Abschlussarbeit für die Prüfung zum Master of Science
im Studiengang Audiokommunikation und -technologie

Die Richtungsabhängigkeit der Abstrahlung eines doppelwandigen Plattenresonators in Impedanzgitteranordnung

Martin Klüpfel [redacted] Bearbeitung

Prof. Dr. Stefan Weinzierl
Dipl.-Ing. (FH) Ralf Bauer-Diefenbach Begutachtung

Technische Universität Berlin
Fakultät I – Geistes- und Bildungswissenschaften
Institut für Sprache und Kommunikation – Fachgebiet Audiokommunikation

Zusammenfassung

In der vorliegenden Abschlussarbeit wird ein Berechnungsverfahren zur Beschreibung des Reflexionsverhaltens von doppelwandigen Plattenresonatoren in Impedanzgitteranordnung vorgestellt. Hierzu wird eine, sich periodisch wiederholende, Struktur von Teilresonatoren unterschiedlicher Breite gebildet. Für die Charakterisierung des Verhaltens dieser Teilresonatoren wird eine erweiterte Näherungslösung zur Bestimmung der resultierenden Gesamtimpedanzen anhand der endlichen Abmessungen vorgeschlagen, die Mehrlagigkeit der Anordnung wird mit einer Kettenschaltung von Zweitoren unter Verwendung einer elektro-akustischen Analogie berücksichtigt. Eine Berechnung des Reflexionsverhaltens mithilfe der Reflexionsfaktoren erfolgt schließlich aus der Überlagerung von Teilstrahlern mit Methoden der Fourier-Akustik. Abschließend erfolgt eine messtechnische Überprüfung des berechneten Reflexions- und Absorptionsverhaltens.

Abstract

In the present thesis, a calculation method for the description of the reflection behavior of double-walled plate resonators in an impedance grid arrangement is presented. For this purpose, a periodically repeated structure of resonators of different widths is formed. For the characterization of the behavior of the partial resonators, an extended approximation solution is proposed tp determine the resulting total impedances on the basis of finite dimensions, the multi-layered structure is represented by a cascade connection of a two-port network using an electro-acoustic analogy. The calculation of the reflection behavior based on the reflection factors is carried out by the superposition of partial radiators with methods of Fourier acoustics. Finally, a metrological check of the calculated reflection and absorption behavior takes place.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1
- 1.1 Definition und Historie des Resonanzabsorbers . . . 1
- 1.2 Stand der Forschung . . . 3
  - 1.2.1 Resonanzabsorber . . . 3
  - 1.2.2 Körperschall . . . 4
  - 1.2.3 Plattentheorie . . . 4
- 1.3 Zielsetzung . . . 4

2 Beschreibung des Plattenverhaltens 6
- 2.1 Wellengleichungen . . . 6
  - 2.1.1 Schallausbreitung in Luft . . . 6
  - 2.1.2 Schallausbreitung im Festkörper . . . 7
  - 2.1.3 Plattentheorie nach Kirchhoff-Love . . . 7
  - 2.1.4 Schallausbreitung in dünnen Platten . . . 8
  - 2.1.5 Anregung und Abstrahlung von Körperschall . . . 10
- 2.2 Analytisch, Numerisch, Qualitativ . . . 11
- 2.3 Trennimpedanz . . . 11
  - 2.3.1 Unendlich ausgedehnte, ideale Platte . . . 12
  - 2.3.2 Unendlich ausgedehnte Platte mit Verlusten . . . 13
  - 2.3.3 Näherungslösung für seitlich begrenzte Platte in einem Schallschirm . 13
- 2.4 Vollständige Analyse des Schallfeldes . . . 15
  - 2.4.1 Plattenstreifen . . . 15
  - 2.4.2 Plattenstreifen in einem Kanal . . . 16
  - 2.4.3 Plattenstreifen in unendlicher Schallwand . . . 17
- 2.5 Gegenüberstellung . . . 18

3 Bestimmung der elektro