Luftabsorptionsfläche A_L zusammengesetzt:

$$A = A_L + \sum_m \alpha_m S_m \tag{2.1.11}$$

Die Nachhallzeit wird für Terzbänder mithilfe der Rückwärtsintegration von Raumimpulsantworten an mehreren Messpunkten im leeren Raum und im Raum mit eingebrachter Probe ermittelt. Der Absorptionsgrad der Probe wird daraufhin durch die Differenz der gemessenen äquivalenten Absorptionsfläche gebildet:

$$\alpha_{ISO} = \frac{A_P}{S} = \frac{A_2 - A_1}{S} = 55,3\frac{V}{S}(\frac{1}{cT_2} - \frac{1}{cT_1}) \tag{2.1.12}$$

Dabei bezeichnen T_1 die Nachhallzeit des leeren Raums und T_2 die Nachhallzeit des Raums mit eingebrachter Probe. S bezeichnet die Flächengröße der Probe, bzw. die Grundfläche im Raum, welche mit der Probe bedeckt wurde und mindestens $12m^2$ aufweisen sollte. Die Luftabsorption und die Schallgeschwindigkeit werden hier als konstant über alle Messzeitpunkte angesehen.

2.2 Streugrad

Der Betrachtung des Reflexionsverhaltens lag in den vorangegangenen Abschnitten die Annahme von spekularen Reflexionen zugrunde (siehe Abb. 4). Dies gilt allerdings nur für den begrenzten Fall, dass die reflektierende Fläche sehr groß im Verhältnis zur Wellenlänge ist und eine glatte, ebene Oberfläche aufweist. Für den Fall rauer, strukturierter oder gewölbter Oberflächen bzw. Hindernissen, deren Größenordnungen im Bereich der betrachteten Wellenlänge liegen, muss dagegen auch die Streuung des Schalls berücksichtigt werden.

Dazu wird die in Abb. 2 dargestellte reflektierte Leistung P_R in die Anteile spekular reflektierter Leistung $P_{R,G}$ und von der spekularen Richtung weg gestreuter Leistung $P_{R,S}$ aufgeteilt:

$$P_R = P_{R,G} + P_{R,S} \tag{2.2.1}$$

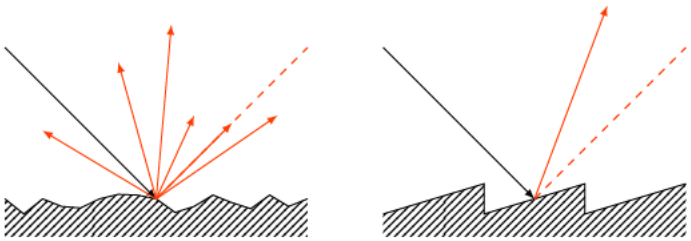

Abbildung 7: Schallstreuung einer auftreffenden ebenen Welle an zwei unterschiedlichen Hindernissen

Abb. 6 zeigt das prinzipielle Verhalten eines streuenden Hindernisses nach einer einfallenden ebenen Welle. $P_{R,G}$ wird dabei durch eine spekular reflektierte Welle bestimmt, während $P_{R,S}$ alle weiteren, gestreuten Wellen umfasst. Diese Darstellung geht vereinfachend von einem aus ebenen Wellen zusammengesetzten Gesamtschallfeld aus, welches nur in einiger Entfernung von dem Hindernis angenommen werden kann.

Der Streugrad s, welcher als Koeffizient in der Raumakustik Anwendung findet, beschreibt das Verhältnis von gestreuter reflektierter Leistung zur gesamten reflektierten Leistung und lautet in Anlehnung an Kuttruff (2009, S.289) somit:

$$s = \frac{P_{R,S}}{P_R} = 1 - \frac{P_{R,G}}{P_R} \tag{2.2.2}$$

Entsprechend dem Wertebereich des Absorptionsgrades nimmt auch der Streugrad Werte zwischen 0 und 1 an, da die gestreute reflektierte Leistung nie größer als die gesamte reflektierte Leistung sein kann. Ein Streugrad mit dem Wert 0 würde den Fall einer rein spekularen Reflexion, wie in Abb. 4 dargestellt, bedeuten. Nimmt der Streugrad den Wert 1 an, so wird die gesamte reflektierte Leistung weg von der spekularen Richtung gestreut, es findet folglich keine Reflexion in die spekulare Richtung mehr statt.

Der Streugrad beschreibt das Verhältnis von Schallleistungen und gibt keine Auskunft über die Richtung des gestreuten Schalls. Ein hoher Streugrad wird beispielsweise sowohl für ein Hindernis mit zufälliger Rauheit, das den Schall in alle Richtungen streut, als auch für ein Hindernis mit schrägen Teilflächen, welches die einfallende Welle nur umleitet, erreicht (siehe Abb. 7).

Ein Zusammenhang zwischen Absorptionsgrad und Streugrad ergibt sich über die Aufteilung des Absorptionsgrades in spekulare und streubezogene Absorption. Mit dem spekularen Absorptionsgrad α_G, welcher sich gemäß 2.1.5 nur auf die Absorption von Wellen in die spekulare Richtung bezieht, lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$s = 1 - \frac{1 - \alpha_G}{1 - \alpha} = \frac{\alpha_G - \alpha}{1 - \alpha} \tag{2.2.3}$$

Hierbei stellt α den Absorptionsgrad für diffusen Schalleinfall dar, welcher sich auf die gesamte absorbierte Leistung bezieht und je nach Messverfahren anders definiert wird. Aus 2.2.3 lassen sich einige wesentliche Merkmale des Streugrades ablesen. So ist ersichtlich, dass der Streugrad einen großen Wert annimmt, wenn der spekulare Absorptionsgrad groß ist und damit die spekular reflektierte Leistung gering ausfällt. Im Fall $\alpha_G = \alpha$ nimmt der Streugrad den Wert 0 an, was sich mit der Leistungsbetrachtung $P_{R,G} = P_R$ deckt. Hier existiert folglich keine von der spekularen Richtung weg gestreute Leistung.

Die Messung des Streugrades kann mit Verfahren, welche ein diffuses Schallfeld voraussetzen, sowie mit Freifeldverfahren durchgeführt werden. Unter der Annahme des diffusen Schallfeldes sind dazu entsprechend dem Verfahren für den Absorptionsgrad, Messungen der Nachhallzeit im Hallraum durchzuführen. Die Norm 17497-1 der ISO (2004) beschreibt das Messverfahren des Streugrades für diffusen Schalleinfall. Der Streugrad wird für Terzbänder mit den Mittenfrequenzen in einem Bereich von $100Hz$-$5.000Hz$ nach ISO 266 ermittelt.

Im Hallraum wird die Probe auf einen Drehteller gelegt, welcher sich während zwei der vier Messdurchläufe entweder mit konstanter Geschwindigkeit oder schrittweise dreht. Das Messverfahren besteht nun darin, Impulsantworten an mehreren Rotationspositionen der Probe zu messen und diese im Zeitbereich arithmetisch zu mitteln. Durch die Mittelwertbildung einer großen Anzahl von Impulsantworten bleiben kohärente Signalanteile der Impulsantworten bestehen, während sich inkohärente Anteile auslöschen. Somit lässt sich der spekulare Anteil, welcher als kohärenter Signalteil übrig bleibt, von dem gestreuten Anteil trennen.

In der Norm ist für die Probe ein runder Ausschnitt des betrachteten Aufbaus mit einem Durchmesser von mindestens 3m oder ein rechteckiger Ausschnitt mit einer Kantenlänge von mindestens 2,65m vorgesehen. Diese kann mit einem Maßstab $1 : N$ skaliert werden, wobei dieser Maßstab auch auf die Wellenlänge des Schalls angewendet werden muss. Eine Skalierung der Probe oder des gesamten Messaufbaus führt somit auch zu einer Skalierung der Messwerte.

Es werden vier Messdurchläufe durchgeführt:

- Messung der Nachhallzeit T_1 mit starrem, leeren Drehteller
- Messung der Nachhallzeit T_2 mit starrem Drehteller und aufgelegter Probe
- Messung der Nachhallzeit T_3 mit rotierendem, leeren Drehteller
- Messung der Nachhallzeit T_4 mit rotierendem Drehteller und aufgelegter Probe

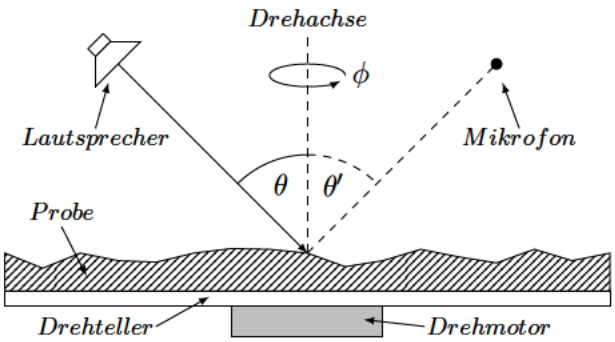

Abbildung 8: Messaufbau für die Bestimmung des Streugrades im Freifeld

Die Berechnung von α_G und α ergibt sich aus den Nachhallzeiten entsprechend 2.1.12 nun wie folgt, woraufhin sich der Streugrad s_{ISO} nach 2.2.3 ergibt:

$$\begin{aligned} \alpha_G &= 55,3\frac{V}{S}(\frac{1}{cT_3} - \frac{1}{cT_4}) \\ \alpha &= 55,3\frac{V}{S}(\frac{1}{cT_2} - \frac{1}{cT_1}) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Der Ansatz einer Isolierung spekularer Anteile mithilfe der beschriebenen Mittelwertbildung kann nach Vorländer und Mommertz (2000) auch im Freifeld verfolgt werden. Dazu wird ein Lautsprecher für einen definierten Einfallswinkel θ auf den Mittelpunkt des mit der Probe versehenen Drehtellers gerichtet und ein Mikrofon in der spekularen Richtung platziert (siehe Abb. 8). Beide Anordnungen sollten in möglichst großem Abstand zur Probe gewählt werden.

Von Vorländer und Mommertz (2000) werden Einfallswinkel von $\theta = 30°$, $45°$, $60°$ und $75°$ vorgeschlagen. Für jeden Einfallswinkel erhält man nach der Mittelwertbildung über alle gemessenen Impulsantworten an mehreren Rotationspositionen des Drehtellers nun eine Impulsantwort für die spekulare Reflexion, aus welcher der komplexe Reflexionsfaktor und damit der spekulare Absorptionsgrad $\alpha_G(\theta)$ hervorgehen. Der allgemeine Absorptionsgrad, welcher nun für die Bestimmung des Streugrades $s_F(\theta)$ nach 2.2.3 benötigt wird, kann entweder im Hallraum gemessen, oder nach folgender einfacher Näherung abgeschätzt werden:

$$\alpha(\theta) \approx 1 - \frac{1}{n}\sum_m |r_m(\theta)|^2 \tag{2.2.5}$$

Dabei bezeichnet n die Anzahl der während der Drehung der Probe gemessenen Impulsantworten und m den Index der einzelnen Impulsantworten. Mit der Paris'schen Formel in 2.1.9 kann ein Streugrad für diffusen Schalleinfall $s_{F,\overline{\theta}}$ bestimmt werden. Als Subskript wurde hier F in Anlehnung an das Freifeld gewählt. Von Sakuma und Kosaka (2004) wird das beschriebene Freifeld-Verfahren durch die Platzierung von zusätzlichen Mikrofonen, die Reflexionen außerhalb der spekularen Richtung aufzeichnen, erweitert.

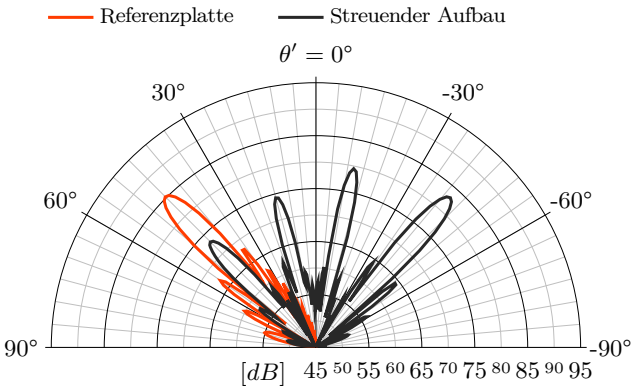

Abbildung 9: Streucharakteristik einer runden Referenzplatte und eines streuenden Aufbaus nach einer schräg einfallenden Welle mit $f = 2.500Hz$

Eine Bestimmung des Streugrades anhand von Streucharakteristiken im Freifeld wird von Mommertz (2000a) vorgeschlagen. Dabei werden Impulsantworten an mehreren diskreten Positionen m, welche mit konstantem Radius zum Probenmittelpunkt und konstantem Winkel zueinander in einer Hemisphäre vor der Probe angebracht werden, nach Anregung mit einem Lautsprecher gemessen. Der Lautsprecher, welcher für unterschiedliche Einfallswinkel θ positioniert wird, sollte hierbei möglichst weit von der Probe entfernt sein.

Mithilfe des beschriebenen Messaufbaus werden die Direktschallanteile der Impulsantworten entfernt und somit zwei- oder dreidimensionale Streucharakteristiken in Form von Schalldruckverteilungen für jeden Einfallswinkel θ gebildet, die in Polardiagrammen darstellbar sind. Abb. 9 stellt dies anhand eines Beispiels dar. Die Messung wird zunächst für eine glatte, ebene Referenzplatte mit denselben flächenbezogenen Abmessungen wie die der Probe durchgeführt, wodurch man die Streucharakteristik p_0 erhält. Nachdem in einem zweiten Durchlauf die Streucharakteristik der Probe p_P bestimmt wurde, kann ein Zusammenhang der beiden Messungen mit dem spekularen Reflexionsfaktor r_G und dem gestreuten Schalldruck p_S hergestellt werden:

$$p_P(\theta, m) = r_G(\theta) p_0(\theta, m) + p_S(\theta, m) \tag{2.2.6}$$

Dabei bedeutet $r_G p_0$ den Anteil, welcher mit der Streucharakteristik von der Referenzplatte korreliert ist. Dieser wird nun als spekularer Anteil der Abstrahlung aufgefasst, der nicht mehr durch Kanteneffekte des Probenausschnitts bedingt ist. p_S bezeichnet den unkorrelierten Anteil.

Da in dieser Arbeit nur zeitharmonische Vorgänge betrachtet werden und Leistungsverhältnisse für die Bestimmung von Koeffizienten interessieren, lassen sich die Komponenten der reflektierten Leistung nach Mommertz (2000a) als Summe

der quadrierten Effektivwerte des Schalldrucks an den diskreten Positionen mit betrachteter Fläche S_P annehmen:

$$\begin{aligned} P_{R,G}(\theta) &\approx \frac{\sum_m |r_G(\theta) p_{0,eff}(\theta, m)|^2}{\rho c} S_P \\ P_R(\theta) &\approx \frac{\sum_m |p_{S,eff}(\theta, m)|^2}{\rho c} S_P \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

$P_{R,G}$ und P_R stellen die spekular reflektierte und gesamte reflektierte Leistung dar. Multipliziert man Gleichung 2.2.6 mit dem komplex konjugierten Schalldruck der Referenzplatte, so erhält man aufgrund der Vernachlässigung von Termen unkorrelierter Signale, hier $p_{S,eff} \cdot p^*_{0,eff}$, eine Näherung für den spekularen Reflexionsfaktor:

$$r_G(\theta) \approx \frac{\sum_m p_{P,eff}(\theta, m) p^*_{0,eff}(\theta, m)}{\sum_m |p_{0,eff}(\theta, m)|^2} \tag{2.2.8}$$

Und damit erhält man den Korrelationsstreugrad s_K für den Einfallswinkel θ:

$$s_K(\theta) = 1 - \frac{|\sum_m p_{P,eff}(\theta, m) p^*_{0,eff}(\theta, m)|^2}{\sum_m |p_{P,eff}(\theta, m)|^2 \sum_m |p_0(\theta, m)|^2} \tag{2.2.9}$$

Dieser kann mit der Paris'schen Formel in 2.1.9 zu einem Korrelationsstreugrad für diffusen Schalleinfall $s_{K,\bar{\theta}}$ umgerechnet werden. Der Korrelationsstreugrad wird hier nur in Abhängigkeit von dem Polarwinkel θ angegeben. Wenn der Azimuthwinkel ϕ als Abhängigkeit mit betrachtet wird, müssen die in 2.2.9 auftauchenden Schalldrücke auch über diesen summiert werden. Der Polarwinkel wird im Sinne der Paris'schen Formel für den diffusen Schalleinfall behandelt, für den Azimuthwinkel reicht hingegen eine arithmetische Mittelwertbildung aus.

2.3 Diffusitätsgrad

Während der Streugrad den Anteil gestreuter reflektierter Leistung ins Verhältnis zur gesamten reflektierten Leistung setzt, bildet der Diffusitätsgrad ein Maß für die räumliche Gleichmäßigkeit der Reflexionen. Er ist somit als Beurteilungsmaß hinsichtlich der Qualität eines Aufbaus bzgl. der Erzeugung einer hohen Diffusität der reflektierten Leistung aufzufassen und kann zum Beispiel eine nützliche Kenngröße in der Entwicklung von Diffusoren sein, um sogenannte Flatterechos in Räumen zu verhindern. Anhand Abb. 7 wurde im letzten Abschnitt beispielhaft erläutert, dass eine einfache Umlenkung von Reflexionen bereits hohe Werte des Streugrades bewirkt. Für diesen Fall ist allerdings von einer reflektierten Leistung mit geringer Diffusität und damit von einem geringen Diffusitätsgrad auszugehen, da die Leistung bevorzugt in eine spezifische Richtung reflektiert wird. Wenn hingegen in alle Richtungen eine gleich große Leistung reflektiert wird, nimmt der Diffusitätsgrad einen Wert von 1 an.

Ein Verfahren für die Messung des Diffusitätsgrades im Freifeld wird in der ISO 17497-2 vorgeschlagen. Hierbei wird die Streucharakteristik in Form der Schalldruckpegelverteilung L an n diskreten Messpunkten entsprechend dem Messaufbau für den Korrelationsstreugrad bestimmt. Die Messpunkte können im zweidimensionalen Raum als Bogen oder im dreidimensionalen Raum als Hemisphäre vor der Probe platziert werden. Der Diffusitätsgrad ergibt sich nach der ISO (2012) in Abhängigkeit von den Einfallswinkeln θ und ϕ wie folgt:

$$d(\theta, \phi) = \frac{(\sum_i^n 10^{\frac{L_i}{10}})^2 - \sum_i^n (10^{\frac{L_i}{10}})^2}{(n-1)\sum_i^n (10^{\frac{L_i}{10}})^2} \tag{2.3.1}$$

Aufgrund der Begrenztheit der Probenabmessungen finden im Bereich tiefer Frequenzen, deren Wellenlängen sich dem Probendurchmesser annähern, keine spekularen, sondern gestreute Reflexionen statt. Der Diffusitätsgrad nimmt daher hohe Werte an, die allerdings nicht mit den Eigenschaften der Probe an sich zu erklären sind, sondern alleine von den Abmessungen des Ausschnitts abhängen. Deshalb wird das beschriebene Messverfahren mit einer glatten, ebenen Referenzplatte mit den gleichen Abmessungen durchgeführt, um folgende Normierung aufstellen zu können:

$$d_n(\theta, \phi) = \frac{d_P(\theta, \phi) - d_0(\theta, \phi)}{1 - d_0(\theta, \phi)} \tag{2.3.2}$$

Hier stehen d_P, d_0 und d_n für den Diffusitätsgrad der Probe, der Referenzplatte und den normierten Diffusitätsgrad.

Die Norm schlägt Einfallswinkel für den Lautsprecher von $\theta = 0°, 30°, 60°$ und $\phi = 0°, 60°, 120°...300°$ vor. Der Diffusitätsgrad für diffusen Schalleinfall kann dann durch eine einfache Mittelwertbildung über alle Winkel gebildet werden.

2.4 Simulationen in der geometrischen Raumakustik

Für die Planung und Vorhersage der Hörsamkeit in Räumen, welche unter anderem durch raumakustische Parameter wie Nachhallzeit, Deutlichkeit oder Stärke geprägt wird, kommen vornehmlich statistische oder geometrische Ansätze für die Modellierung des Schallfeldes zum Einsatz. In 2.1.10 wurde bereits die sehr verbreitete Formel für die Nachhallzeit nach Sabine erläutert, die auf statistischen Betrachtungen beruht. Für Räume, in denen die Begrenzungsflächen durch einen hohen mittleren Absorptionsgrad gekennzeichnet sind, kommt außerdem häufig die Formel nach Eyring zum Einsatz, welche die äquivalente Absorptionsfläche A durch ein logarithmisches Verhältnis $-\ln(1-\alpha)S$ ausdrückt und sich ansonsten analog zur Formel von Sabine verhält.

In der geometrischen Raumakustik wird der Raum als Übertragungsglied zwischen Schallsender und -empfänger mit geometrischen Modellen beschrieben. Die Raumgeometrie wird in der Regel mithilfe von rechnerunterstützten Zeichnungsprogrammen in Form eines dreidimensionalen Innenraummodells eingegeben. Reflexionen an Hindernissen im Raum oder an den umgebenden Begrenzungsflächen werden durch geometrische Methoden beschrieben. In den Werken von Kuttruff (2009) und Cox und D'Antonio (2017) werden diese anschaulich dargestellt. Die Ansätze der geometrischen Raumakustik zur Beschreibung von Reflexionen stellen asymptotische bzw. hochfrequente Näherungen dar, welche immer von kleinen Wellenlängen im Verhältnis zu den Flächen im Modell ausgehen. Das Wellenverhalten des Schalls, welches die Beugung von Wellen um Hindernisse herum oder Resonanzen in Form von stehenden Wellen bedingt, kann daher im Rahmen der Modelle nicht abgebildet werden. Hieraus ergibt sich in jedem Modell das Problem, dass dessen Flächen nicht zu kleinteilig bzw. detailliert sein sollten, um Fehler im Bereich tiefer Frequenzen gering zu halten. Andererseits muss ein gewisser Grad an Detailliertheit gegeben sein, um das Verhalten im Bereich hoher Frequenzen realitätsnah abzubilden.

Die in diesem Kapitel erläuterten Kenngrößen in Form des Absorptionsgrades, Streugrades und Diffusitätsgrades finden entweder direkte Anwendung als Koeffizienten in den Modellen der geometrischen Raumakustik oder dienen der Planung bzw. Beschreibung von Absorbern, Diffusoren oder hybriden Wand- oder Deckenaufbauten. Im Modell der Spiegelschallquellen, welches häufig zur Abbildung der frühen Schallereignisse in Räumen dient, werden Reflexionen bis zu einer festgelegten Ordnung als an der betreffenden Fläche gespiegelte Sekundärschallquellen aufgefasst. Dabei wird die Leistung jeder Spiegelquelle um den Faktor $(1 - \alpha_m)$ der entsprechenden Fläche S_m reduziert. Der Streugrad und der Diffusitätsgrad finden in diesem Modell keine Anwendung, da alle Reflexionen als spekular beschrieben werden. Zumeist kommen neben dem Spiegelschallquellenmodell Ansätze der Strahlverfolgung zum Einsatz. Diese umfassen das Raytracing, das Conetracing und das Pyramidtracing. Das Raytracing stellt die in der Praxis am häufigsten verwendete Methode dar und wird im Folgenden behandelt. Hierzu sei auf die Erläuterungen von Cox und D'Antonio (2017, S.441 ff.) verwiesen.

Im Raytracing werden Strahlen bestehend aus Schallteilchen von der Quelle mit einer vorgegebenen Richtcharakteristik in alle Richtungen erzeugt und im Raum verfolgt, bis sie entweder auf einen Empfänger auftreffen oder einen definierten energetischen Grenzwert unterschreiten. Trifft ein Strahl auf ein Hindernis bzw. eine Raumbegrenzungsfläche, findet sowohl eine Reflexion in spekulare Richtung, als auch die Erzeugung neuer gestreuter Strahlen statt. Letztere ist von dem Streugrad der Begrenzungsfläche abhängig und wird alternativ auch als Umlenkung des spekularen Strahls realisiert. Sie entfällt im Fall eines Streugrades von

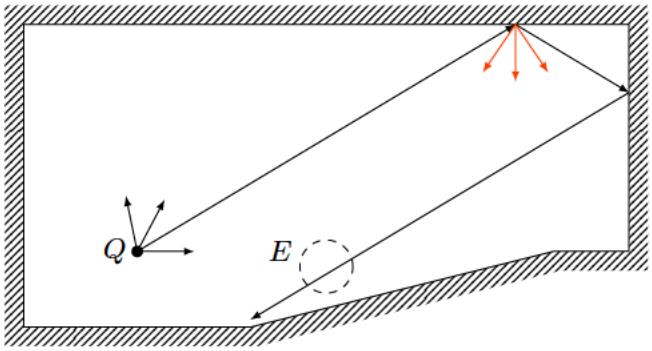

Abbildung 10: Darstellung des Raytracing in einer Schnittebene mit einer Schallquelle Q, einem Empfänger E und gestreuten Reflexionen (rot)

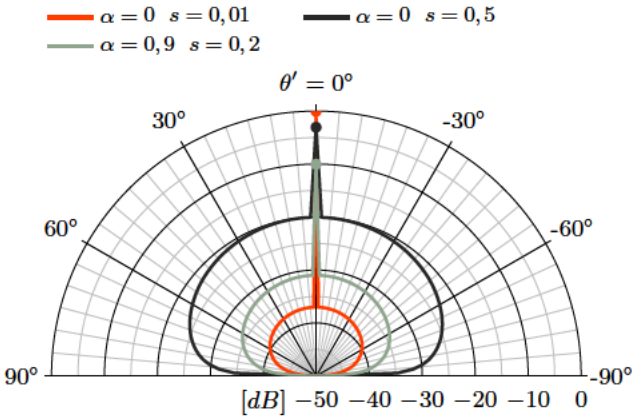

Abbildung 11: Polardiagramm der Reflexionen bei senkrechtem Schalleinfall nach dem Lambert'schen Gesetz für verschiedene Absorptions- und Streugrade

$s = 0$. Da der Streugrad keine Richtungsinformation enthält, wird die gestreute Leistung im Fall der Erzeugung neuer Strahlen zumeist in einer kosinusförmigen Verteilung angenommen. Diese wird auch als Lambert'sches Gesetz bezeichnet und führt bei Betrachtung des Schalldruckpegels zu einer nahezu kugelförmigen Streucharakteristik für Winkel bis etwa ±60°. In Abb. 11 sind entsprechende Polardiagramme für verschiedene Absorptions- und Streugrade dargestellt. Neben der Streuung der Strahlen nach dem Lambert'schen Gesetz kommt die Methode der Vektorstreuung zum Einsatz, bei der ein einzelner reflektierter Strahl mithilfe der Kombination des Vektors in spekulare Richtung und eines Streuvektors ausgerichtet wird. Der Streuvektor ergibt sich nach dem Lambert'schen Gesetz und wird durch den Streugrad gewichtet. Eine Übersicht zu dieser und weiteren Methoden zur Berücksichtigung des Streugrades findet sich bei Savioja und Svensson (2015).

Während der Diffusitätsgrad bislang keine direkte Rolle in den Berechnungsmodellen der geometrischen Raumakustik spielt, haben sowohl der Absorptions- als auch der Streugrad einen großen Einfluss auf die Simulation von raumakus-

tischen Parametern. Diverse Untersuchungen wie jene von Pelzer et al. (2011) und Cox et al. (2006) zeigen auf, dass die Berücksichtigung der korrekten bzw. näherungsweise dimensionierten Streugrade für Teilflächen des Modells eine deutlich präzisere Vorhersage von raumakustischen Parametern wie der Nachhallzeit oder der Deutlichkeit ermöglichen. Dem zuvor beschriebenen Problem, einen Kompromiss bezüglich der Detailliertheit des Modells finden zu müssen, kann durch die Einbeziehung des Streugrades entgegengewirkt werden.

3 Grundlagen und Entwicklung geeigneter Vorhersagemodelle

Im letzten Kapitel wurden Koeffizienten für Raumbegrenzungsflächen vorgestellt, welche die Aussagekraft von Simulationen im Rahmen der geometrischen Raumakustik beeinflussen (Absorptions- und Streugrad) oder als Kenngröße zur qualitativen Beurteilung von schallstreuenden Konstruktionen dienen (Diffusitätsgrad). Eine Vorhersage dieser Koeffizienten mit numerischen Methoden würde vor allem in der Planung von Räumen großen Nutzen bieten, da die zeit- und kostenaufwändige Entwicklung anhand physischer Prototypen und zahlreicher Messreihen entfallen bzw. in ihrem Aufwand begrenzt werden könnte. In diesem Kapitel sollen Ansätze hinsichtlich der Beschreibung des Schallfeldes für ein geeignetes Berechnungsverfahren erläutert werden, mit denen die genannten Koeffizienten zu ermitteln sind.

3.1 Beschreibung des Schallfeldes in einem homogenen Absorber

Die vorliegende Arbeit betrachtet sowohl reflektierende (schallharte) als auch absorbierende Bereiche von Raumbegrenzungsflächen. Im Folgenden wird eine Raumbegrenzungsfläche vereinfachend als Wandaufbau bezeichnet, sie könnte aber ebenso den Boden oder die Decke eines Raumes betreffen. Bei einer schallharten Fläche dringt kein Schall in das Material des Aufbaus ein, während eine absorbierende Schicht ein Eindringen des Schalls bedeutet. Die absorbierende Schicht wird im Folgenden als Absorber bezeichnet. Möser (2015, S.198 ff.) stellt zwei grundlegende Arten von Absorbern vor. Dieser kann aus porösem Material bestehen, welches eine Umwandlung der Schallleistung in dissipierte Leistung (Wärme) durch viskose Verluste bedeutet. Als entsprechende Materialien sind Werkstoffe bestehend aus Mineralfasern wie Stein- oder Glaswolle, Holzwolle oder offenzellige Schäume zu nennen. Ferner können Absorber auf dem Prinzip der Masse-Feder-Resonanz basieren, bei der entweder eine Flächenmasse (Plattenschwinger) oder in Kanälen eingeschlossene Luftmassen (Helmholtz-Resonator) Resonanzen in Abhängigkeit von der Federwirkung eines dahinter befindlichen Hohlraums hervorrufen.

Poröse Absorber können durch ihren längenbezogenen Strömungswiderstand beschrieben werden, wenn ihr innerer Aufbau als homogen aufzufassen ist. Die-

ser bezieht sich auf die Differenz zwischen dem Schalldruck p_1 vor und dem Schalldruck p_2 hinter der absorbierenden Schicht:

$$p_1 - p_2 = \Xi d U \tag{3.1.1}$$

Dabei bedeutet Ξ den längenbezogenen Strömungswiderstand, d die Dicke der absorbierenden Schicht und U die Geschwindigkeit der Gleichströmung durch den Absorber. Mit dem Strömungswiderstand ergibt sich, dass bei Betrachtung eines Volumenelements V_S die Reibungskraft $\Xi V_S \vec{v}$ der Bewegungsrichtung der Schallschnelle entgegenwirkt. Die Schallausbreitung im homogenen Absorber wird somit gedämpft bzw. behindert. Neben dem Strömungswiderstand gehen die Porosität des Materials σ, welche das Verhältnis des Luftvolumens im Absorber zu dem Gesamtvolumen des Absorbers beschreibt, und der Strukturfaktor κ, der eine Größe für die Schallumleitung über Umwege im Material darstellt, in die Modellbetrachtung des homogenen Absorbers ein. Die Schallausbreitung ist damit durch die komplexe Absorberwellenzahl k_A geprägt, die von der Wellenzahl in der Luft außerhalb des Absorbers k abhängt:

$$k_A = k\sqrt{\kappa}\sqrt{1 - j\frac{\Xi\sigma}{\omega\rho\kappa}} \tag{3.1.2}$$

Tritt eine ebene Welle von außen in den homogenen Absorber hinein, so bewirkt der Imaginärteil der komplexen Absorberwellenzahl $\Im\{k_A\}$ die Dämpfung dieser Welle innerhalb des Absorbers. Dies kann mit der vereinfachten Betrachtung der Wellenausbreitung in x-Richtung veranschaulicht werden. Für den Schalldruck einer entsprechenden ebenen Welle im Absorber gilt:

$$p = p_0 e^{\pm j\Re\{k_A\}x} e^{\pm\Im\{k_A\}x} \tag{3.1.3}$$

Die Dämpfung ist in dem Faktor $e^{\pm\Im\{k_A\}x}$ zu erkennen, welcher einen exponentiellen Abfall der Schalldruckamplitude beschreibt. Bei Betrachtung des Schalldruckpegels führt dies zu einem linearen Abfall in Richtung der Ausbreitung, so dass für den Fall der positiven x-Richtung gilt:

$$D(x) = -20 \cdot \log_{10} e^{-\Im\{k_A\}x} = 8,7 \cdot \Im\{k_A\}x \tag{3.1.4}$$

Letztere Feststellung ermöglicht eine anschauliche Vorstellung des Verhaltens des homogenen Absorbers. Treten Wellen in den Absorber ein, die als ebene Wellen angenommen werden können, so werden diese innerhalb des Absorbers in Ausbreitungsrichtung gedämpft bzw. behindert. Ein hierbei zu beachtendes Phänomen bei dem Eintreten der Wellen stellt die Brechung an der Absorberoberfläche dar, welche nach Lerch et al. (2009, S.64 ff.) nach dem Snellius'schen Prinzip vonstatten geht und in Abb. 12 dargestellt ist. Das Prinzip beschreibt, dass der Winkel θ_A der Ausbreitungsrichtung einer eintretenden ebenen Welle im Absorber

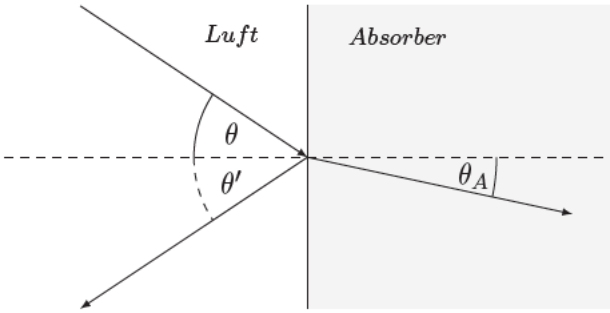

Abbildung 12: Brechung einer ebenen Welle nach dem Eintritt in einen homogenen Absorber

zur Senkrechten der Absorberoberfläche mit der Schallgeschwindigkeit der Luft vor dem Absorber und innerhalb des Absorbers wie folgt in Zusammenhang stehen:

$$\frac{\sin(\theta)}{c} = \frac{\sin(\theta_A)}{c_A} \tag{3.1.5}$$

Darin bezeichnet c_A die Schallgeschwindigkeit innerhalb des Absorbers. Diese ergibt sich nach Möser (2015) durch:

$$c_A = \frac{\omega}{\Re\{k_A\}} \tag{3.1.6}$$

Bezieht man das Snellius'sche Prinzip nun auf die Wellenzahlen in der Luft und innerhalb des Absorbers, ergibt sich:

$$k\sin(\theta) = \Re\{k_A\} sin(\theta_A) \tag{3.1.7}$$

Das Verhältnis von Druck zu Schnelle auf der Oberfläche eines Wandaufbaus oder einer Teilfläche des Aufbaus wird als Wandimpedanz bezeichnet. Diese ist nach Kuttruff (2009, S.35 ff.) von dem Einfallswinkel θ der einfallenden Welle abhängig. Sie bezieht sich auf die Schnelle in Richtung der Senkrechte auf der Oberfläche und lautet somit:

$$Z = \frac{p}{v_{\vec{n}}} \tag{3.1.8}$$

Die spezifische Wandimpedanz, welche die Wandimpedanz ins Verhältnis zur Schallkennimpedanz der Luft setzt, hängt mit dem Reflexionsfaktor wie folgt zusammen:

$$Z_S = \frac{Z}{Z_0} = \frac{Z}{\rho c} = \frac{1+r}{1-r} \tag{3.1.9}$$

Und entsprechend gilt:

$$r = \frac{Z_S - 1}{Z_S + 1} \tag{3.1.10}$$

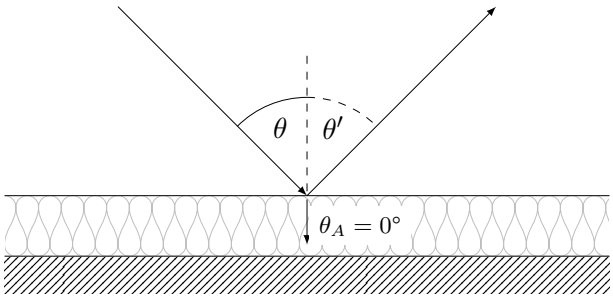

Abbildung 13: Aufbau eines Absorbers endlicher Dicke mit lokal reagierendem Verhalten

Dabei bezeichnet $Z_0 = \rho c$ die Schallkennimpedanz der Luft. ρ und c bezeichnen die Dichte und die Schallgeschwindigkeit im Medium. Die Admittanz Y der Oberfläche entspricht dem Kehrwert der spezifischen Wandimpedanz:

$$Y = \frac{1}{Z_S} \tag{3.1.11}$$

Im vorangegangen Kapitel wurde die Messung im Kundt'schen Rohr erläutert. Diese kann entsprechend der in 2.1.6 genannten Formulierung des Reflexionsfaktors auch für die Bestimmung der Wandimpedanz eines Materials eingesetzt werden. Dabei wird allerdings lediglich die Impedanz für den senkrechten Schalleinfall bestimmt.

Unter Berücksichtigung der komplexen Absorberwellenzahl k_A ergibt sich nach Möser (2015) für einen unendlich dicken, homogenen Absorber die folgende Wandimpedanz, welche auch als Kennimpedanz des homogenen Absorbers bezeichnet wird:

$$Z_\infty = \frac{\rho c}{\sigma} \frac{k_A}{k} \tag{3.1.12}$$

Für einen homogenen porösen Absorber mit endlicher Dicke d, der direkt an eine schallharte Wand angebracht wird, ergibt sich die Wandimpedanz in Abhängigkeit von der Kennimpedanz des Absorbers:

$$Z_E = -jZ_\infty \cot k_A d = -j \frac{\rho c}{\sigma} \frac{k_A}{k} \cot k_A d \tag{3.1.13}$$

Der Absorptionsgrad eines glatten Wandaufbaus für den senkrechten Schalleinfall kann über das in 3.1.9 genannte Verhältnis zwischen spezifischer Wandimpedanz und Reflexionsfaktor bestimmt werden:

$$\alpha = 1 - |r|^2 = \frac{Z_S - Z_0}{Z_S + Z_0} \tag{3.1.14}$$

Eine häufig anzutreffende Vereinfachung bei der Betrachung des porösen Absorbers stellt die Auffassung des lokal reagierenden Verhaltens dar. Hierbei liegt nach Möser (2015) die Annahme zugrunde, dass nach dem Eintreten einer Welle in den Absorber bzw. allgemein in den Wandaufbau nur noch Schallausbreitung

in der senkrechten Richtung zur Oberfläche stattfindet. Dies wird in Abb. 13 anhand eines Absorbers endlicher Dicke veranschaulicht. Im Fall eines lokal reagierenden Absorbers würde in y-Richtung keine laterale Wellenausbreitung stattfinden, so dass $\theta_A = 0$ gelten muss. Dieser Umstand kann im Sinne des Snellius'schen Prinzips in 3.1.5 mit der Annahme angenähert werden, dass die Schallgeschwindigkeit im Absorber c_A viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit in der Luft c sein muss:

$$c_A \ll c \tag{3.1.15}$$

Lokal reagierende Wandaufbauten weisen eine von dem Einfallswinkel unabhängige Wandimpedanz auf, da innerhalb des Absorbers keine lateralen Wechselwirkungen mehr stattfinden. Somit wird für die Beschreibung des Aufbaus nur noch die Wandimpedanz für senkrechten Schalleinfall benötigt. Die hier beschriebenen Größen des Reflexionsfaktors und Absorptionsgrades können für lokal reagierende Aufbauten nun durch Hinzunahme des Faktors $\cos(\theta)$ bezüglich der Wandimpedanz errechnet werden. Für den Absorptionsgrad gilt folglich:

$$\alpha_L(\theta) = 1 - |r_L(\theta)|^2 = \frac{Z_S \cos(\theta) - Z_0}{Z_S \cos(\theta) + Z_0} \tag{3.1.16}$$

Die Berechnung des Absorptionsgrades für diffusen Schalleinfall kann für lokal reagierende Absorber nun mithilfe der Paris'schen Formel in 2.1.9 durchgeführt werden.

Neben der in 3.1.12 und 3.1.13 genannten Bestimmung der Wandimpedanz von porösen Absorbern kann das absorbierende Verhalten durch empirische Modelle wie jene von Delany und Bazley oder von Mechel und Grundmann beschrieben werden. Zur Erläuterung sei auf die Ausführungen von Cox und D'Antonio (2017, S.197 ff.) verwiesen. Diese stützen sich auf Untersuchungen der Eigenschaften poröser Schichten wie den Strömungswiderstand Ξ und die Porösität σ anhand von Messungen. Ferner stehen Modelle zur Verfügung, welche das Verhalten von faserigen porösen Schichten neben den bereits genannten Eigenschaften durch die Viskosität und Tortuosität ausdrücken. Ein entsprechendes Modell wird zum Beispiel von Allard und Champoux (1992) formuliert.

In dem Modell von Delany und Bazley (1970) ergibt sich die Kennimpedanz des porösen Absorbers zu:

$$Z_{\infty,D} = \rho c \left(1 + 0,0571 X^{-0,754} - j0,087 X^{-0,732}\right) \tag{3.1.17}$$

Dabei enthält X den Strömungswiderstand Ξ und die Frequenz f:

$$X = \frac{\rho f}{\Xi} \tag{3.1.18}$$

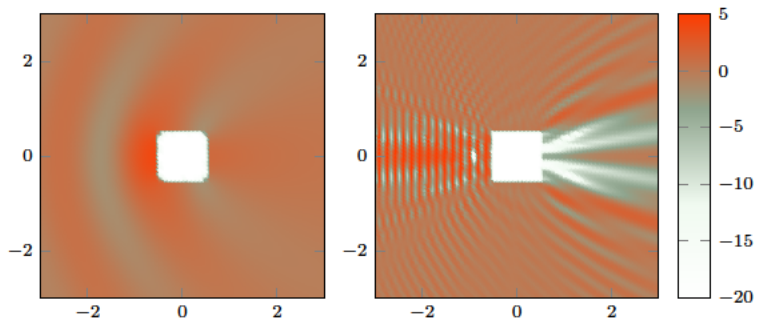

Abbildung 14: Schallfeld nach einer auftreffenden ebenen Welle auf einen Würfel mit einer Kantenlänge von $1m$ für zwei Frequenzen. Links: $f = 100Hz$, rechts: $f = 1.000Hz$

Die Absorberwellenzahl lautet dann:

$$k_{a,D} = \frac{\omega}{c}(1 + 0,0978X^{-0,7} - j0,189X^{-0,595}) \tag{3.1.19}$$

Da für X von den Autoren ein Wertebereich von $0,1 < X < 1$ festgelegt wird, ist das Modell nur für Strömungswiderstände im Bereich von $1.000 < \Xi < 50.000 \frac{Pa \cdot s}{m^2}$ gültig.

3.2 Beschreibung des Wellenverhaltens von Schall

Auf die Schwächen der Modelle im Rahmen der geometrischen Raumakustik wurde bereits im letzten Kapitel eingegangen. Bedingt durch die Annahme asymptotischen Verhaltens und den Näherungsansätzen wird das Wellenverhalten des Schalls nicht korrekt berücksichtigt. Dieses muss allerdings betrachtet werden, um Schallvorgänge in der Nähe eines Hindernisses oder vor Raumbegrenzungsflächen abzubilden, welche durch Beugung, Kantenreflexionen und weitere Wellenphänomene gekennzeichnet sind.

Die Beugung von Schallwellen ist in besonderem Maße abhängig von dem Verhältnis der Wellenlänge zu den Abmessungen des betrachteten Hindernis. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 14 das Schallfeld nach einer auftreffenden Welle auf ein Hindernis für zwei reine Töne mit unterschiedlicher Frequenz im dreidimensionalen Raum dargestellt. Erwartungsgemäß beugt sich jene Welle, deren Wellenlänge λ um einen Faktor von 3,44 größer als die Kantenlänge a des Würfels ist, um das Hindernis herum und es wird nur ein schwach ausgeprägtes reflektiertes Feld erzeugt. Im Gegensatz hierzu lässt sich im Fall von $\lambda = 0,34 \cdot a$ ein stark ausgeprägtes, reflektiertes Feld mit deutlich erkennbaren spekularen Anteilen ausmachen, welches sich mit asymptotischen Ansätzen im Sinne der geometrischen Raumakustik besser beschreiben ließe.

Das Wellenverhalten von Schall wird, wie von Möser (2015) beschrieben, durch die Wellengleichung beschrieben:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{3.2.1}$$

Auf der linken Seite der Gleichung kann der Term durch den Laplace-Operator ∇^2 ausgedrückt werden, welcher sich wiederum durch den zweifach angewendeten Gradienten ∇ ergibt. Nach einer Überführung des rechten Terms auf die linke Seite gilt dann:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{3.2.2}$$

Die Betrachtung von zeitharmonischen und eingeschwungenen Vorgängen führt zu der Annahme, dass sich der Schalldruck als Realteil eines örtlichen Schallfelds mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ beschreiben lässt, was häufig auch mit dem Begriff der Zeitkonvention bezeichnet wird:

$$p(t, \vec{r}) = \Re\{p(\vec{r})e^{j\omega t}\} \tag{3.2.3}$$

Nach Einsetzen der letzten Gleichung in die Wellengleichung erhält man die homogene Helmholtz-Gleichung, die das Wellenverhalten von zeitharmonischen Vorgängen überall im Schallfeld beschreibt und die in 2.1.4 bereits definierte Wellenzahl k für das Medium der Luft enthält:

$$\nabla^2 p(\vec{r}) - k^2 p(\vec{r}) = 0 \tag{3.2.4}$$

Bei einer Anregung des Schallfeldes durch einen Dirac-Impuls an der Stelle $\vec{r'}$ nimmt die rechte Seite der Helmholtz-Gleichung die Funktion $-\delta(\vec{r} - \vec{r'})$ an. Die partikuläre Lösung dieser Gleichung wird als Green'sche Funktion bezeichnet und führt zu der folgenden Formulierung, welche in Ahrens (2012, S.51 ff.) zu finden ist:

$$\nabla^2 G(\vec{r'}|\vec{r}) - k^2 G(\vec{r'}|\vec{r}) = -\delta(\vec{r'} - \vec{r}) \tag{3.2.5}$$

Im dreidimensionalen Raum nimmt die Green'sche Funktion die Form einer Punktschallquelle an (siehe Abb. 15) und lautet:

$$G(\vec{r'}|\vec{r}) = \frac{e^{-jk|\vec{r'}-\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r'} - \vec{r}|} \tag{3.2.6}$$

Die Green'sche Funktion stellt die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung dar und dient der Beschreibung des Schallfelds für die nachfolgend erläuterte REM im dreidimensionalen Raum. Der Ansatz kann dabei wie von Weinzierl (2008, S.665 ff.) durch das Huygens'sche Prinzip veranschaulicht werden, welches jede Wellenfront als Zusammensetzung von Elementarwellen beschreibt. In Abb. 16 ist das Prinzip für den zweidimensionalen Raum dargestellt: Die Reflexion

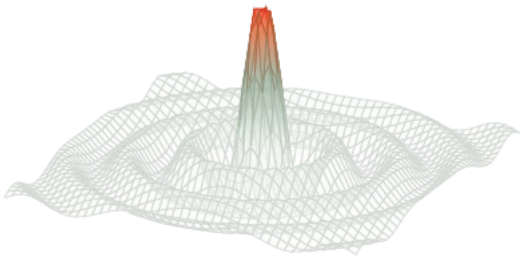

Abbildung 15: Darstellung der Green'schen Funktion im dreidimensionalen Raum (Realteil)

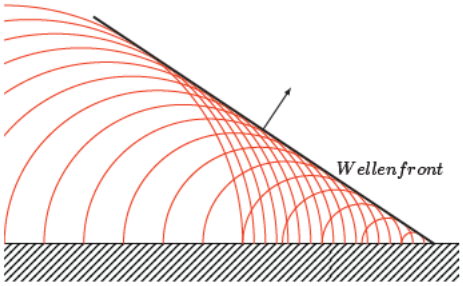

Abbildung 16: Zusammensetzung der Wellenfront aus Elementarwellen nach dem Huygens'schen Prinzip. Die Reflexion einer einfallenden ebene Welle auf eine ausgedehnte glatte Oberfläche lässt sich aus Elementarwellen (rot) zusammensetzen.

einer auftreffenden ebenen Welle an einem glatten Hindernis setzt sich aus unendlich vielen Kugelwellen zusammen, die zum Zeitpunkt des Auftreffens an der Oberfläche entstehen. Das Beispiel gibt anschauliche Hinweise darauf, wie sich das Schallfeld im Rahmen der REM prinzipiell beschreiben lässt.

3.3 Berechnung des Schallfeldes mit der REM

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst das Schallfeld im unbregrenzten Medium, in dem sich Schallquellen und Hindernisse befinden, betrachtet. Es handelt sich folglich um Anschauungen im Freifeld, bzw. um ein äußeres Problem, da das Schallfeld außerhalb von Hindernissen bzw. Objekten untersucht wird. Unter der Annahme, dass das Medium der Schallausbreitung als homogen anzusehen ist, lässt sich die Beschreibung des Schallfeldes auf gegebene Schallquellen und die Oberflächen eines geschlossenen Objektes reduzieren. Dazu werden allerdings Randbedingungen benötigt, die das Verhalten des Schallfeldes auf der Oberfläche des Hindernisses angeben. In der sogenannten direkten REM wird nun eine Integralformulierung für das Schallfeld aufgestellt, welche auch als Kirchhoff-Helmholtz-Integralgleichung (KHI) bezeichnet wird und den Druck p und die Schallschnelle $v_{\vec{n}}$ einbeziehen.

$$C(\vec{r}) \cdot p(\vec{r}) = \int_S \left(p(\vec{r_S}) \frac{\partial G(\vec{r_S}|\vec{r})}{\partial \vec{n}} - j\rho c k v_{\vec{n}}(\vec{r_S}) G(\vec{r_S}|\vec{r}) \right) dS \tag{3.3.1}$$

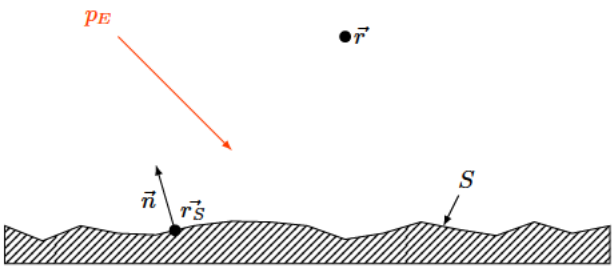

Abbildung 17: Geometrie eines Hindernisses im unbegrenzten Medium in der REM

Ausführungen zur KHI lassen sich in den Werken von Schroeder et al. (2007, S.87 ff.), Lerch et al. (2009, S.19 ff.) und Marburg und Nolte (2008) finden. In Abb. 17 ist die zugrunde liegende Geometrie dieser Gleichung dargestellt. Die Schnelle $v_{\vec{n}}$ ist dabei auf die Richtung des Normalenvektors auf der Oberfläche S bezogen. $C(\vec{r})$ stellt eine Gewichtungsfunktion dar und nimmt je nach Position des Aufpunkts $\vec{r}$ einen konstanten Wert an. Sie entspricht dem Wert 1, falls der Aufpunkt im Freifeld verortet ist, dem Wert 0,5, falls der Aufpunkt auf der Oberfläche liegt, oder dem Wert 0, wenn der Aufpunkt innerhalb des Objekts liegt.

Der linke Summand des Integrals, welcher den Schalldruck p und die Normalenableitung der Green'schen funktion $\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}$ enthält, wird auch als Verteilung von Dipolquellen bezeichnet. Der andere Summand enthält die Schallschnelle, die mit der Normalenableitung des Schalldrucks $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}$ in Zusammenhang steht, sowie die Green'sche Funktion und wird entsprechend als Verteilung von Monopolquellen aufgefasst. Dies erinnert an die Zusammensetzung von Wellenfronten nach dem Huygens'schen Prinzip, welches in Abb. 16 veranschaulicht ist. Die genannten Verteilungen werden in der Literatur, so z.B. von Sauter und Schwab (2004), auch als Einfachschichtpotential (Monopolquellen) und Doppelschichtpotential (Dipolquellen) bezeichnet.

Randbedingungen müssen sowohl für die Oberfläche des Objekts als auch für den unbegrenzten Raum festgelegt werden. Ahrens (2012) gibt einen Überblick über die relevanten Randbedingungen für die KHI. Im unbegrenzten Raum wird hierbei die Sommerfeld-Randbedingung angenommen, die an der Grenze des Raums zum Unendlichen nur auslaufende und keine einlaufende Wellen zulässt. Für die Oberfläche des Hindernisses lassen sich entweder Dirichlet-Randbedingungen, welche gegebene Funktionswerte wie beispielsweise den Schalldruck enthalten, oder Neumann-Randbedingungen, die Ableitungswerte wie beispielsweise die Normalenableitung des Schalldrucks bezeichnen, oder eine Kombination aus diesen angeben.

Mithilfe der KHI in 3.3.1 kann der Schalldruck sowohl auf der Oberfläche des Hindernisses im Fall $\vec{r} \in S$, als auch an jedem Punkt im Freifeld außerhalb des

Hindernisses berechnet werden. Mit einer gegebenen Schallquelle, welche zum Beispiel eine sich ausbreitende ebene Welle hervorruft, kann der auf die Oberfläche auftreffende Schalldruck als Randbedingung für das Problem formuliert werden, wodurch man die Schalldruckverteilung auf der Oberfläche des Hindernisses durch 3.3.1 erhält. Im nächsten Schritt ergibt sich wiederum aus 3.3.1 dann das Schallfeld an jedem beliebigen Punkt im Freifeld. Dieses Verfahren wird nach Sauter und Schwab (2004) im Fall der äußeren Betrachtung auch als Streuproblem bezeichnet und resultiert aus der Aufteilung des gesamten Schallfelds in die Anteile des einfallenden Schallfelds und des gestreuten Schallfelds.

Eine kompaktere Formulierung für 3.3.1 lässt sich durch die Schreibweise mit linearen Operatoren aufstellen. Für den Fall, dass ein Punkt $\vec{r} \in S$ auf der Oberfläche betrachtet wird, ist $C = \frac{1}{2}$. Die Gleichung kann aus Integraloperatoren M und D für die Green'sche Funktion bzw. deren Ableitung und einem Identitätsoperator I zusammengesetzt werden. Mit dem einfallenden Schalldruck p_E und dem gestreuten Schalldruck p_S gilt für das Gesamtschallfeld $p = p_E + p_S$. Bringt man alle Terme der KHI auf die linke Seite und fügt den Schalldruck p_E als Anregung auf der rechten Seite hinzu, lässt sich die KHI für Punkte auf der Oberfläche S wie folgt schreiben:

$$(D + \frac{1}{2}I)p(\vec{r}) - Mj\rho ckv_{\vec{n}}(\vec{r}) = -p_E(\vec{r}) \tag{3.3.2}$$

Ein bekanntes Problem der Beschreibung des Schallfeldes durch die KHI sind unechte Resonanzen, welche aufgrund von Eigenfrequenzen innerhalb des Objekts entstehen und bei Betrachtung äußerer Probleme unphysikalisch sind, da sie nur durch die mathematische Formulierung entstehen. Zur Erläuterung sei auf Sauter und Schwab (2004, S.120 ff.) verwiesen. Solche Resonanzen können durch eine Kombination aus der oben genannten KHI und ihrer Ableitung über einen komplexwertigen Kopplungsparameter η umgangen werden. Als Kopplungsparameter wird von Marburg (2016) $\eta = \frac{j}{k}$ empfohlen. Dieser nach den Autoren Burton und Miller (1971) benannte Ansatz führt dann zu einer Gleichung, die neben den Integraloperatoren M und D die Operatoren ihrer Ableitungen M' und D' enthält. Auf der rechten Seite der Gleichung ist ebenfalls die Ableitung über den Kopplungsparameter hinzuzufügen:

$$(D + \frac{1}{2}I)p(\vec{r}) - Mj\rho ckv_{\vec{n}}(\vec{r}) + \eta\left(D' + \frac{1}{2}I)p(\vec{r}) - M'j\rho ckv_{\vec{n}}(\vec{r})\right) = -p_E(\vec{r}) - \eta\frac{\partial p_E(\vec{r})}{\partial \vec{n}} \tag{3.3.3}$$

Um die beiden vorangegangenen Gleichungen im Rahmen einer numerischen Berechnung anwenden zu können, müssen sowohl die darin enthaltenen Operatoren und Funktionen sowie die Geometrie des Hindernisses diskretisiert werden. Die Geometrie wird dabei in viele Randelemente unterteilt, die im Allgemeinen kleiner als die betrachtete Wellenlänge sein sollten. In diskreter Form lässt sich die KHI in die Matrizenform des Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ überführen, in der die Matrix A durch die Summe der diskreten Operatoren, welche selbst Matrizen darstellen,

zusammengesetzt wird. Der Vektor $\vec{b}$ enthält bekannte Werte, während der Vektor $\vec{x}$ die zu berechnenden Unbekannten bezeichnet. Diese lautet für den Fall der Gleichung in 3.3.2 (die diskreten Operatoren werden mit Subskript D notiert):

$$A \begin{bmatrix} \vec{p} \\ j\rho ck\vec{v}_{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_D + \frac{1}{2}I_D & -M_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ j\rho ck\vec{v}_{\vec{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

Wenn die Oberfläche des betrachteten Objekts als lokal reagierend im Sinne der auf S.22 genannten Bedingungen aufzufassen ist, kann die Schallschnelle $\vec{v}_{\vec{n}}$ durch die in 3.1.11 genannte Admittanz und den Schalldruck $\vec{p}$ ausgedrückt werden. Dies ergibt sich aus der Unabhängigkeit der spezifischen Wandimpedanz von dem Einfallswinkel der einfallenden Welle und den daraufhin einfallenden Wellen aufgrund von Reflexionen an dem Objekt. Für die Schallschnelle gilt dann:

$$j\rho ck\vec{v}_{\vec{n}} = jkY_D\vec{p} \tag{3.3.5}$$

Hierbei stellt Y_D eine Diagonalmatrix mit den Werten der Admittanz auf der diskreten Oberfläche des Objekts dar. Somit lässt sich das in 3.3.4 aufgestellte Gleichungssystem in Abhängigkeit des Schalldrucks $\vec{p}$ wie folgt schreiben:

$$A\vec{p} = \left(D_D + \frac{1}{2}I_D - jkM_DY_D\right)\vec{p} = \vec{b} \tag{3.3.6}$$

In den durch diskrete Operatoren zusammengesetzten Gleichungsystemen wird die KHI in 3.3.2 abgebildet. Eine analoge Vorgehensweise kann für die Burton-Miller-Formulierung in 3.3.3 verfolgt werden. Das aufgestellte Gleichungssystem wird daraufhin numerisch gelöst. Dabei kommen zumeist iterative Verfahren wie die Methode der Residuumsminimierung in Form des GMRES-Verfahrens zum Einsatz. Für weitere Erläuterungen zu dem Verfahren sei an dieser Stelle auf Meister und Vömel (2011) verwiesen.

3.4 Stand der Forschung zu Vorhersagen mithilfe der REM

Die REM gewinnt durch die technologische Entwicklung, welche immer leistungsstärkere Rechner hervorbringt, zunehmend an Bedeutung. Modelle für die Vorhersage der Absorptions- und Streuungseigenschaften von Aufbauten wurden neben Methoden der Fourier-Akustik und den Ansätzen von Kirchhoff und Fresnel auch mit der REM entwickelt.

Ein thematischer Schwerpunkt in der numerischen Berechnung der absorbierenden Eigenschaften eines Aufbaus stellt die Vorhersage der Einfügungsdämpfung von Schalldämpfern dar. Ji et al. (1994), Wu und Chen (2007) und Yang und Ji (2013) beschäftigten sich mit Untersuchungen unter Zuhilfenahme der REM, welche die

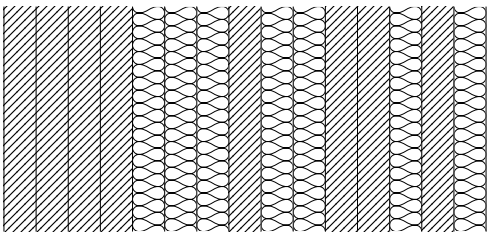

Abbildung 18: Darstellung des von Xiao et al. (2005) modellierten Aufbaus (2D-REM)

Belegung von Wandungen innerhalb von Schalldämpfern mit porösen Schichten oder Resonanzabsorbern in Form der Admittanz gemäß 3.3.5 modelliert.

Hirosawa et al. (2009) und Brandao et al. (2011) stellen in ihren Untersuchungen zu dem In-Situ-Messverfahren eine numerische Nachbildung des Messaufbaus mithilfe der REM vor, in dem die absorbierende Schicht ebenfalls durch die richtungsunabhängige Admittanz beschrieben wird. Untersuchungen des Schallfeldes vor absorbierenden Aufbauten werden dabei mit der REM durchgeführt, um u.a. Kenntnisse für die korrekte Messung des Absorptionsgrades zu gewinnen.

Mommertz (2000b) beschreibt die Berechnung des Korrelationsstreugrades mithilfe der REM entsprechend seines vorgeschlagenen Messverfahrens im Freifeld (siehe S. 14) und stützt sich dabei auf das Kirchhoff'sche Beugungsgesetz. Kosaka und Sakuma (2005) beschreiben den Einfluss des betrachteten Abstands zur Probe und der Winkelabstände des Streumusters auf die Vorhersage des Korrelationsstreugrades. Sakuma und Kosaka (2004) untersuchen die Unterschiede zwischen der Vorhersage des Korrelationsstreugrades und der Nachbildung des Messverfahrens nach Vorländer und Mommertz (2000) mithilfe der REM (siehe S. 12). Letztere Berechnungsmethode entspricht einer Mittelung über die Drehachse der Probe. Dabei stellen die Autoren fest, dass durch die Mittelung Ergebnisse erzielt werden, die näher an den Messergebnissen im Hallraum nach ISO 17497-1 liegen. Diese Schlussfolgerung wird allerdings durch den Vergleich von Vorhersage und Messung von nur einer Probe gezogen. Sakuma et al. (2009) kommen später nach Auswertung derselben Berechnungsergebnisse zu dem Ergebnis, dass die Vorhersage des Korrelationsstreugrades für die Nutzung in der geometrischen Raumakustik vorzuziehen sei.

Die vorgestellten Arbeiten, welche eine Vorhersage der Streuung und Diffusität behandeln, beziehen sich immer auf den Fall einer schallharten Probe. Xiao et al. (2005) berechnen das Streumuster für einen aus schallharten und absorbierenden Teilflächen bestehenden Aufbau mithilfe einer zweidimensionalen REM. Das betrachtete Modell des Aufbaus ist in Abb. 18 dargestellt. Es besteht aus schallharten und absorbierenden Streifen, wobei die Admittanz der absorbierenden Teilflächen durch das empirische Modell von Delany und Bazley (1970)

berechnet wird. Die Autoren stellen anhand von Polardiagrammen eine gute Übereinstimmung des berechneten und gemessenen Streumusters fest.

Hargreaves und Cox (2008) untersuchen die Vorhersage der Streuung eines Schröder-Diffusors mithilfe der REM im Zeitbereich. Der untersuchte Diffusor besteht aus einer Anordnung von Zellen, welche in der xy-Ebene die gleichen Abmessungen aufweisen, deren Tiefe in der z-Achse allerdings anhand einer Maximalfolge variiert wird. Der Ansatz der Autoren besteht in der Modellierung der Zellen durch ihre Oberflächenimpedanz in der Ebene der Vorderkante des Diffusors. So ergibt sich ein sehr einfaches Berechnungsmodell, welches aus koplanaren Teilflächen mit jeweils unterschiedlicher Admittanz zusammengesetzt ist. Die so berechneten Streumuster zeigen laut den Autoren eine gute Übereinstimmung mit verifizierten Berechnungsergebnissen anderer Modelle. Auch in dieser Arbeit wird die Annahme von lokal reagierenden Flächen getroffen.

4 Numerisches Vorhersagemodell mithilfe der REM

Dieses Kapitel behandelt die Vorhersage der Absorptions- und Streuungseigenschaften von Raumbegrenzungsflächen, welche durch die in Kapitel 2 beschriebenen Koeffizienten quantifiziert werden. Es gilt zunächst, ein dazu geeignetes Berechnungsmodell zu bilden, das die in Kapitel 3 aufgezeigten Ansätze zur Beschreibung des Schallfeldes vereint. Das Modell soll in der Lage sein, die Koeffizienten im Rahmen von numerischen Simulationen mithilfe der REM abzuleiten. Des Weiteren wird die Aussagekraft des numerischen Berechnungsmodells bezüglich der Schallstreuung einer Kugel, welche den Vergleich mit einer analytischen Lösung erlaubt, dargestellt.

4.1 Implementierung der REM in der Open Source Software *Bempp*

Die Open Source Software *Bempp* bietet eine Implementierung der beschriebenen Operatoren für die KHI und deren Ableitungen, eine Einbindung von dreidimensionalen Geometriedaten im Dateiformat der Open Source Software *Gmsh* sowie der benötigten Randbedingungen in Form von Funktionen auf der Geometrieoberfläche. Die leistungskritischen Implementierungen wurden von den Entwicklern Śmigaj et al. (2015) in der Programmiersprache C++ umgesetzt, welche über eine Schnittstelle in der Programmiersprache Python gesteuert werden. *Bempp* greift für die Matrix-Vektor-Operationen auf eine Komprimierung mithilfe von hierarchischen Matrizen zurück, wodurch Probleme mit deutlich höherer Elementeanzahl im Vergleich zu herkömmlichen Implementierungen gelöst werden können. Die Software ist als lauffähiger Container für die Virtualisierungssoftware *Docker* erhältlich und kann somit mit allen Betriebssystemen genutzt werden. Für die Lösung linearer Gleichungsysteme ist *Bempp* mit einer Implementierung des GMRES-Verfahrens ausgestattet.

In der Software sind die in 3.3.2 und 3.3.3 genannten diskreten Operatoren, welche zur Erzeugung der Matrix A dienen, bereits vollständig implementiert. Für die Erzeugung des Vektors $\vec{b}$ stehen in *Bempp* sogenannte $GridFunction$-Objekte zur Verfügung, die den diskreten Elementen des geometrischen Modells Funktionswerte zuweisen. Nach dem Lösen des Gleichungssystems nimmt der Vektor $\vec{x}$ ebenfalls die Form eines $GridFunction$-Objekts an und stellt die Grundlage für die Bestimmung des Schallfeldes im (ggf. unendlichen) Raum dar.

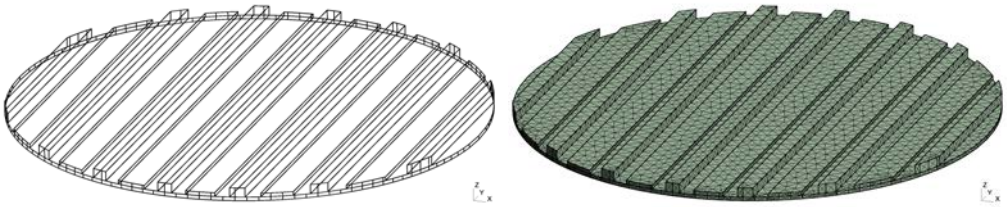

Abbildung 19: Ansichten von Geometriedaten in *Gmsh*. Links: Eingabedaten in Form von Linienkoordinaten, Rechts: Dreiecksnetz nach der Erzeugung durch *Gmsh*.

Die Geometriedaten für die Nutzung in *Bempp* sind in Form eines diskretisierten Dreiecksnetzes der Oberfläche eines Objekts in der Software *Gmsh*, welche von Geuzaine, C.and Remacle (2009) als Open Source Projekt entwickelt wurde, zu erzeugen. *Gmsh* ist bereits in dem *Docker*-Container enthalten und kann über die Kommandozeile gesteuert werden. Die Eingabedaten in Form von Linienkoordinaten können entweder geometrisch generiert oder in rechnerunterstützten Zeichnungsprogrammen erstellt werden. Für die Berechnung des Dreiecksnetzes können die minimal und maximal zulässigen Kantenlängen der Dreiecke festgelegt werden. In Abb. 19 sind entsprechende Geometriedaten in *Gmsh* exemplarisch dargestellt.

Für das Dreiecksnetz ist die maximal zulässige Kantenlänge der Dreiecke l_D festzulegen, welche im Allgemeinen kleiner als die betrachtete Wellenlänge sein soll. Sie steht offensichtlich in direktem Zusammenhang mit der Anzahl der Elemente pro Wellenlänge. Abb. 20 stellt zwei entsprechende Dreiecksnetze dar. Da der Rechenaufwand und die Speicherbelegung mit steigender Anzahl der Randelemente schnell zunehmen, ist hierfür eine untere Grenze zu wählen, die eine bestimmte Genauigkeit der Berechnungsergebnisse sicherstellt. Zumeist wird die Festlegung dieser Grenze in der Literatur nur als „Daumenregel“ aufgefasst und liegt im Bereich von 5 bis 10 Elementen pro Wellenlänge. Hierzu sei beispielhaft auf die Ausführungen von Chandler-Wilde et al. (2010) und Perrey-Debain et al. (2003) verwiesen. Marburg (2002) stellt für die auch hier verwendeten diskontinuierlichen Elemente fest, dass mit einer Auflösung von 6 Elementen pro Wellenlänge ein Fehler hinsichtlich des Schalldrucks von kleiner als $10 - 15\%$ erreicht wird. Dies entspricht einer Abweichung des Schalldruckpegels von etwa $0,8dB$ bis $1,2dB$. Die Anzahl der Elemente pro Wellenlänge, bzw. die entsprechende maximal zulässige Kantenlänge der Dreiecke wird in dem folgenden Kapitel ebenfalls als Variable untersucht.

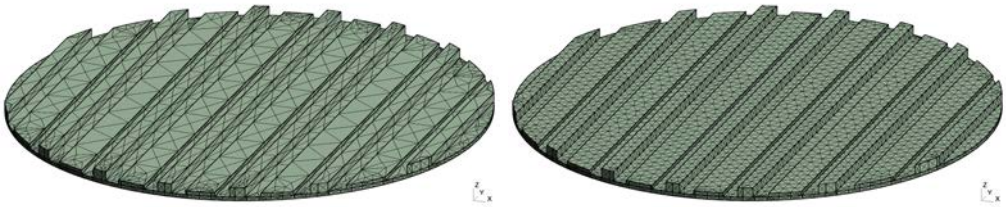

Abbildung 20: Darstellung von Dreiecksnetzen mit unterschiedlichen maximalen Kantenlängen l_D. Links: $l_D = 0,2m$, rechts: $l_D = 0,05m$.

Nach der Erzeugung der Geometriedaten werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nun die folgenden Schritte in *Bempp* durch ein Python-Skript aufgerufen:

- Festlegung der diskreten Operatoren für die Oberfläche der Geometrie (Dreiecksnetz)
- Zusammensetzung der Matrix A bestehend aus einer Kombination der diskreten Operatoren für die linke Seite des zu lösenden Gleichungssystems
- Festlegung von Randbedingungen für die rechte Seite des Gleichungssystems in Form des Vektors $\vec{b}$, welcher Funktionswerte auf den Elementen der Oberfläche enthält
- Lösen des Gleichungssystems mit dem GMRES-Verfahren, hierdurch erhält man den Vektor $\vec{x}$, welcher den Schalldruck auf den Elementen der Oberfläche beschreibt
- Berechnung des Schallfeldes im freien Raum durch die Anwendung von diskreten Operatoren entsprechend der KHI in 3.3.1 für Punkte außerhalb des Objekts
- Durch die Wahl geeigneter Punkte bzgl. der vorangegangen Berechnung können Polardiagramme und Plots der örtlichen Schalldruckverteilung des reflektierten, einfallenden oder des gesamten Schallfeldes hergestellt werden

4.2 Beschreibung des Berechnungsmodells

Ziel des Modells ist die Nachbildung eines Messaufbaus im Freifeld, welche im Rahmen der REM als Streuproblem bzw. äußeres Problem aufzufassen ist. Dabei wird das Reflexionsverhalten einer Probe im unendlichen Medium betrachtet, welches aufgrund einer gegebenen Schallquelle hervorgerufen wird. Die Schallquelle kann durch eine analytische Formulierung der Schallausbreitung idealer Schallwellen wie ebenen Wellen oder Kugelwellen beschrieben werden. Grundannahme ist wie in den Beschreibungen der vorangegangenen Kapitel ein homogenes Medium, das im vorliegenden Fall die Luft darstellt.

Die Probe besteht in Anlehnung an die Messaufbauten für den Streugrad im Hallraum nach der ISO (2004) und für den Diffusitätsgrad im Freifeld nach

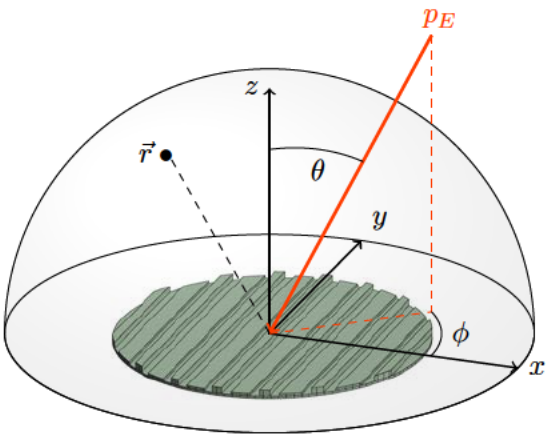

Abbildung 21: Modellbildung für die Berechnung des Reflexionsmusters einer Probe nach einer einfallenden ebenen Welle

der ISO (2012) aus einem runden Ausschnitt des interessierenden Wand- oder Deckenaufbaus. Um den Einfluss der räumlichen Begrenzung zu eliminieren und eine Aussage für große, ausgedehnte Belegungen mit einem entsprechenden Aufbau treffen zu können, wird das so bestimmte Reflexionsverhalten auf das Reflexionsverhalten einer Referenzprobe normiert. Dieser Ansatz findet sich ebenfalls in dem Messaufbau zur Bestimmung des Streugrades im Freifeld nach Mommertz (2000a) (siehe S. 13) und in der Messung des Diffusitätsgrades nach ISO (2012) wieder.

Kosaka und Sakuma (2005) zeigen anhand eines vergleichbaren Aufbaus, dass der Streugrad mithilfe der Korrelationsmethode in 2.2.9 durch die REM bestimmt werden kann. Sakuma und Lee (2014) bestätigen die Aussagekraft der so gewonnenen Berechnungsergebnisse, indem sie sie mit Messungen im Hallraum nach ISO (2004) vergleichen.

Als Durchmesser der Probe wird $d = 2m$ festgelegt. Dies entspricht zwar nicht den Vorgaben der beiden genannten Normen, welche einen Durchmesser von $3m$ vorsehen. Da die Berechnungen auf eine Referenzprobe normiert werden, muss die Regel $d \gtrapprox \lambda$ für die niedrigste betrachtete Frequenz hierbei allerdings nicht eingehalten werden.

Das resultierende Berechnungsmodell ist in Abb. 21 dargestellt. Die Probe wird zunächst als geschlossener, dreidimensionaler, sogenannter wasserdichter Körper mithilfe eines rechnerunterstützten Zeichnungsprogramms modelliert. Das resultierende Modell muss dabei den Anforderungen an die Eingabedaten der Software *Gmsh* genügen, welche das diskrete Dreiecksnetz der Körperoberfläche für die Verwendung in *Bempp* erzeugt.

$f_{M,1}$	$f_{M,2}$	$f_{M,3}$	$f_{M,4}$	$f_{M,5}$	$f_{M,6}$	$f_{M,7}$	$f_{M,8}$	$f_{M,9}$
100	125	160	200	250	315	400	500	630
$f_{M,10}$	$f_{M,11}$	$f_{M,12}$	$f_{M,13}$	$f_{M,14}$	$f_{M,15}$	$f_{M,16}$	$f_{M,17}$	$f_{M,18}$
800	1.000	1.250	1.600	2.000	2.500	3.150	4.000	5.000

Tabelle 4.1: Terzmittenfrequenzen $f_{M,i}$ in Hz nach ISO 266

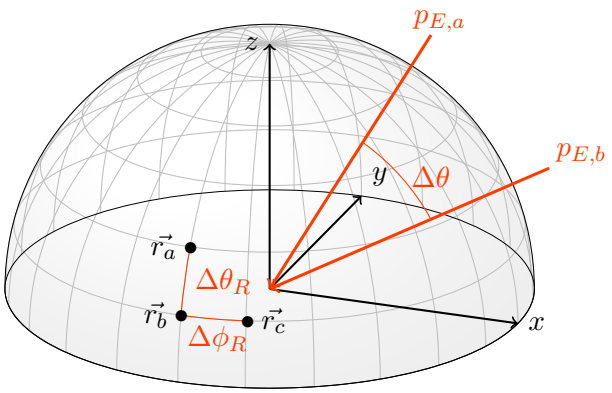

Abbildung 22: Gitter von Auswertungspunkten auf der Oberfläche einer Halbkugel mit den gleichmäßig verteilten Winkelabständen $\Delta\theta_R = \Delta\phi_R$ und Winkelabständen zwischen den Richtungen einfallender Wellen $\Delta\theta = \Delta\phi$

Als Schallquelle im unendlichen Medium wird eine verlustfreie ebene Welle p_E angenommen, die mit den definierten Einfallswinkeln θ und ϕ auf die Probe fällt. Das reflektierte Schallfeld wird daraufhin an diskreten, gleichverteilten Punkten $\vec{r}$ vor der Probe berechnet, um das Reflexionsmuster in Form der komplexen Schalldrücke an diesen Punkten zu erhalten. Abb. 22 zeigt das Gitter der Auswertungspunkte, welches sich durch die Winkelabstände hinsichtlich des Polar- und Azimuthwinkels der Punkte ausbildet. Der Radius der dargestellten Halbkugel $r_R = |\vec{r}|$ beschreibt hierbei die Distanz der betrachteten Punkte zum Mittelpunkt der Probenoberfläche. Nach Kosaka und Sakuma (2005) reicht bereits ein Radius, der größer als der Probendurchmesser ist, für die Bestimmung des Streugrades aus. Um das Reflexionsmuster näherungsweise im Fernfeld zu erhalten, wird dieser für das vorliegende Berechnungsmodell allerdings mit einem deutlich größerem Wert von $r_R = 50m$ festgelegt.

Die Auswahl der zu berechnenden Frequenzen orientiert sich an den in Kapitel 2 beschriebenen Normen zur Messung der Koeffizienten, welche sich auf die Terzbandeinteilung nach der Norm 266 der ISO (1997) stützen. Kosaka und Sakuma (2005) stellen anhand von Fehlerbetrachtungen bezüglich des Streugrades fest, dass eine Berechnung für einzelne Terzmittenfrequenzen ausreicht, anstatt eine Mittelwertbildung über mehrere Frequenzen innerhalb eines Terzbandes durchzuführen. Die zu berechnenden Terzmittenfrequenzen für die vorliegende Arbeit $f_{M,i}$ sind in Tabelle 4.1 dargestellt.

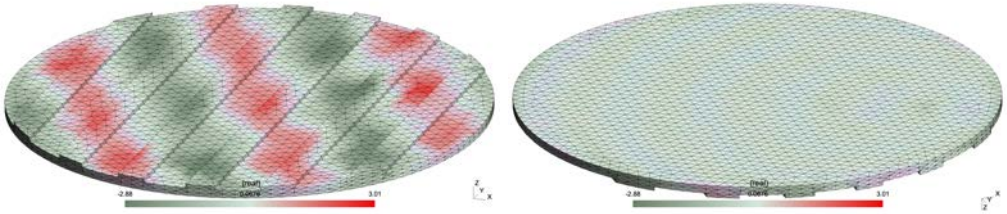

Abbildung 23: Schalldruckverteilung (Realteil) auf der Oberfläche einer Probe nach einer schräg einfallenden Welle. Links: Vorderseite, rechts: Rückseite.

Für jede Terzmittenfrequenz ist somit eine Berechnungsreihe durchzuführen, welche verschiedene Einfallswinkel θ und ϕ berücksichtigt, bzw. aus mehreren Einzelberechnungen für jeweils eine einfallende ebene Welle besteht. Mommertz (2000a) schlagen die Polarwinkel $\theta = 30°, 45°, 60°, 75°$ im Rahmen des Messaufbaus für den Streugrad im Freifeld vor, welcher eine sich drehende Probe untersucht (siehe S. 12). Für die Wahl der diskreten Azimuthwinkel ϕ der einfallenden ebenen Welle lassen sich somit aus den beschriebenen Messverfahren keine Vorgaben ableiten.

Da die Koeffizienten auch für den diffusen Schalleinfall vorhergesagt werden sollen, welcher für jeden Einfallswinkel dieselbe Wahrscheinlichkeit bedeutet, ist eine hohe Winkelauflösung für die hier beschriebenen Berechnungen vorzuziehen. Kosaka und Sakuma (2005) stellen in ihren Untersuchungen fest, dass eine zu geringe Auflösung zu der Vorhersage eines zu geringen Streugrades führt. Sie beziehen die Winkelauflösung dabei allerdings sowohl auf die Einfallswinkel als auch auf die Winkel zwischen den Auswertungspunkten $\vec{r}$. Der beobachtete Zusammenhang kann folglich nicht allein den Einfallswinkeln zugeordnet werden. Die Winkelauflösung ist daher als Variable sowohl hinsichtlich der einfallenden ebenen Welle, als auch bezüglich der Auswertungspunkte festzulegen. Entsprechende Untersuchungen finden sich in den Berechnungsergebnissen wieder, die in Kapitel 6 vorgestellt werden.

Wie in Abschnitt 4.1 erläutert wurde, besteht der erste Berechnungsschritt der Implementierung in dem Lösen des aufgestellten Gleichungssystems. Hierdurch werden die Werte des Schalldrucks und je nach Formulierung auch die Werte der Schallschnelle auf jedem einzelnen Element der Probenoberfläche bestimmt. Abb. 23 stellt dies beispielhaft in Form der Schalldruckpegelverteilung auf der Oberfläche einer Probe nach einer schräg einfallenden Welle dar.

Die REM bringt das Problem der unechten Resonanzen mit sich, welche im letzten Kapitel erläutert wurden. Abhilfe schafft die Implementierung der Burton-Miller-Formulierung in 3.3.3. Cox und D'Antonio (2017, S.291 ff.) weisen für den Fall eines vergleichbaren Modellaufbaus, bei dem das Reflexionsverhalten einer flachen Probe berechnet wird, auf die geringe Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser

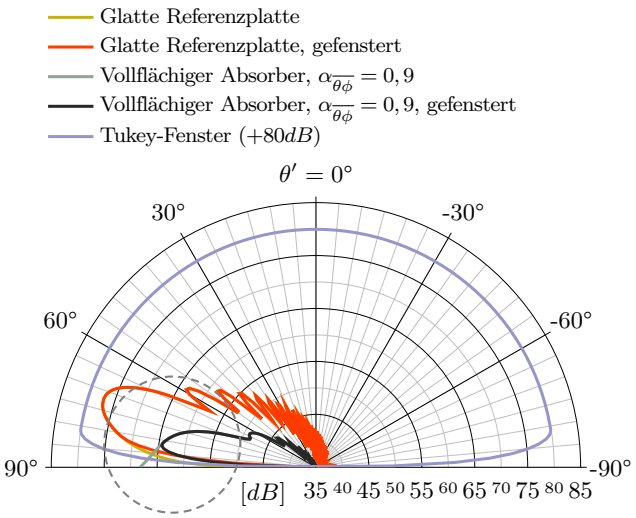

Abbildung 24: Auswirkung des verwendeten Tukey-Fensters auf ein Streumuster (grau gestrichelt markiert) mit $f = 2.500Hz$, $\theta = 75°$

Resonanzen hin. Die Autoren begründen dies damit, dass die Tiefe des Probenaufbaus vermutlich nicht viel größer als die betrachteten Wellenlängen ausfällt. Da in der vorliegenden Arbeit Frequenzen bis zu $5.000Hz$ betrachtet werden, ist diese Annahme allerdings in Frage zu stellen. Aufgrund der erhöhten Komplexität der Burton-Miller-Formulierung werden die Grenzen der Speicherauslastung durch die diskreten Operatoren in 3.3.3 schneller als mit der Implementierung der einfachen KHI erreicht. Daher wird auf die einfache Formulierung zurückgegriffen und anhand der Berechnungsergebnisse auf mögliche Resonanzen geschlossen.

Im nächsten Schritt führen die errechneten Werte für den Schalldruck auf der Probenoberfläche durch Einsetzen in die KHI nach 3.3.1 zu dem Reflexionsmuster in Form von Schalldrücken, welche für die einzelnen Auswertungspunkte gemäß Abb. 22 berechnet werden. Es handelt sich hierbei folglich nur um das reflektierte Schallfeld nach der einfallenden ebenen Welle, nicht um das Gesamtschallfeld.

Auf das berechnete Streumuster wird ein räumliches Fenster nach Tukey (1984) mit der Steilheit $a_{Tukey} = 0,1$ angewendet. Dieses bedämpft das Streumuster bei sehr steilen Winkeln, welche in Untersuchungen von Sakuma und Kosaka (2004), sowie Kosaka und Sakuma (2005) zu Ungenauigkeiten des vorhergesagten Streugrades führen. Des Weiteren reduziert das Fenster den Effekt des Impedanzsprungs zwischen Vorder- und Rückseite der Probe, wenn auf der Vorderseite eine starke Absorption stattfindet. Hierbei weist das Streumuster bei steilen Winkeln einen erhöhten Schalldruck auf, welcher in dem Streumuster der Referenzplatte nicht auftritt. In Abb. 24 und 25 ist die Auswirkung des Fensters auf diesen Effekt anhand von zwei Beispielen dargestellt.

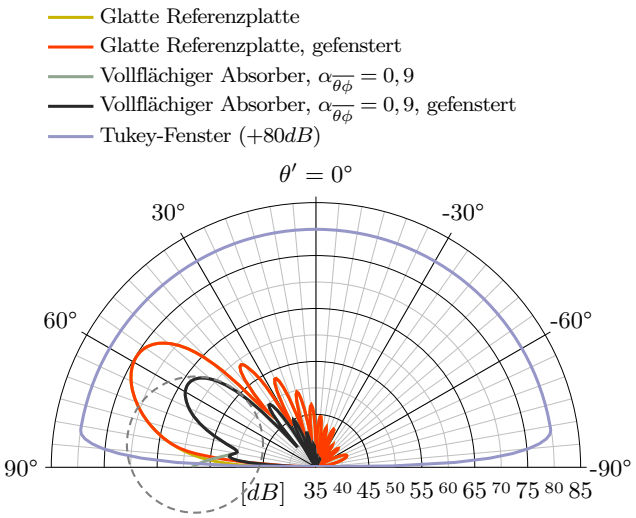

Abbildung 25: Auswirkung des verwendeten Tukey-Fensters auf ein Streumuster (grau gestrichelt markiert) mit $f = 1.000Hz$, $\theta = 60°$

Sämtliche hier beschriebenen Berechnungen sind sowohl für eine runde, glatte Referenzplatte mit einem Durchmesser von 2m als auch für die Probe durchzuführen. Abb. 28 stellt eine entsprechende Referenzplatte und eine beispielhafte Probe dar. Die Ergebnisse, welche in Form von komplexen Schalldrücken an den Auswertungspunkten $\vec{r}$ vorliegen, können daraufhin für die Ableitung der Koeffizienten genutzt werden.

4.3 Vergleich mit der Schallstreuung einer Kugel

Das zuvor beschriebene Berechnungsmodell soll nun für die Bestimmung der Schallstreuung einer Kugel nach einer einfallenden ebenen Welle genutzt werden, um die korrekte Abbildung des Schallfeldes durch den Vergleich mit der analytischen Lösung des Problems zu bestätigen. Dabei wird eine Kugel mit einem Durchmesser von 1m als Probe entsprechend der Darstellung in Abb. 21 eingesetzt. Die Einfallswinkel der ebenen Welle werden als $\theta = \phi = 0$ festgelegt, so dass sich die Welle in die negative z-Richtung ausbreitet. Der gestreute Schalldruck einer Kugel p_S ergibt sich für den Fall einer einfallenden ebenen Welle mit der Amplitude $p_{A,0} = 1$ nach Bowman et al. (1987, S.356 ff.) zu:

$$p_S = \sum_{n=0}^{N} j^n (2n+1) \frac{j_n'(kR)}{h_n'(kR)} P_n(\cos(\theta)) h_n(kr_R) \tag{4.3.1}$$

Dabei bedeuten j_n und h_n die sphärischen Bessel- und Hankel-Funktionen erster Art und j_n' und h_n' ihre Ableitungen. P_n bezeichnet die Legendre-Polynome mit dem Grad n. Die Symbole r_R und R geben den Abstand der Auswertungspunkte zum Kugelmittelpunkt und den Radius der Kugel an. N sollte idealerweise gegen

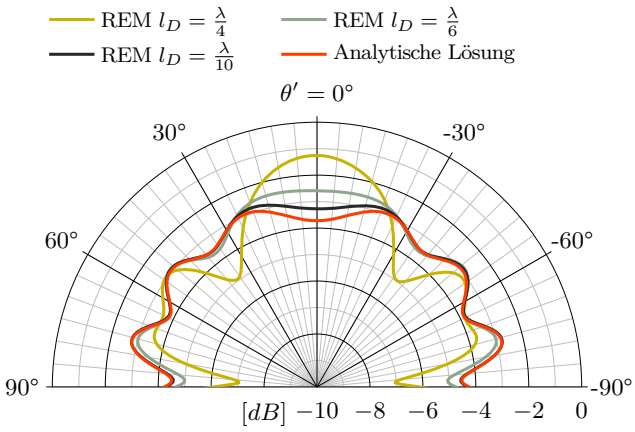

Abbildung 26: Polardiagramme der Schallstreuung einer Kugel für verschiedene Kantenlängen l_D, $f_M = 1.000Hz$

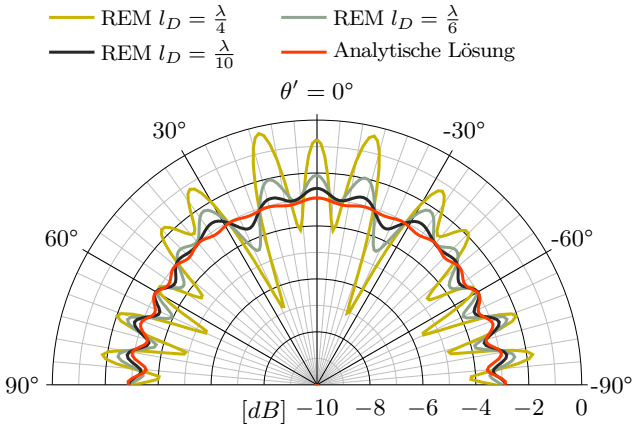

Abbildung 27: Polardiagramme der Schallstreuung einer Kugel für verschiedene Kantenlängen l_D, $f_M = 2.500Hz$

unendlich streben, aus praktischen Gründen wird hier für die Berechnung ein Wert von $N = 140$ festgelegt.

Die Berechnungen mithilfe der REM für die Schallstreuung einer Kugel ist für die festgelegten Terzmittenfrequenzen f_M durchzuführen. Dazu wird die Matrix der Admittanzen Y_D als Nullmatrix angenommen, wodurch der Einfluss des Einfachschichtpotentials M_D gemäß 3.3.6 entfällt.

In den Abbildungen 26 und 27 wird das Reflexionsmuster der Schallstreuung einer Kugel für die Frequenzen $1.000Hz$ und $2.500Hz$ dargestellt. Es ist offensichtlich, dass sich die Berechnungsergebnisse mit sinkender Kantenlänge l_D der analytischen Lösung annähern. Bei einer Kantenlänge von $l_D = \frac{\lambda}{6}$ ist anhand der Polarplots eine maximale Abweichung von etwa $1,5dB$ zu erkennen. Für den Fall der Kugel liegt diese damit etwas über den Fehlerwerten, welche sich in den Untersuchungen von Marburg (2002) ergeben (siehe S.32).

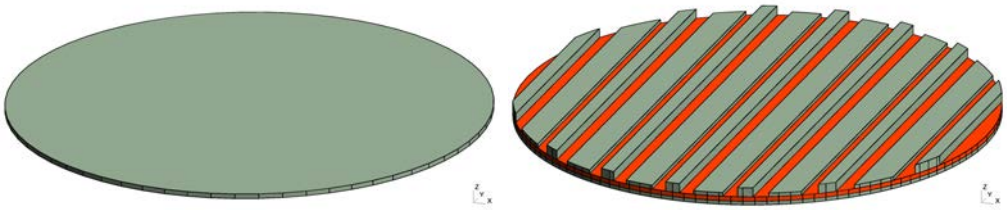

Abbildung 28: Ansicht einer glatten Referenzplatte (links) und einer Probe (rechts) bestehend aus Material 1 (oliv) und Material 2 (rot)

4.4 Berücksichtigung des absorbierenden Verhaltens von Teilflächen

Das Berechnungsmodell soll in der Lage sein, absorbierendes Verhalten von Teilflächen eines Gesamtaufbaus zu berücksichtigen. Dieses kann beispielsweise durch die Belegung mit einem porösen Absorber oder einem Resonanzabsorber gegeben sein. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierbei ausschließlich die Belegung mit porösen Absorbern berücksichtigt, da sich das Schallfeld innerhalb einer homogenen porösen Schicht einfacher beschreiben lässt (siehe Abschnitt 3.1).

Wenn Teilflächen der Probe absorbierend, bzw. nicht schallhart sind, ist dies in der diagonalen Matrix der Admittanzen Y_D zu berücksichtigen, sofern lokal reagierendes Verhalten vorausgesetzt werden kann. Abb. 28 stellt eine entsprechende Probe beispielhaft dar. Eine schallharte Fläche mit dem Index i weist einen Wert von $Y_{D,i,i} = 0$ auf, während eine absorbierende Fläche mit dem Index a den Kehrwert der spezifischen Wandimpedanz gemäß 3.3.5 an der Stelle $Y_{D,a,a}$ bedeutet. Für eine Probe, die nur aus schallharten Flächen besteht, ist Y_D eine Nullmatrix.

Es wird für die vorliegende Arbeit folglich eine Methode benötigt, welche die Admittanz einer absorbierenden Teilfläche entweder rechnerisch, bzw. anhand eines Modells oder anhand von Messwerten bestimmt. Im letzten Kapitel wurden Berechnungsmodelle für homogene poröse Absorber vorgestellt. Die Wandimpedanz Z_E für einen Absorber endlicher Dicke vor einer schallharten Wand ist nach 3.1.13 in Abhängigkeit von der Kennimpedanz des Absorbers Z_∞ gegeben. Für die Kennimpedanz wird die analytische, vereinfachte Formulierung nach Möser (2015) in 3.1.12 und die empirische Formulierung nach Delany und Bazley (1970) in 3.1.17 erläutert.

Messwerte von Materialien liegen herstellerseitig zumeist in Form des Absorptionsgrades vor, welcher nach der DIN EN ISO 354 im Hallraum gemessen wird (siehe S.8). Des Weiteren kann die Wandimpedanz eines Materials für den senkrechten Schalleinfall durch Messungen im Kundt'schen Rohr nach 2.1.6 ermittelt werden. Da für das Berechnungsmodell Admittanzwerte benötigt werden, ist eine Umrechnung der genannten Messwerte erstrebenswert. Dies wird für die

vorliegende Arbeit auch benötigt, um die Ergebnisse des Berechnungsmodells später mit Messwerten des Absorptionsgrades, welche im Hallraum ermittelt wurden, zu vergleichen.

Der Absorptionsgrad für diffusen Schalleinfall kann für lokal reagierende Absorber mithilfe der Paris'schen Formel errechnet werden, wenn die richtungsunabhängige Wandimpedanz bekannt ist. Zwischen diesen Ergebnissen und den Ergebnissen, welche im Hallraumverfahren ermittelt werden, treten allerdings erfahrungsgemäß große Abweichungen zutage. Cox und D'Antonio (2017, S.441 ff.) erörtern dafür mehrere Gründe. Zunächst gehen in die Messergebnisse des Hallraumverfahrens Fehler aufgrund der nicht idealen Diffusität des Schallfeldes ein. Hierdurch können bestimmte Einfallswinkel auf die Probe bevorzugt und die Absorption bei tiefen Frequenzen aufgrund von Raummoden überbewertet werden. Hinzu kommen Beugungseffekte an dem Ausschnittsrand der Probe, welche einen erhöhten Absorptionsgrad bedingen. Körperschallschwingungen in Montagevorrichtungen können außerdem die Messwerte im Hallraum verfälschen.

Eine Abschätzung der Admittanz bei vorliegenden Werten des Absorptionsgrades α_L soll nun auf Grundlage des Zusammenhangs in 3.1.16 erfolgen. Dazu wird angenommen, dass die Wellen für den diffusen Schalleinfall mit einem mittleren Winkel von $\overline{\theta} = 45°$ auf den Absorber fallen. Somit ergibt sich für den geschätzten mittleren Reflexionsfaktor:

$$\overline{r_L} = |r_L(45°)| \approx \sqrt{1 - \alpha_L} \tag{4.4.1}$$

Dieser ist nur noch reellwertig und enthält keine Phaseninformation bzgl. der Reflexion mehr. Nach 3.1.9 gilt für die geschätzte spezifische Wandimpedanz mit dem reellen mittleren Reflexionsfaktor:

$$\overline{Z_S} = \frac{1}{\cos(45°)} \frac{1 + \overline{r_L}}{1 - \overline{r_L}} = \frac{1}{\cos(45°)} \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha_L}}{1 - \sqrt{1 - \alpha_L}} \tag{4.4.2}$$

Zur Veranschaulichung wird eine weitere Modellberechnung nach Delany und Bazley für die Parameter $\Xi_1 = 40.000 \frac{Pa \cdot s}{m^2}$, $d_1 = 0,05m$ und $\Xi_2 = 5.000 \frac{Pa \cdot s}{m^2}$, $d_2 = 0,2m$ durchgeführt. Daraufhin wird die geschätzte spezifische Impedanz nach 4.4.2 gebildet und der Absorptionsgrad erneut daraus berechnet (siehe Abb. 29). Der Absorptionsgrad für die geschätzte Impedanz ergibt sich hierbei zu:

$$\overline{\alpha}_L(\theta) = \frac{\overline{Z}_S \cos(\theta) - Z_0}{\overline{Z}_S \cos(\theta) + Z_0} \tag{4.4.3}$$

Die Übereinstimmung der dargestellten Kurven ist bis auf einen Fehler von $\Delta\alpha_{\overline{\theta}} \approx 0,05$ gegeben. Für gegebene Messwerte des Absorptionsgrades, die im Hallraum bestimmt wurden, wird das hier beschriebene Schätzungsverfahren daher in dem Berechnungsmodell angewendet.

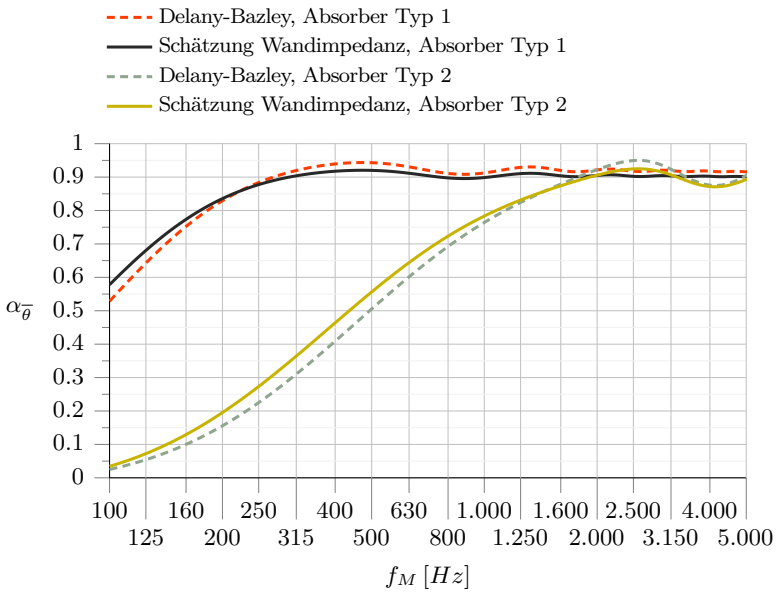

Abbildung 29: Absorptionsgrad für den diffusen Schalleinfall, nach Delany und Bazley und mit der geschätzten Wandimpedanz

4.5 Ableitung der Koeffizienten

Die in den vorangegangenen Abschnitten erläuterte Berechnungsmethode liefert das Reflexionsmuster nach einer einfallenden ebenen Welle in Abhängigkeit von der Frequenz nach Tabelle 4.1 und von den Einfallswinkeln θ und ϕ der einfallenden Wellen. Die Anzahl der Auswertungspunkte $\vec{r}$ des in Abb. 22 dargestellten Gitters wird nun als N_r bezeichnet. Das Reflexionsmuster lässt sich somit als ein Vektor $\vec{p}(f_M, \theta, \phi)$ mit der Länge N_r bezeichnen.

Um daraus die in Kapitel 2 beschriebenen Koeffizienten abzuleiten, wird das Reflexionsmuster der Probe ins Verhältnis zu den Ergebnissen für eine glatte Referenzplatte gesetzt. Durch diese Normierung werden Beugungseffekte und Kantenreflexionen ausgeglichen, welche sich durch den runden Ausschnitt ergeben.

Für den Absorptionsgrad interessiert das Verhältnis der reflektierten Leistung. Nach 2.2.7 ist diese näherungsweise als Summe der quadrierten Effektivwerte des Schalldrucks für eine betrachtete Fläche S_P aufzufassen:

$$P(f_M, \theta, \phi) \approx \frac{\sum_i |\vec{p_{eff_i}}(f_M, \theta, \phi)|^2}{\rho c} S_P \tag{4.5.1}$$

Die Normierung auf die Referenzplatte bedeutet hierbei, dass die einfallende Leistung in 2.1.2 durch die reflektierte Leistung der Referenzplatte ersetzt wird.

Mit den reflektierten Leistungen P_P der Probe und P_0 der Referenzplatte ergibt sich somit der Absorptionsgrad zu:

$$\alpha(f_M, \theta, \phi) = 1 - \frac{P_P}{P_0} = 1 - \frac{\sum_i |\vec{p}_{P,eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2}{\sum_i |\vec{p}_{0,eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2} \tag{4.5.2}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Anzahl der Auswertungspunkte N_r in den folgenden Betrachtungen konstant bleibt. $\vec{p_P}$ stellt das Reflexionsmuster der Probe, $\vec{p_0}$ das Reflexionsmuster der Referenzplatte dar.

Um den Absorptionsgrad für den diffusen Schalleinfall zu erhalten, kann für jeden Polarwinkel θ der arithmetische Mittelwert über den Azimuthwinkel gebildet werden, um dann die Paris'sche Formel nach 2.1.9 anwenden zu können. Für den arithmetischen Mittelwert bezüglich des Azimuthwinkels der einfallenden Welle ϕ mit der Anzahl der Azimuthwinkel N_ϕ gilt:

$$\alpha_{\overline{\phi}}(f_M, \theta) = \frac{1}{N_\phi} \sum_{i=1}^{N_\phi} \alpha(f_M, \theta, \phi_i) \tag{4.5.3}$$

Der Absorptionsgrad für den diffusen Schalleinfall lautet dann mit der Anzahl der diskreten Polarwinkel der einfallenden Wellen N_θ:

$$\alpha_{\overline{\theta\phi}}(f_M) = \sum_{i=1}^{N_\theta} \alpha_{\overline{\phi}}(f_M, \theta_i) \sin(2\theta_i)\Delta\theta \tag{4.5.4}$$

Für die Ableitung des Streugrades wird die in 2.2.9 aufgestellte Formulierung des Korrelationsstreugrades herangezogen. Dieser bezieht die hier beschriebene Normierung auf die Referenzplatte bereits mit ein und lautet:

$$s_K(f_M, \theta, \phi) = 1 - \frac{|\sum_i \vec{p}_{P,eff,i}(f_M, \theta, \phi)\vec{p}^*_{0,eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2}{\sum_i |\vec{p}_{P,eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2 \sum_i |\vec{p}_{0,eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2} \tag{4.5.5}$$

Analog zu dem Absorptionsgrad ergibt sich der Korrelationsstreugrad für den diffusen Schalleinfall über die Mittelwertbildung und anschließender Anwendung der Paris'schen Formel. Für den Mittelwert gilt:

$$s_{K,\overline{\phi}}(f_M, \theta) = \frac{1}{N_\phi} \sum_{i=1}^{N_\phi} s_K(f_M, \theta, \phi_i) \tag{4.5.6}$$

Nach Anwendung der Paris'schen Formel folgt:

$$s_{K,\overline{\theta\phi}}(f_M) = \sum_{i=1}^{N_\theta} s_{K,\overline{\phi}}(f_M, \theta_i) \sin(2\theta_i)\Delta\theta \tag{4.5.7}$$

Der Diffusitätsgrad kann direkt der Formulierung nach ISO (2012) in 2.3.1 entnommen werden:

$$d(f_M, \theta, \phi) = \frac{(\sum_i 10^{\frac{L_i}{10}})^2 - \sum_i (10^{\frac{L_i}{10}})^2}{(N_r - 1) \sum_i (10^{\frac{L_i}{10}})^2} \tag{4.5.8}$$

L stellt dabei den Schalldruckpegel des Reflexionsmusters dar. Da sich dieser entsprechend der Leistungsformulierung in 4.5.3 auf den Betrag des Schalldrucks bezieht, kann der Diffusitätsgrad wie folgt geschrieben werden:

$$d(f_M, \theta, \phi) = \frac{(\sum_i |\vec{p}_{eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2)^2 - \sum_i (|\vec{p}_{eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2)^2}{(N_r - 1) \sum_i (|\vec{p}_{eff,i}(f_M, \theta, \phi)|^2)^2} \tag{4.5.9}$$

Der normierte Diffusitätsgrad ergibt sich mit dem Diffusitätsgrad der Probe d_P und der Referenzplatte d_0 zu:

$$d_n(f_M, \theta, \phi) = \frac{d_P(f_M, \theta, \phi) - d_0(f_M, \theta, \phi)}{1 - d_0(f_M, \theta, \phi)} \tag{4.5.10}$$

Die Norm gibt eine reine arithmetische Mittelwertbildung über die Einfallswinkel θ und ϕ vor, um den Diffusitätsgrad für den diffusen Schalleinfall zu errechnen:

$$d_{n,\overline{\theta\phi}}(f_M) = \frac{1}{N_\theta} \frac{1}{N_\phi} \sum_{i=1}^{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\phi} d_n(f_M, \theta_i, \phi_j) \tag{4.5.11}$$

5 Beschreibung der untersuchten Proben und des Messaufbaus

Das zuvor beschriebene Berechnungsverfahren bestimmt den Absorptionsgrad, Streugrad und den Diffusitätsgrad einer Probe. Diese Koeffizienten gelten jeweils für den diffusen Schalleinfall. Als Messverfahren zur Validierung der Berechnungsergebnisse wurde die Messung des Streugrades nach der Norm 17497-1 der ISO (2004) (siehe S.11) ausgewählt, welches hinsichtlich des Probenmaßstabs abgeändert wurde. Mit den Messungen der verschiedenen Nachhallzeiten erhält man neben dem Streugrad auch den Absorptionsgrad der Probe, welche auf einem Drehteller platziert wird. Hier ist zu beachten, dass sich der so bestimmte Absorptionsgrad nach 2.2.4 nicht auf den leeren Hallraum, sondern auf den Hallraum mit eingebrachtem leeren Drehteller bezieht.

5.1 Beschreibung der fünf Proben

Für den Vergleich zwischen der Vorhersage der Koeffizienten mithilfe der REM und den gemessenen Koeffizienten wurden 5 repräsentative Proben modelliert. Um festzustellen, ob das Berechnungsverfahren die Absorptionseigenschaften eines Aufbaus korrekt abbildet, wird der gemessene Absorptionsgrad eines Absorbers als Eingabewert für das Oberflächenmaterial der absorbierenden Teilflächen der Proben verwendet. So kann die Eignung des Berechnungsmodells beurteilt werden, den gemessenen Absorptionsgrad nachzubilden und den Einfluss von vor dem Absorber aufgebrachten Aufbauten wie Holzbalken oder -brettern vorherzusagen.

Den Proben wurden zwei Oberflächenmaterialien zugewiesen. Für Material 1 wurde die Absorption einer Holzplatte angenommen und entsprechend der vorgeschlagenen Schätzung in 4.4.2 zu einer reellen Admittanz umgeformt. Material 2 erhielt den gemessenen Absorptionsgrad der Holzfaserplatte, welche in Probe 1 vollflächig abgebildet wird. Auch hierzu wurde der Schätzwert für die Admittanz gebildet. Abb. 30 stellt die verwendeten Materialien für die Berechnungen dar.

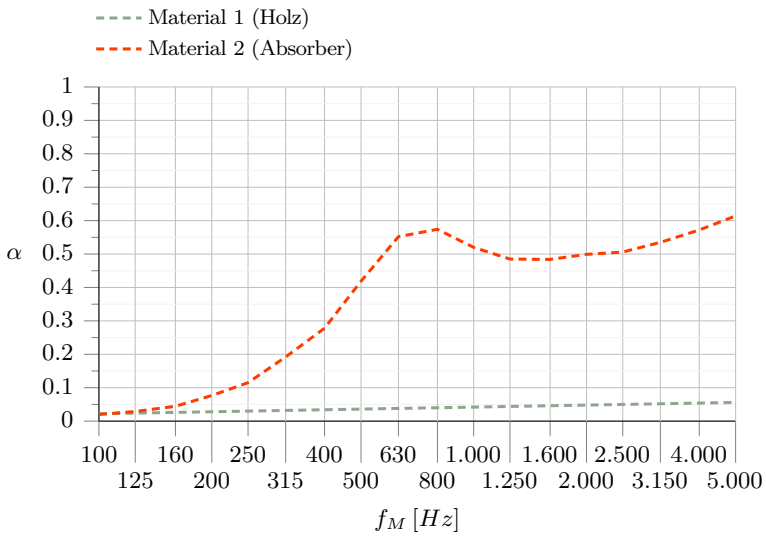

Abbildung 30: Absorptionsgrad der verwendeten Materialien für die Berechnungen

Die folgenden Proben wurden modelliert und für die Messung im Hallraum aufgebaut. Der hierfür verwendete Absorber bestand aus einer $12mm$ starken Holzfaserdämmplatte mit einer Dichte von ca. $230\frac{kg}{m^3}$.

- Probe 1: Vollflächiger Absorber (Holzfaserdämmplatte)
- Probe 2: Holzbalken auf glatter Platte
- Probe 3: Holzbalken und Bretter auf glatter Platte
- Probe 4: Bretter auf vollflächigem Absorber
- Probe 5: Holzbalken und Bretter auf vollflächigem Absorber

Zusätzlich werden die Koeffizienten für eine schallharte Halbkugel berechnet, da der Diffusitätsgrad für die fünf Proben aufgrund des nur eindimensional streuenden Verhaltens der aufgebrachten Balken und Bretter sehr gering ausfällt. Hierdurch soll gezeigt werden, dass der vorhergesagte Diffusitätsgrad in diesem Fall erwartungsgemäß große Werte annimmt.

Abbildung 31: Schnitt des Aufbaus für Probe 1

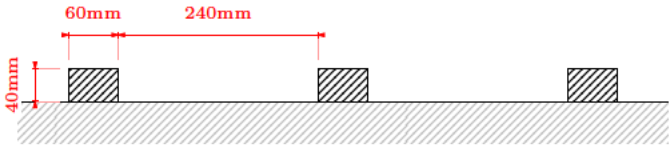

Abbildung 32: Schnitt des Aufbaus für Probe 2

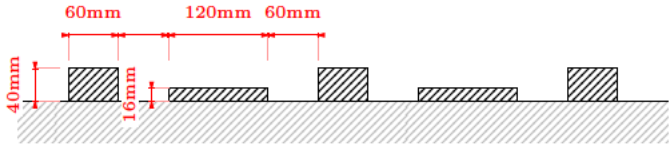

Abbildung 33: Schnitt des Aufbaus für Probe 3

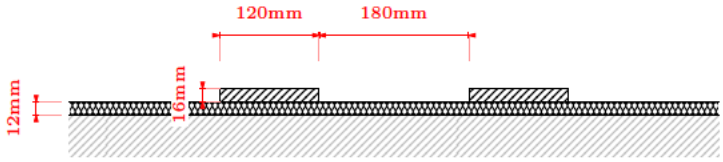

Abbildung 34: Schnitt des Aufbaus für Probe 4

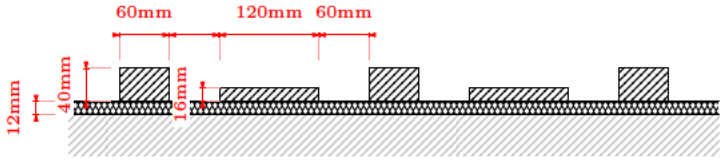

Abbildung 35: Schnitt des Aufbaus für Probe 5

Abbildung 36: Modell und Musteraufbau für Probe 1

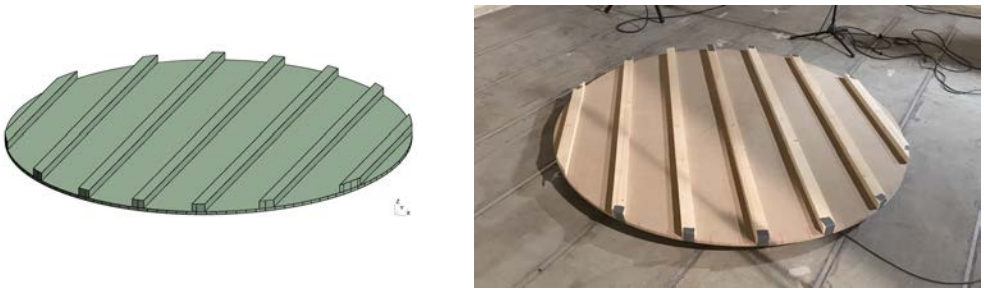

Abbildung 37: Modell und Musteraufbau für Probe 2

Abbildung 38: Modell und Musteraufbau für Probe 3

Abbildung 39: Modell und Musteraufbau für Probe 4

Abbildung 40: Modell und Musteraufbau für Probe 5

Abbildung 41: Foto des Messaufbaus im Hallraum mit Drehteller, Kugellautsprecher und Mikrofonen

5.2 Beschreibung des Messverfahrens

Die in der ISO 17497-1 beschriebene Messung des Streugrades sieht eine Skalierung des gesamten Aufbaus mit dem Maßstab $1 : N$ vor. Für die Probe wird in der Norm ein Durchmesser von mindestens $\frac{3m}{N}$ empfohlen. Aus Praktikabilitätsgründen hinsichtlich des Baus und Transports der Musteraufbauten wurde ein Durchmesser von $2m$ für die Proben in der vorliegenden Arbeit festgelegt. Abweichend zur Vorgabe der Norm, den Maßstab $1 : N$ auch auf die Auswertung der Nachhallzeiten anzuwenden und somit eine Verschiebung auf der Frequenzachse um $\frac{f}{N}$ zu bewirken, wurden die Messwerte nicht skaliert. Dies ergab sich aus der Annahme, dass bei keiner der beschriebenen Proben von einem messbaren Streugrad bei sehr tiefen Frequenzen auszugehen war. Des Weiteren ist die Skalierung in der Norm auch aufgrund der Minimierung des Kanteneffekts des Probenausschnitts anzuwenden, welcher allerdings ebenfalls in dem Berechnungsmodell auftritt und somit für die hier angestellten Vergleiche keinen Fehler bedeutet.

Der Messaufbau im Hallraum ist in Abb. 41 dargestellt. Als Drehteller wurde eine $16mm$ starke Sperrholzplatte auf einen steuerbaren Drehmotor montiert. In der nachfolgenden Tabelle sind die verwendeten Geräte und Softwarepakete aufgelistet. Die Steuereinheit und die Geräte für die Signalverarbeitung wurden außerhalb des Hallraums platziert. Innerhalb des Hallraumes befanden sich vier Mikrofone in verschiedenen Höhen und ein Kugellautsprecher mit zwei möglichen Standorten. Die Positionierung wurde unter Beachtung der in der ISO 17497-1 vorgegebenen Mindestabstände durchgeführt. Jeder Messdurchlauf erzeugte somit 8 Impulsantworten, aus denen jeweils die Nachhallzeit in Terzbändern errechnet wurde.

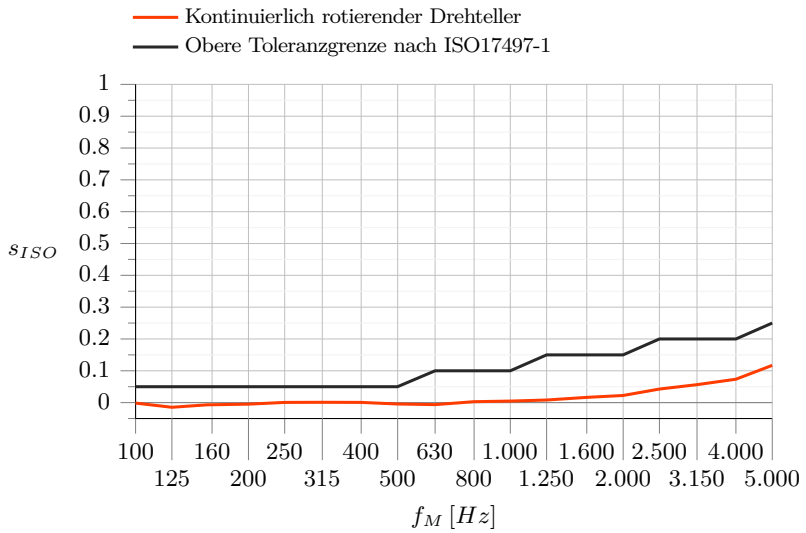

Abbildung 42: Streugrad des leeren Drehtellers im Vergleich zur Vorgabe nach ISO 17497-1

Beschreibung	Hersteller	Typ
Lautsprecher	Outline	GSR
Drehmotor	Outline	ET1.1-ST2
Verstärker	Lab.gruppen	LUCIA 240/2M
Mikrofon 1	Behringer	ECM 8000
Mikrofon 2	Behringer	ECM 8000
Mikrofon 3	iSEMcon	EMX-7150
Mikrofon 4	NTi Audio	MA220, MC230
Audio-Interface	Merging Technologies	HAPI (ADA8)
Messsoftware	MathWorks	MATLAB R2018a
Messsoftware	Brinkmann und Weinzierl (2017)	AKtools
Messsoftware	Berzborn et al. (2017)	ITA-Toolbox

Tabelle 5.1: Liste der für die Messungen verwendeten Geräte

Als Messsignal wurde ein logarithmischer Sweep mit der Ordnung 21 und einer Abtastrate von $fs = 96kHz$ eingesetzt, welcher eine Dauer von $21,8s$ aufwies. Für die Bestimmung der Nachhallzeiten T_3 und T_4 bei rotierendem Drehmotor (siehe S.11) erfolgten die Messungen von 30 aufeinanderfolgenden Sweeps mit anschließender Mittelwertbildung, um daraufhin eine Impulsantwort zu errechnen. Mithilfe der *AKtools* und der *ITA-Toolbox* wurden die Nachhallzeiten durch die Beobachtung eines Pegelabfall von $50dB$ (T_{50}) gebildet. Die Geschwindigkeit des Drehmotors entsprach $63s$ pro Umdrehung, womit sich ein Drehwinkel von etwa 125° für die Dauer eines Sweeps ergab. Die Messung des Streugrades für den leeren Drehteller brachte mit diesem Verfahren Werte hervor, die deutlich unterhalb der oberen Toleranzgrenze nach ISO 17497-1 liegen (siehe Abb. 42).

6 Berechnungs- und Messergebnisse

Alle numerischen Berechnungen wurden auf einem Computer mit 4 Prozessorkernen à $4GHz$ und einem Arbeitsspeicher in Höhe von $32GB$ durchgeführt. Für die untersuchten Proben sind jeweils die Berechnungs- und Messergebnisse in einem Plot dargestellt. Ein Berechnungsdurchlauf dauerte pro Probe etwa 6,5 Stunden und nahm maximal ca. $28GB$ des Arbeitsspeichers in Anspruch. Als Winkelauflösung wurde bei der Untersuchung der Proben $\Delta\theta = 15°$ für die einfallenden Wellen und $\Delta\theta_R = 1°$ gewählt. Für die Darstellung des Streumusters wurde der Schalldruckpegel gebildet und um $95dB$ erhöht. Die nachfolgende Tabelle stellt die gewählte maximal zulässige Kantenlänge des Dreiecksnetzes l_D für die Modelle der Proben dar, welche sich aus der Untersuchung der beiden Testproben ergab.

f_M	100	125	160	200	250	315	400	500	630
$\frac{\lambda}{l_D}$	12	12	12	12	12	12	12	12	12
f_M	800	1.000	1.250	1.600	2.000	2.500	3.150	4.000	5.000
$\frac{\lambda}{l_D}$	9	9	6	6	6	6	6	4	4

Tabelle 6.1: Festlegung der Anzahl der Wellenlängen pro Kantenlänge der Probenmodelle

In der Berechnung können negative Werte für die Koeffizienten auftreten, wenn die betrachtete Probe eine deutlich größere Tiefe bzw. Ausdehnung auf der z-Achse als die Referenzplatte besitzt. In diesem Fall kann die Probe eine größere reflektierte Leistung bei sehr schrägen Einfallswinkeln als die Referenzplatte aufweisen. Negative Werte wurden auf 0 gesetzt, da diese unphysikalisch sind. Dies betraf für die untersuchten Proben nur den Absorptionsgrad in den Terzen mit Mittenfrequenzen unterhalb von $250Hz$. Auch in den Messergebnissen wurden negative Werte entsprechend behandelt, welche nur bei dem Absorptionsgrad in der Terz mit der Mittenfrequenz $f_M = 100Hz$ auftraten.

6.1 Einfluss der Kantenlänge des Dreiecksnetzes

Zunächst wurde der Einfluss der maximal zulässigen Kantenlänge des Dreiecksnetzes l_D auf die Ergebnisse untersucht, um eine Festlegung für die darauf folgenden Berechnungen der Proben treffen zu können. Danach war die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Winkelauflösung der diskreten Empfangspositionen für das Streumuster und der diskreten Einfallswinkel zu beurteilen. Diese Untersuchungen wurden an kleinen Testproben mit einem Durchmesser des Ausschnitts von 1m

durchgeführt (siehe Abb. 43). Testprobe 1 besteht aus einem eindimensional streuenden und Testprobe 2 aus einem zweidimensional streuenden Aufbau. Für den Absorber (Material 2) der Testproben wurde der berechnete Absorptionsgrad nach Delany und Bazley verwendet (siehe Absorber Typ 2 in Abb.29). Material 1 erhält für alle Frequenzen einen Absorptionsgrad von $\alpha_{\overline{\theta\phi}} = 0,15$.

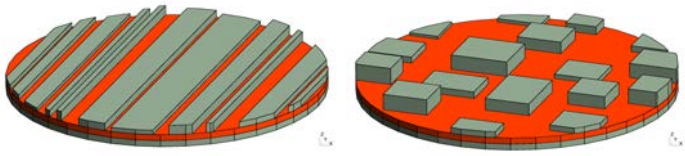

Abbildung 43: Ansichten der Modelle für Testprobe 1 (links) und Testprobe 2 (rechts)

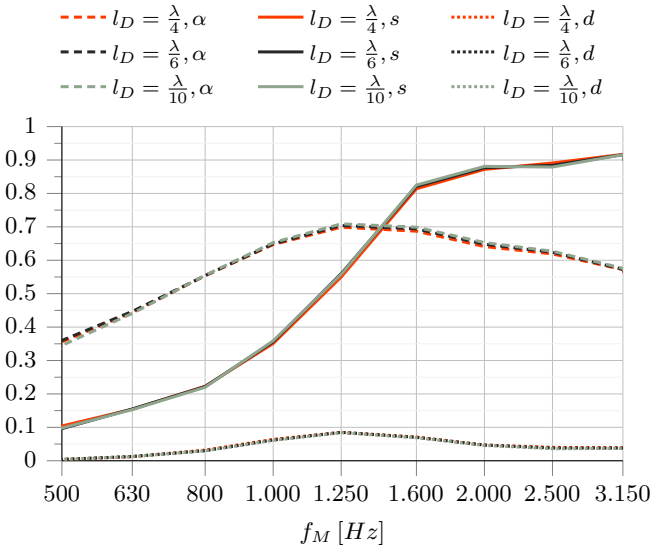

Abbildung 44: Einfluss der Kantenlänge l_D, Berechnungsergebnisse für Testprobe 1

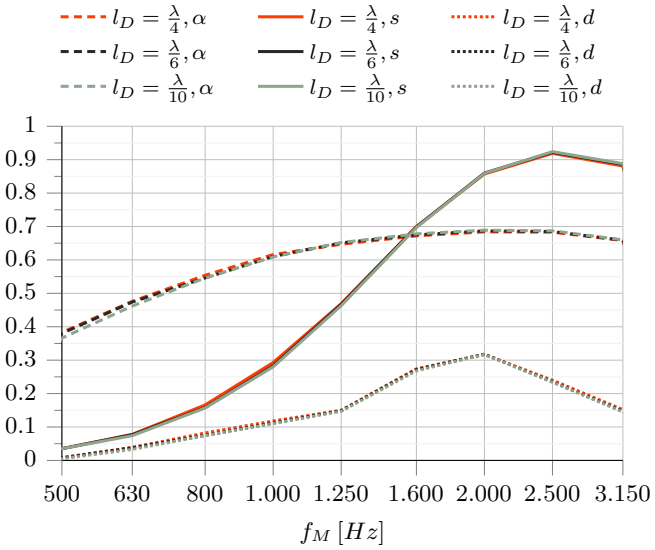

Abbildung 45: Einfluss der Kantenlänge l_D, Berechnungsergebnisse für Testprobe 2

Anhand der Ergebnisse in Abb. 44 und 45 ist erkennbar, dass bereits eine Kantenlänge des Dreiecksnetzes von $l_D = \frac{\lambda}{4}$ zu aussagekräftigen Vorhersagen der Koeffizienten führt. Die Abweichungen zwischen den Kurven sind als vernachlässigbar zu betrachten.

6.2 Einfluss der Winkelauflösung

Für die Wahl der Winkelabstände $\Delta\theta_R$ des Gitters der Auswertungspunkte (siehe Abb. 22) sei auf die Untersuchungen von Kosaka und Sakuma (2005) verwiesen. Diese stellen fest, dass für die Berechnung des Streugrades bis zu einer oberen Frequenz von $2.000Hz$ eine Winkelauflösung von mindestens 5° zu wählen ist. Da in der vorliegenden Arbeit Frequenzen von bis zu $5.000Hz$ betrachtet werden, wurde daher der Winkelabstand für das Gitter mit $\Delta\theta_R = 1°$ festgelegt.

Die Winkelabstände der einfallenden ebenen Wellen $\Delta\theta$ wurden ebenfalls anhand der Testproben 1 und 2 hinsichtlich ihres Einflusses auf die Vorhersage der Koeffizienten untersucht. In den Abb. 46 und 47 wird deutlich, dass die Wahl der Winkelabstände dabei einen starken Einfluss hat. Für $\Delta\theta = 45°$ sind Abweichungen von bis zu $\Delta\alpha \approx 0,09$ und $\Delta s \approx 0,1$ erkennbar, wenn der Fall $\Delta\theta = 10°$ als Referenz betrachtet wird. Die Kurve für Testprobe 1 mit $\Delta\theta = 30°$ weist sogar eine maximale Abweichung von $\Delta s \approx 0,14$ auf.

Da die Unterschiede zwischen den Ergebnissen für $\Delta\theta = 15°$ und für $\Delta\theta = 10°$ bei beiden Testproben vernachlässigbar klein ausfallen, ist ein Winkelabstand von $\Delta\theta = 15°$ als ausreichend zu betrachten.

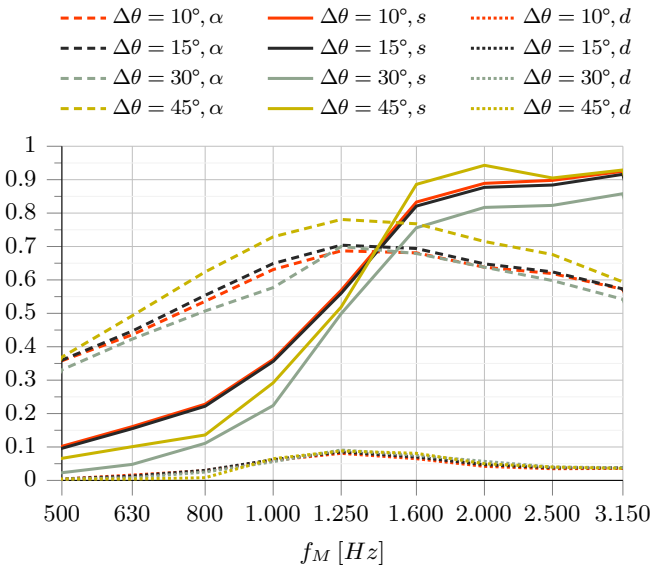

Abbildung 46: Einfluss der Winkelabstände der einfallenden ebenen Wellen, Berechnungsergebnisse für Testprobe 1

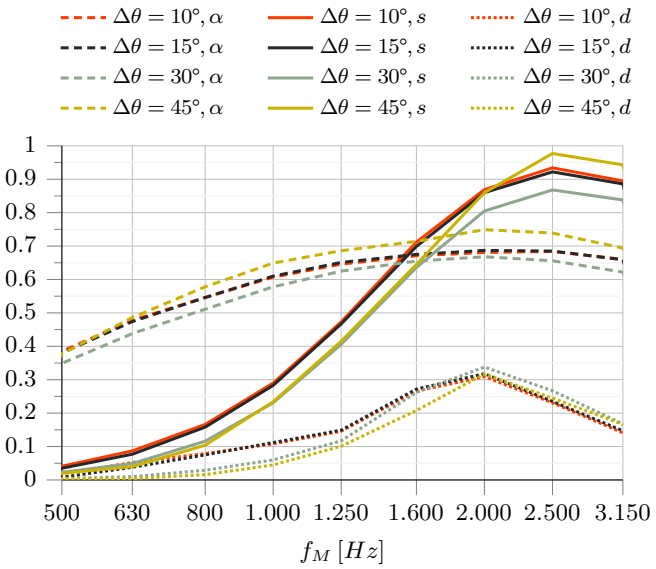

Abbildung 47: Einfluss der Winkelabstände der einfallenden ebenen Wellen, Berechnungsergebnisse für Testprobe 2

6.3 Berechnungsergebnisse für eine Halbkugel

Die Berechnungsergebnisse für eine Halbkugel bilden erwartungsgemäß einen hohen Streugrad von bis zu $s_{\overline{\theta\phi}} = 0,98$ ab (siehe Abb. 49). Auch der Diffusitätsgrad steigt bis auf einen Wert von $d_{n,\overline{\theta\phi}} = 0,9$ an. Für die Terzen mit den Mittenfrequenzen $1.600Hz$, $3.150Hz$, $4.000Hz$ und $5.000Hz$ sind Einbrüche des Diffusitätsgrades zu erkennen, welche als Hinweise auf unechte Resonanzen zu bewerten sind. Der Absorptionsgrad steigt zu hohen Frequenzen auf einen Wert von $\alpha_{\overline{\theta\phi}} = 0,21$ an.

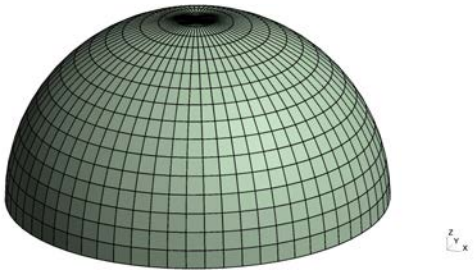

Abbildung 48: Ansicht des Modells für eine Halbkugel mit einem Durchmesser von $2m$

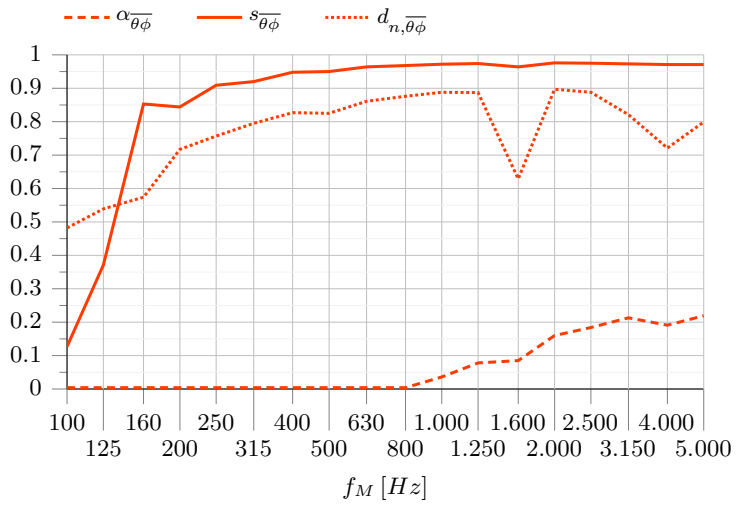

Abbildung 49: Berechnungsergebnisse für eine schallharte Halbkugel

6.4 Berechnungs- und Messergebnisse für die fünf Proben

Die nachfolgenden Abbildungen stellen die Berechnungs- und Messergebnisse für jeweils eine Probe dar. Für die Messwerte wird die Standardabweichung nach ISO 17497-1 als Fehlerbalken über die Kurven gelegt.

Probe 1: Vollflächiger Absorber

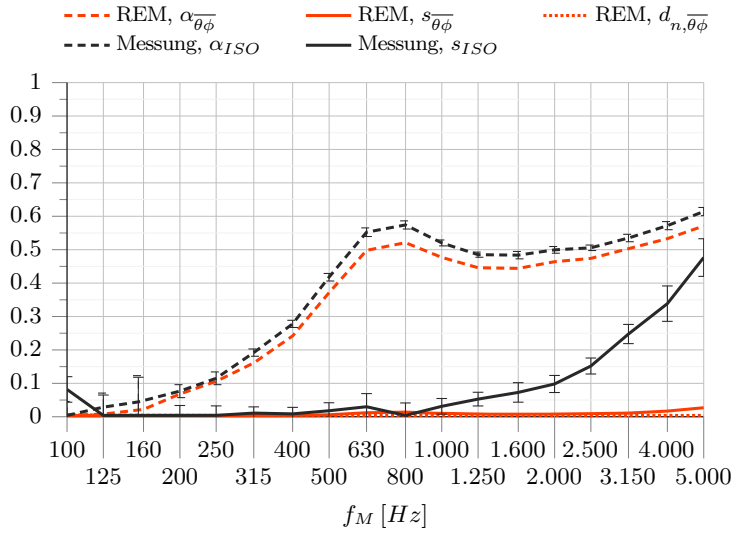

Abbildung 50: Berechnungs- und Messergebnisse für Probe 1 (Vollflächiger Absorber)

Probe 2: Holzbalken auf glatter Platte

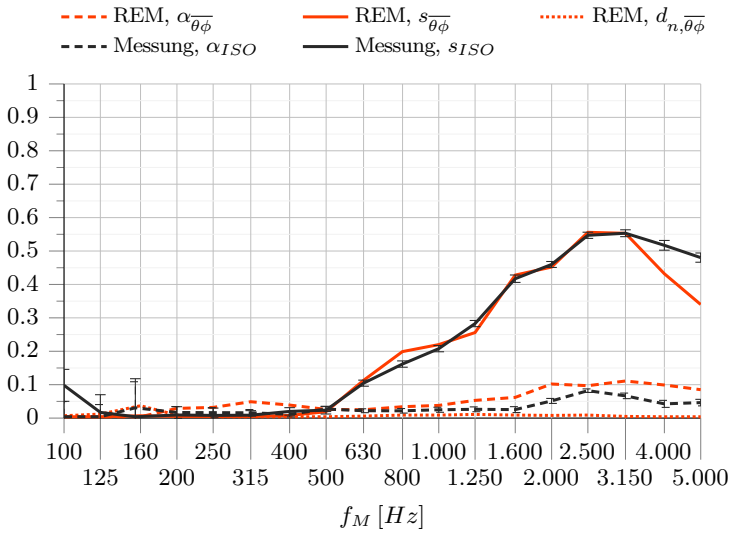

Abbildung 51: Berechnungs- und Messergebnisse für Probe 2 (Holzbalken auf glatter Platte)

Probe 3: Holzbalken und Bretter auf glatter Platte

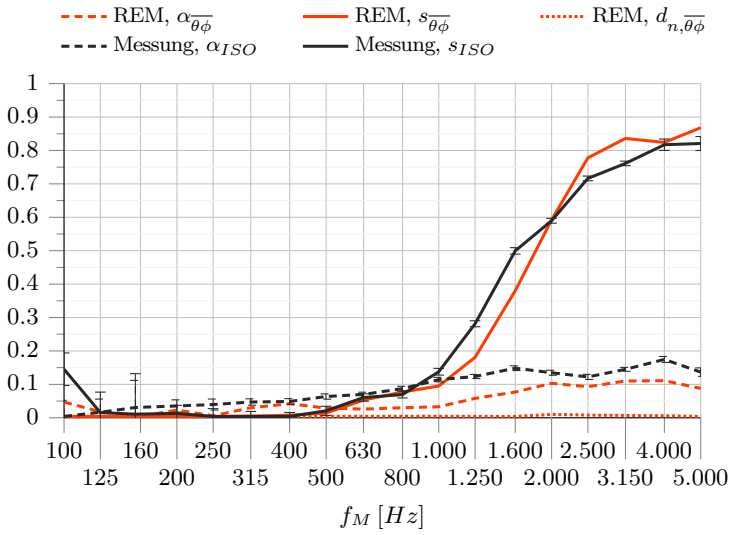

Abbildung 52: Berechnungs- und Messergebnisse für Probe 3 (Holzbalken und Bretter auf glatter Platte)

Probe 4: Bretter auf vollflächigem Absorber

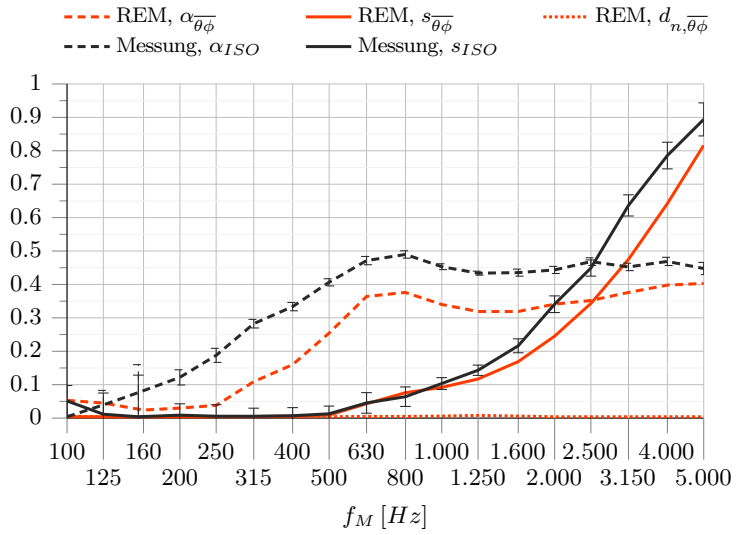

Abbildung 53: Berechnungs- und Messergebnisse für Probe 4 (Bretter auf vollflächigem Absorber)

Probe 5: Holzbalken und Bretter auf vollflächigem Absorber

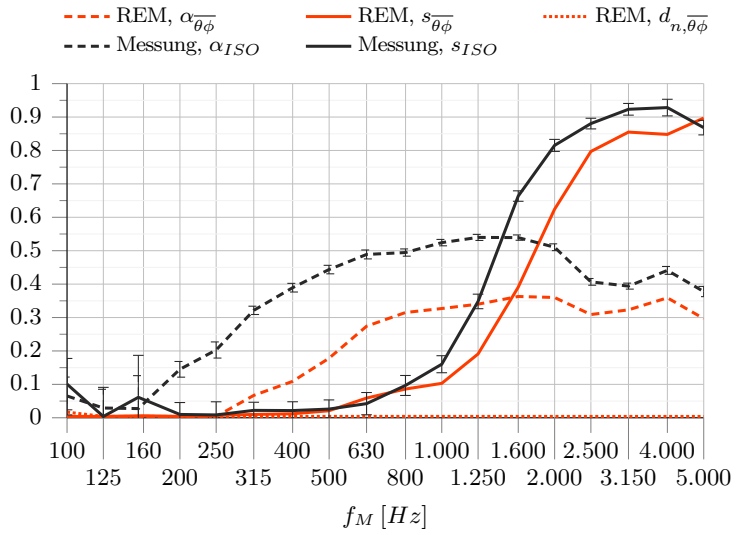

Abbildung 54: Berechnungs- und Messergebnisse für Probe 5 (Holzbalken und Bretter auf vollflächigem Absorber)

6.5 Vergleich der Berechnungs- und Messergebnisse

Anhand der zuvor dargestellten Diagramme kann ein direkter Vergleich zwischen Berechnungs- und Messergebnissen durchgeführt werden. Da die Kurven aller Berechungsergebnisse gleichmäßig und ohne starke Sprünge verlaufen, ist das Auftreten unechter Resonanzen unwahrscheinlich bzw. vermutlich nur sehr schwach ausgeprägt.

Allgemein ist für alle fünf Proben eine Nachbildung der Kurvenverläufe der Koeffizienten durch das Berechnungsmodell erkennbar. Der Diffusitätsgrad fällt aufgrund der eindimensionalen Anordnung der Proben vernachlässigbar gering aus. Abweichungen treten bei dem Streugrad vor allem in Form einer Verschiebung auf der Frequenzachse auf, während bei dem Absorptionsgrad Unterschiede in der Höhe der Kurve erkennbar sind.

Der Streugrad wird für Probe 1 deutlich geringer vorhergesagt als es die Messung mit einem Maximalwert von $s = 0,48$ bei $5.000Hz$ ergab. Für Probe 2 folgt der berechnete Kurvenverlauf von tiefen zu hohen Frequenzen ohne große Abweichungen, fällt dann allerdings ab $4.000Hz$ stärker als der Messwert ab. Die Kurvenverläufe des Streugrades für Probe 3 bilden beide einen Anstieg zu hohen Frequenzen ab, welcher seinen Mittelwert an etwa der gleichen Frequenz erreicht, allerdings Abweichungen bezüglich seiner Steigung aufweist. Für die Proben 4 und 5 wird der Verlauf des Streugrades in seiner Form mit großer Ähnlichkeit vorhergesagt, weist dabei allerdings eine Verschiebung auf der Frequenzachse von etwa einer Terz auf.

Während der Absorptionsgrad für Probe 1 eine Differenz bis zu $\Delta\alpha_{P1} \approx 0,05$ aufweist, zeigen Probe 4 und Probe 5 deutlich höhere Abweichungen von bis zu $\Delta\alpha_{P4} \approx 0,09$ und $\Delta\alpha_{P5} \approx 0,3$ auf. Für die Proben 2 und 3 sind Differenzen von $\Delta\alpha_{P2} \approx 0,05$ und $\Delta\alpha_{P3} \approx 0,15$ zu erkennen. Die Vorhersage des Absorptionsgrades fällt somit bis auf Probe 3 insgesamt zu niedrig aus und erreicht für die Proben mit Balken- und Brettervorbau die größten Abweichungen.

7 Zusammenfassung und Diskussion

Das beschriebene numerische Berechungsverfahren soll für die Vorhersage von Absorptions- und Streuungseigenschaften von Raumbegrenzungsflächen eingesetzt werden können. Die REM wird für die Berechnung des Reflexionsmusters nach einer einfallenden ebenen Welle auf die Probe eingesetzt. Dazu wird ein runder Ausschnitt des betrachteten Wand- oder Deckenaufbaus mit einem Durchmesser von $2m$ modelliert und in Form eines diskreten Dreiecksnetzes verwendet. Absorbierende Teilflächen des Modells werden als lokal reagierend aufgefasst und sind somit durch eine richtungsunabhängige Admittanz zu beschreiben. Dazu wird eine Schätzung der reellen Wandimpedanz auf Grundlage gegebener Werte für den Absorptionsgrad vorgeschlagen. Das Berechnungsverfahren ist für einen Satz aus einfallenden Wellen mit unterschiedlichen polaren und azimuthalen Einfallswinkeln durchzuführen, wobei das reflektierte Schallfeld für jede einfallende Welle einzeln berechnet wird. Aus den so gewonnenen Streumustern sind der Absorptionsgrad, der Streugrad und der Diffusitätsgrad abzuleiten.

Die Berechnungsergebnisse für zwei sowohl absorbierende als auch streuende Testproben zeigen, dass die maximal zulässige Kantenlänge des Dreiecksnetzes im Bereich $l_D = \frac{\lambda}{4} ... \frac{\lambda}{10}$ einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Vorhersage der genannten Koeffizienten in dem betrachteten Frequenzbereich aufweisen. Da es sich bei den Testproben in beiden Fällen um eckige, kantige Aufbauten handelt, lässt sich diese Erkenntnis auch auf die fünf untersuchten Proben übertragen.

Für die Richtungen der einfallenden ebenen Wellen sind Winkelabstände von höchstens $\Delta\theta = 15°$ zu wählen. Größere Winkelabstände haben deutliche Abweichungen bei allen Koeffizienten zur Folge. Eine Reduzierung der Winkelabstände auf $\Delta\theta = 10°$ führt zu vernachlässigbar kleinen Unterschieden in der Vorhersage der Koeffizienten. Dies ergibt sich sowohl für Testprobe 1, die aus einem eindimensional streuenden Aufbau besteht, als auch für die zweidimensional streuende Testprobe 2.

Es werden fünf Proben untersucht, für welche die Koeffizienten vorherzusagen und anhand von geeigneten Messungen zu verifizieren sind. Diese bestehen aus einem vollflächigen Absorber (Probe 1), Holzbalken auf einer glatten Platte (Probe 2), Holzbalken und Brettern auf einer glatten Platte (Probe 3), Brettern auf einem vollflächigen Absorber (Probe 4) und Holzbalken und Brettern auf einem vollflächigen Absorber (Probe 5). Alle Proben entsprechen einem kreisrunden

Ausschnitt des beschriebenen Aufbaus und weisen einen Durchmesser von $d = 2m$ auf. Der Absorber erhält für die Berechnung eine relle Admittanz, welche aus dem gemessenen Absorptionsgrad für Probe 1 hervorgeht. Somit kann anhand des Vergleichs mit den Messergebnissen für die Proben 1, 4 und 5 geprüft werden, ob das numerische Berechnungsverfahren sowohl den Absorptionsgrad eines vollflächigen, als auch eines durch Balken und Bretter verdeckten Absorbers vorhersagen kann.

Im Hallraum wurde der Streugrad und der Absorptionsgrad für die fünf Proben in Anlehnung an die ISO17497-1 gemessen. Der Absorptionsgrad ist hierbei auf den leeren Hallraum mit eingebrachtem Drehteller bezogen. Ein Vergleich zwischen den Berechnungs- und Messergebnissen zeigt, dass insgesamt eine gute Übereinstimmung bezüglich des Streugrades festzustellen ist. Die Vorhersagen bilden den Kurvenverlauf in seiner Form weitgehend nach, weisen für die Proben 4 und 5 allerdings Verschiebungen auf der Frequenzachse von etwa einer Terz auf. Der Absorptionsgrad wird durch das Berechnungsverfahren ebenfalls in seinem Kurvenverlauf vorhergesagt, fällt allerdings bei den Proben 4 und 5 deutlich zu gering aus. Für Probe 2 fällt die Vorhersage des Absorptionsgrades etwas zu hoch und für Probe 3 etwas zu gering aus. Die Standardabweichung der Messergebnisse ist in allen Fällen als gering zu bezeichnen und lässt auf eine hohe Reliabilität der Messungen schließen.

Zur Bestimmung des Absorptionsgrades wurde die Nachhallzeit des Hallraumes mit auf dem Drehteller platzierter Probe und die Nachhallzeit mit dem leerem Drehteller herangezogen. Alle gemessenen Absorptionsgrade beziehen sich folglich auf den Hallraum mit eingebrachten Drehteller anstatt auf den leeren Hallraum. Somit ist der Absorptionsgrad für die physischen Proben 2 und 3 nur noch durch die aufgelegten Balken oder Bretter bestimmt. Da das Modell für die Berechnung mithilfe der REM neben den Balken oder Brettern auch der glatten Platte eine Absorption (Material 1) zuweist, sind geringfügige Abweichungen für die Proben 2 und 3 hinsichtlich des vorhergesagten und gemessenen Absorptionsgrades zu erwarten. Die Grundfläche des Drehtellers bzw. der Proben entspricht etwa $3,14m^2$ und liegt damit deutlich unter der in ISO 354 geforderten $12m^2$. Da die Messergebnisse allerdings nur für den Vergleich mit den Vorhersagen dienen und die Standardabweichung aller Messungen klein war, ist die Flächengröße hier zu vernachlässigen.

Für die Proben 4 und 5 ist im Vergleich zu Probe 1 ein erhöhter Absorptionsgrad bei Frequenzen unterhalb von $500Hz$ zu erkennen (siehe Abb. 55). Die Ursache dafür lässt sich in dem Auftreten von Körperschallresonanzen vermuten. Sowohl der Drehteller, welcher bei Probe 4 und 5 mit einer größeren Masse belastet wird, als auch die aufgelegten Balken und Bretter können Eigenschwingungen aufweisen, die durch den Reibungskontakt mit dem Absorber bedämpft werden und somit

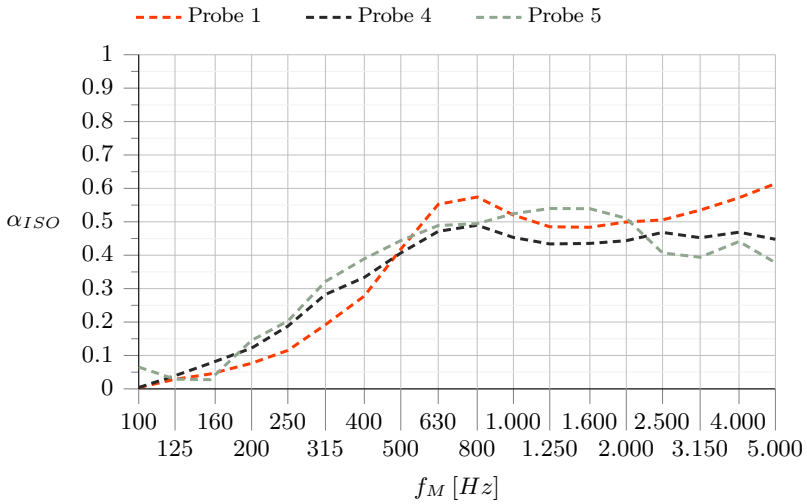

Abbildung 55: Gemessener Absorptionsgrad für die Proben 1, 4 und 5

Schallleistung absorbieren. Da die REM keinen Körperschall berücksichtigt, sind diese Effekte mit dem numerischen Berechnungsmodell nicht abbildbar.

Die Abweichungen zwischen den Berechnungs- und Messergebnissen sind vermutlich primär auf die Annahme des lokal reagierenden Verhaltens des Absorbers zurückzuführen. Diese geht von einer sehr geringen Schallgeschwindigkeit innerhalb des Absorbers aus und lässt damit nur eine Schallausbreitung senkrecht zur Absorberoberfläche zu. Die Annahme muss getroffen werden, um absorbierenden Teilflächen der Proben in der REM eine richtungsunabhängige Admittanz zuordnen zu können und somit eine Beschreibung des reflektierenden Verhaltens auf die Oberfläche der Probe zu reduzieren. Für die Proben 4 und 5 führt dies im Berechnungsmodell zu einer Reduzierung der Wirkung des Absorbers auf jene Bereiche, welche nicht durch Balken oder Bretter verdeckt sind. Somit sinkt der vorhergesagte Absorptionsgrad. Die Messergebnisse legen aufgrund des hohen Absorptionsgrades allerdings nahe, dass eine laterale Schallausbreitung innerhalb des Absorbers stattfindet und sich Wellen um die Balken und Bretter in den Absorber hineinbeugen. Dabei ist aufgrund des lateralen Verhaltens auch von Kantenreflexionen am Übergang zu dem Inneren des Absorbers auszugehen (siehe Abb. 56). Auch die Verschiebung des Streugrades auf der Frequenzachse kann mit einer erhöhten Streuung durch diese Kantenreflexionen erklärt werden.

Das numerische Berechnungsverfahren ist nicht in der Lage, viskose Reibungsverluste an Kanten eines Aufbaus zu berücksichtigen. Diese können als Erklärung für den leicht erhöhten Absorptionsgrad in den Messergebnissen für Probe 3 herangezogen werden. Aufbauten, die durch eine Vielzahl von rechtwinkligen Kanten gekennzeichnet sind, weisen möglicherweise hohe Absorptionsgrade aufgrund viskoser Effekte auf, welche durch die REM nicht vorhergesagt werden können.

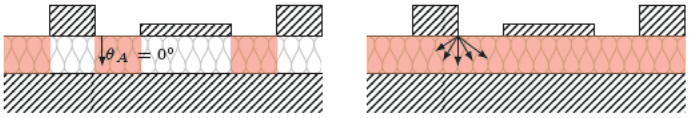

Abbildung 56: Lokal und nicht lokal reagierendes Verhalten des Absorbers für die Proben 4 und 5 (Schnitt). Links: Das lokal reagierende Verhalten begrenzt die Wirkung des Absorbers auf den nicht verdeckten Bereich, rechts: Laterale Wellenausbreitung innerhalb des Absorbers

Im Fall des nicht lokal reagierenden Verhaltens können außerdem Masse-Feder-Resonanzen (Helmholtz-Resonanzen) aufgrund der zwischen den Balken und Brettern befindlichen Luftmasse und der Federwirkung des Inneren des Absorbers auftreten. Dies würde sich auf alle Koeffizienten, in besonderem Maße aber auf den Absorptionsgrad auswirken und ist mit dem beschriebenen numerischen Berechnungsmodell nicht abzubilden. Da für die fünf Proben ein großer Abstand zwischen den Balken und Brettern gewählt wurde, ist der Einfluss der Masse-Feder-Resonanzen als sehr gering zu bewerten. Trotzdem ist diese Einschränkung für andere Wand- und Deckenaufbauten zu beachten, welche beispielsweise aus eng angeordneten Lattungen, Schlitz- oder Lochplatten bestehen.

Weiterhin können Abweichungen mit der Verwendung der geschätzten reellen Admittanz bzw. Wandimpedanz erklärt werden. Diese enthält keine Phaseninformationen bezüglich des Reflexionsverhaltens der betrachteten Fläche. Wenn das Dreiecksnetz einer Probe nun aus verschiedenen Admittanzen besteht, ergibt dies durch Phasenverschiebungen der Admittanzen zueinander ein zu den reellen Admittanzen abweichendes Streumuster. Dadurch ergeben sich andere Werte für die Koeffizienten.

In den Messergebnissen für Probe 1 ist ein zu hohen Frequenzen hin ansteigender Streugrad zu erkennen. Dieser wurde anhand einer wiederholten Messung bestätigt. Da die Inhomogenitäten der Luft einen geringen Einfluss auf den gemessenen Streugrad hatten (siehe Messergebnis für den leeren rotierenden Drehteller in Abb. 42), ist diese Beobachtung wahrscheinlich auf Inhomogenitäten innerhalb des Absorbers zurückzuführen. Hierdurch sind jene Abweichungen zwischen den Berechnungs- und Messergebnissen erklärbar, welche einen insgesamt höheren Streugrad für Probe 1, 4 und 5 in den Messungergebnissen umfassen.

Für tiefe Frequenzen kann das hier beschriebene Berechnungsmodell negative Absorptionsgrade ergeben. Dies ist mit der Höhe der Probe bzw. der Ausdehnung auf der z-Achse zu begründen. Für große Polarwinkel einer einfallenden ebenen Welle stellt die Probe dadurch ein größeres Hindernis dar und kann somit zu einer größeren reflektierten Leistung als die flache Referenzplatte führen. Die negativen Absorptionsgrade sind unphysikalisch, wenn die Probe den Ausschnitt einer Raumbegrenzungsfläche repräsentiert.

Die Implementierung der KHI kann unechte Resonanzen aufweisen, welche durch Eigenfrequenzen im Inneren der Probe bedingt sind. In den Berechnungsergebnissen für die Halbkugel (siehe Abb. 49) sind diese für einige Frequenzen in Form von Sprüngen erkennbar. Die fünf Proben weisen gleichmäßige Kurvenverläufe der vorhergesagten Koeffizienten auf und lassen somit keine unechten Resonanzen vermuten. Mit der Implementierung der Burton-Miller-Methode werden mögliche unechte Resonanzen unterbunden, daher ist diese der einfachen KHI vorzuziehen und sollte in Folgeuntersuchungen verwendet werden. Aufgrund des deutlich höheren Rechen- und Speicheraufwands stellt die Burton-Miller-Methode allerdings möglicherweise Einschränkungen hinsichtlich der höchstmöglichen Frequenz in den Berechnungen dar.

Für Proben mit absorbierenden Teilflächen, deren Verhalten sicher als lokal reagierend angenommen werden kann, scheint das beschriebene numerische Berechnungsmodell vielversprechend zu sein. Zukünftige Untersuchungen sollten die Auswirkungen von komplexen Wandimpedanzen anstatt der hier verwendeten reellen Wandimpedanzen auf die Berechnungsergebnisse untersuchen. Außerdem sind Berechnungen für Proben durchzuführen, welche einen nach ISO 17497-1 vorgegebenen Durchmesser von mindestens $3m$ aufweisen. Das Berechnungsmodell kann ferner durch die Hinzunahme von Kugelwellen als einfallende Wellen erweitert werden.

In Anlehnung an die Ausführungen in Kapitel 3, Abschnitt 3.1 ist eine Erweiterung des Berechnungsmodells durch die Berücksichtigung des Schallfeldes innerhalb des Absorbers denkbar und sollte weiter erforscht werden. Diese ist in Form einer gekoppelten Implementierung von zwei REM-Modellen umzusetzen. Das erste Modell würde dabei entsprechend dem in dieser Arbeit beschriebenen Berechnungsmodell das äußere Schallfeld im Medium der Luft abbilden. Das zweite Modell könnte das Schallfeld innerhalb des Absorbers unter Berücksichtigung der komplexen Absorberwellenzahl beschreiben. Die Oberflächen des Absorbers stellen für die Kopplung der Modelle die Schnitt- bzw. Übergangsflächen dar, für die Randbedingungen hinsichtlich des Schalldrucks und der Schallschnelle festzulegen sind.

Literaturverzeichnis

Ahrens, J. (2012): *Analytic Methods of Sound Field Synthesis.* T-Labs Series in Telecommunication Services. Springer Berlin Heidelberg.

Allard, J.-F. und Y. Champoux (1992): „New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials." In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(6) S. 3346–3353.

Berzborn, M.; R. Bomhardt; J. Klein; J.-G. Richter und M. Vorländer (2017): „The ITA-Toolbox: An Open Source MATLAB Toolbox for Acoustic Measurements and Signal Processing." 43th Annual German Congress on Acoustics, Kiel (Germany), 6 Mar 2017 - 9 Mar 2017.

Bowman, J.J.; T.B. A; P.L.E. Uslenghi und J.S. Asvestas (1987): *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes.* A SUMMA book. Hemisphere Pub. Corp.

Brandao, E.; E. Tijs; A. Lenzi und H.-E. Bree (2011): „A Comparison of Three Methods to Calculate the Surface Impedance and Absorption Coefficient from Measurements Under Free Field or in situ Conditions." In: *Acta Acustica united with Acustica*, 97 S. 1025–1033.

Brinkmann, F. und S. Weinzierl (2017): „AKtools—An Open Software Toolbox for Signal Acquisition, Processing, and Inspection in Acoustics." In: *Audio Engineering Society Convention 142.*

Burton, A. J. und G. F. Miller (1971): „The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems." In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 323(1553) S. 201–210.

Chandler-Wilde, S.N.; S. Langdon und M. Mokgolele (2010): „A high frequency boundary element method for scattering by convex polygons with impedance boundary conditions."

Cox, T. J. et al. (2006): „A Tutorial on Scattering and Diffusion Coefficients for Room Acoustic Surfaces." In: *Acta Acustica united with Acustica*, 92(1) S. 1–15.

Cox, T.J. und P. D'Antonio (2017): *Acoustic Absorbers and Diffusers: Theory, Design and Application.* Taylor & Francis.

Delany, M.E. und E.N. Bazley (1970): „Acoustical properties of fibrous absorbent materials." In: *Applied acoustics*, 3(2) S. 105–116.

Fuchs, H.V. (2016): *Raum-Akustik und Lärm-Minderung : Konzepte mit innovativen Schallabsorbern und -dämpfern.* VDI-Buch, 4th ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Geuzaine, J.-F., C.and Remacle (2009): „Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities." In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) S. 1309–1331.

Hargreaves, J.A. und T.J. Cox (2008): „A transient boundary element method model of Schroeder diffuser scattering using well mouth impedance." In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5) S. 2942–2951.

Hirosawa, K.; H. Nakagawa; M. Kon und A. Yamamoto (2009): „Investigation of absorption coefficient measurement of acoustical materials by boundary element method using particle velocity and sound pressure sensor in free field." In: *Acoustical Science and Technology*, 30(6) S. 442–445.

ISO (1993): *ISO 9613-1:1993-06: Acoustics - Attenuation of sound during propagation outdoors Part 1: Calculation of the absorption of sound by the atmosphere.* Geneva: ISO.

ISO (2002): *ISO 13472-1:2002-06: Acoustics - Measurement of sound absorption properties of road surfaces in situ - Part 1: Extended surface method.* Geneva: ISO.

ISO (2004): *ISO 17497-1:2004-05: Acoustics - Sound-scattering properties of surfaces - Part 1: Measurement of the random-incidence scattering coefficient in a reverberation room.* Geneva: ISO.

ISO (2012): *ISO 17497-2:2012-05: Acoustics - Sound-scattering properties of surfaces - Part 2: Measurement of the directional diffusion coef cient in a free field.* Geneva: ISO.

ISO, DIN EN (1997): *DIN EN ISO 266:1997-08: Akustik – Normfrequenzen.* European Committee for Standardization.

ISO, DIN EN (2001): *DIN EN ISO 10534-2:2001-10: Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren - Teil 2: Verfahren mit Übertragungsfunktion.* Geneva: ISO.

ISO, DIN EN (2003): *DIN EN ISO 354:2003-12: Messung der Schallabsorption in Hallräumen.* 354. Berlin: Beuth.

Ji, Z.; Q. Ma und Z. Zhang (1994): „Application of the Boundary Element Method to Predicting Acoustic Performance of Expansion Chamber Mufflers With Mean Flow." In: *Journal of Sound and Vibration*, 173(1) S. 57 – 71.

Kosaka, Y. und T. Sakuma (2005): „Numerical examination on scattering coefficients of architectural surfaces using the boundary element method." In: *Acoustical Science and Technology*, 26(2) S. 136–144.

Kuttruff, H. (2009): *Room Acoustics, Fifth Edition.* Taylor & Francis.

Lerch, R.; G. Sessler und D. Wolf (2009): *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen.* Springer.

Marburg, S. (2002): „Six Boundary Elements Per Wavelength: Is That Enough?" In: *Journal of Computational Acoustics*, 10(01) S. 25–51.

Marburg, S. (2016): „The Burton and Miller Method: Unlocking Another Mystery of Its Coupling Parameter." In: *Journal of Computational Acoustics*, 24(01) S. 1550016.

Marburg, S. und B. Nolte (2008): *Computational acoustics of noise propagation in fluids: finite and boundary element methods*, vol. 578. Springer.

Meister, A. und C. Vömel (2011): *Numerik linearer Gleichungssysteme.* Vieweg+Teubner Verlag.

Mommertz, E. (2000a): „Determination of scattering coefficients from the reflection directivity of architectural surfaces." In: *Applied Acoustics*, 60 S. 201–203.

Mommertz, E. (2000b): „Messung, Modellierung und Einsatz der Schallstreuung in der raumakustischen Planungspraxis." In: *Tagung: Fortschritte der Akustik, Oldenburg*, Deutsche Gesellschaft für Akustik. S. 60–66.

Möser, M. (2015): *Technische Akustik.* VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg.

Pelzer, S.; L. Shtrepi; M. Rychtarikova und A. Astolfi (2011): „Influence of scattering coefficient on the prediction of room acoustic parameters in virtual concert hall." In: *Proc. of the 6th International Conference on Acoustics.*

Perrey-Debain, E.; J. Trevelyan und P. Bettess (2003): „Use of Wave Boundary Elements for Acoustic Computations." In: *Journal of Computational Acoustics*, 11(02) S. 305–321.

Sakuma, T. und Y. Kosaka (2004): „Comparison Between Scattering Coefficients Determined By Specimen Rotation And By Directivity Correlation." In: .

Sakuma, T.; Y. Kosaka; L. De Geetere und M. Vorländer (2009): „Relationship between the scattering coefficients determined with coherent averaging and

with directivity correlation." In: *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4) S. 669–677.

Sakuma, T. und H. Lee (2014): „Recent Topics in Acoustic Scattering Coefficient Determination for Wall Surfaces." In: *Building Acoustics*, 21(2) S. 105–115.

Sauter, S. und C. Schwab (2004): *Randelementmethoden: Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Vieweg+Teubner Verlag.

Savioja, L. und U.P. Svensson (2015): „Overview of geometrical room acoustic modeling techniques." In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(2) S. 708–730.

Schroeder, M. et al. (2007): *Springer Handbook of Acoustics*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated.

Śmigaj, W.; T. Betcke; S. Arridge; J. Phillips und M. Schweiger (2015): „Solving Boundary Integral Problems with BEM++." In: *ACM Trans. Math. Softw.*, 41(2) S. 6:1–6:40.

Tukey, J.W. (1984): „An introduction to the calculations of numerical spectrum analysis." In: S. 811–835.

Vorländer, M. und E. Mommertz (2000): „Definition and measurement of random-incidence scattering coefficients." In: *Applied Acoustics*, 60(2) S. 187 – 199.

Weinzierl, S. (2008): *Handbuch der Audiotechnik*. VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg.

Wu, T.W. und C.Y.R. Chen (2007): „Boundary element analysis of reactive mufflers and packed silencers with catalyst converters." In: *Electronic Journal of Boundary Elements*, 1(2).

Xiao, L.; T.J. Cox und M.R. Avis (2005): „Active diffusers: some prototypes and 2D measurements." In: *Journal of Sound and Vibration*, 285(1) S. 321 – 339.

Yang, L. und Z. Ji (2013): „Boundary element approaches for acoustic computation of perforated silencers." In: *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXVI*, 56 S. 47.

Anhang: Polarplots für die fünf Proben

Referenzplatte

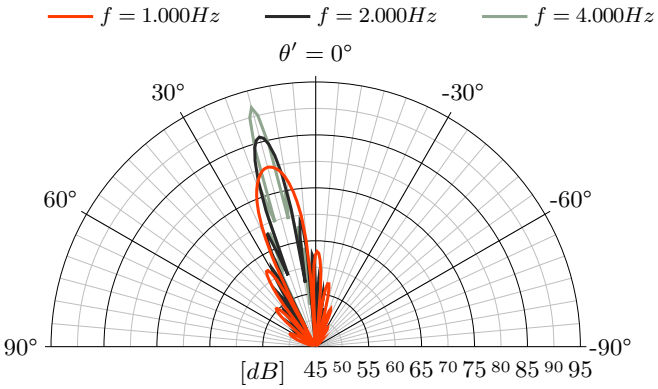

Abbildung 57: Polarplots für die Referenzplatte mit $\theta = 15°, \phi = 0°$

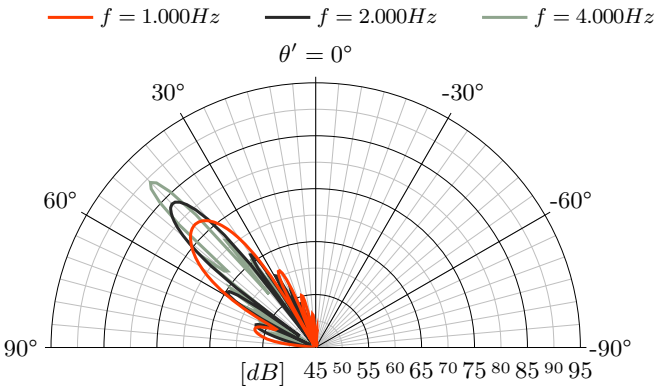

Abbildung 58: Polarplots für die Referenzplatte mit $\theta = 45°, \phi = 0°$

Probe 1

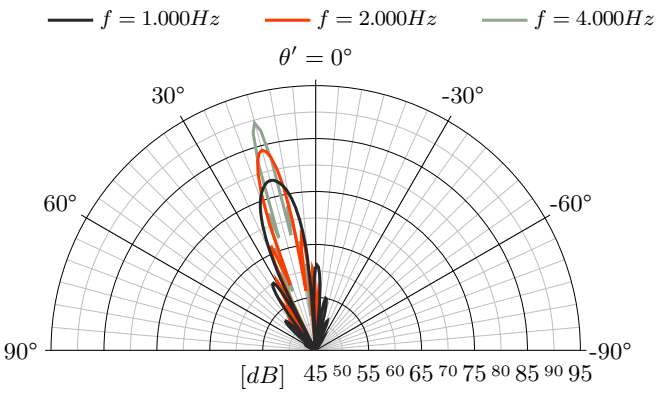

Abbildung 59: Polarplots für Probe 1 mit $\theta = 15°, \phi = 0°$

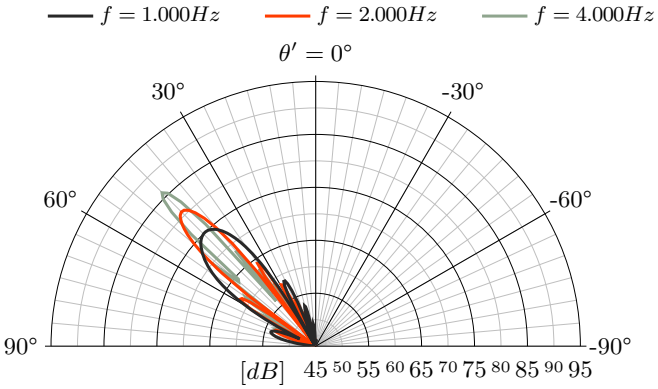

Abbildung 60: Polarplots für Probe 1 mit $\theta = 45°, \phi = 0°$

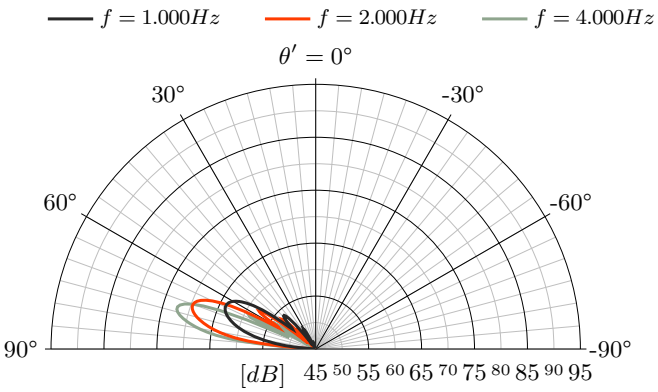

Abbildung 61: Polarplots für Probe 1 mit $\theta = 75°, \phi = 0°$

Probe 2

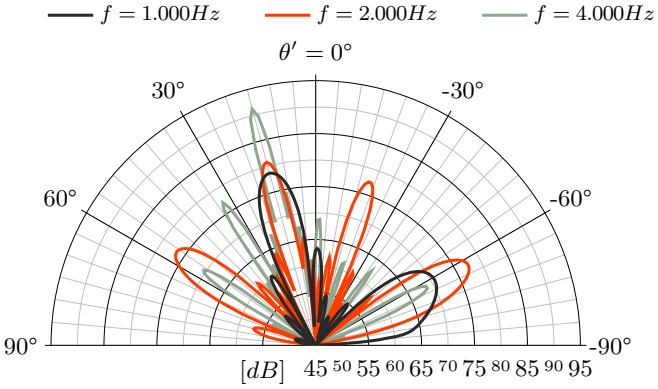

Abbildung 62: Polarplots für Probe 2 mit $\theta = 15°, \phi = 0°$

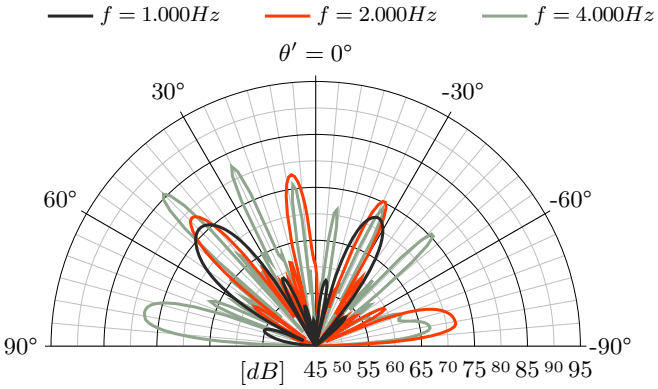

Abbildung 63: Polarplots für Probe 2 mit $\theta = 45°, \phi = 0°$

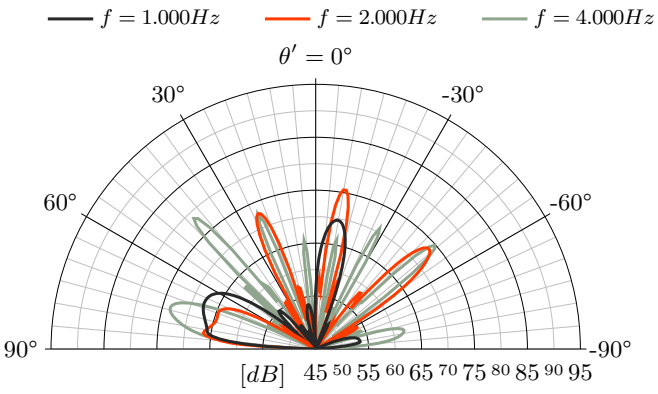

Abbildung 64: Polarplots für Probe 2 mit $\theta = 75°, \phi = 0°$

Probe 3

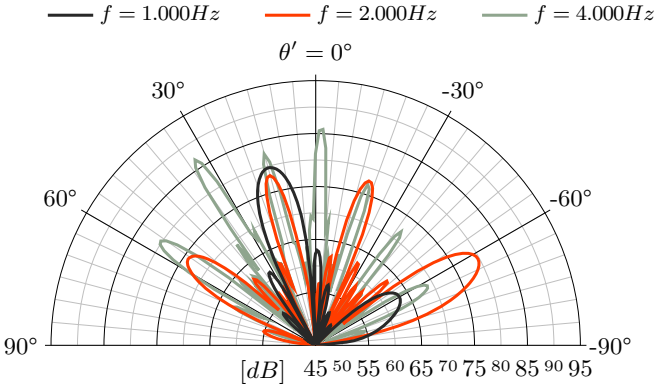

Abbildung 65: Polarplots für Probe 3 mit $\theta = 15°, \phi = 0°$

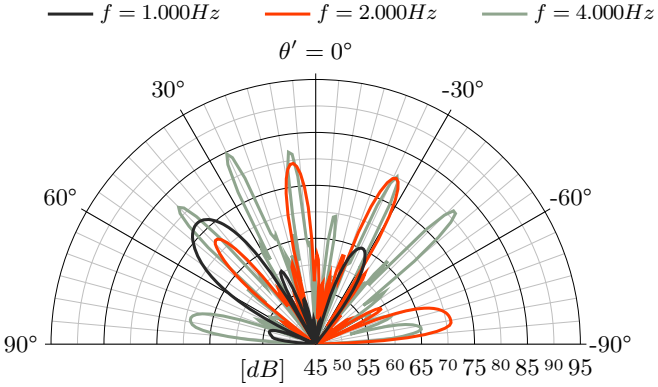

Abbildung 66: Polarplots für Probe 3 mit $\theta = 45°, \phi = 0°$

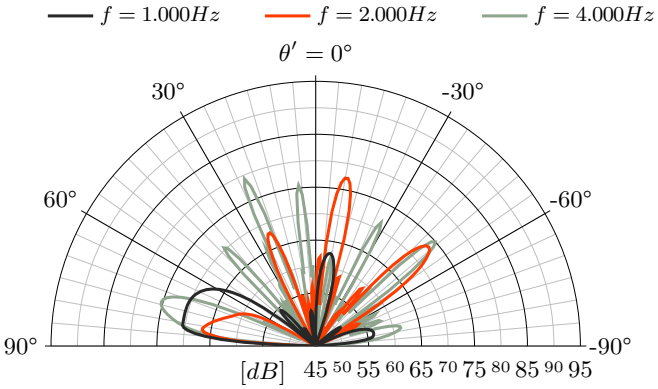

Abbildung 67: Polarplots für Probe 3 mit $\theta = 75°, \phi = 0°$

Probe 4

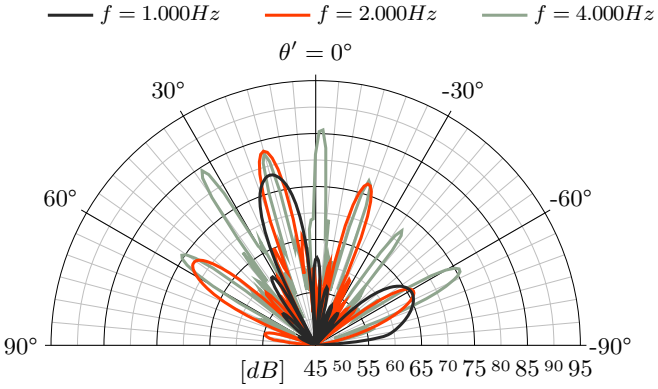

Abbildung 68: Polarplots für Probe 4 mit $\theta = 15°, \phi = 0°$

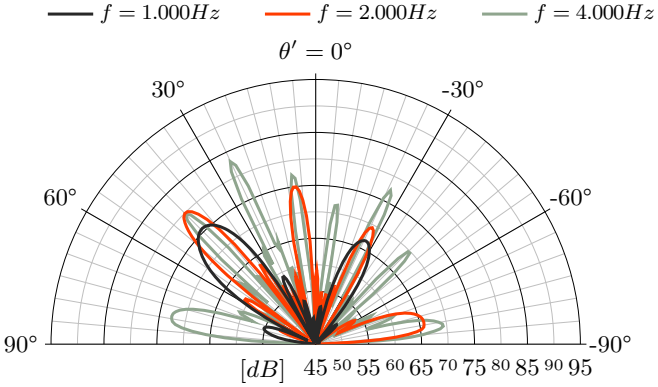

Abbildung 69: Polarplots für Probe 4 mit $\theta = 45°, \phi = 0°$

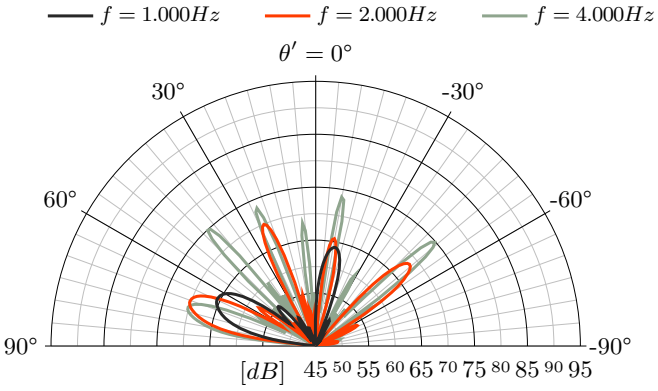

Abbildung 70: Polarplots für Probe 4 mit $\theta = 75°, \phi = 0°$

Probe 5

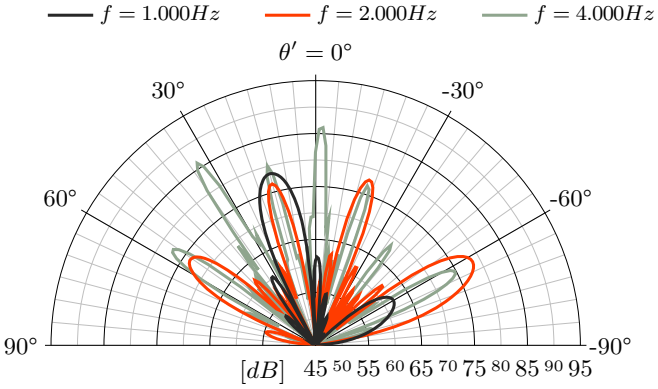

Abbildung 71: Polarplots für Probe 5 mit $\theta = 15°, \phi = 0°$

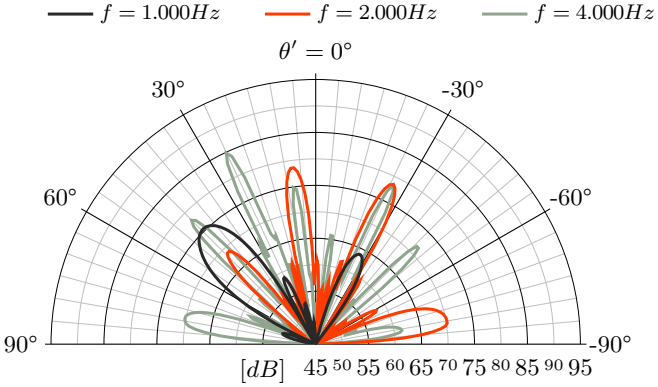

Abbildung 72: Polarplots für Probe 1 mit $\theta = 45°, \phi = 0°$

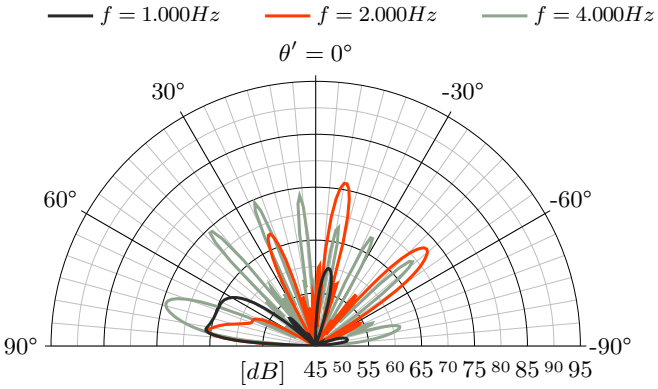

Abbildung 73: Polarplots für Probe 5 mit $\theta = 75°, \phi = 0°$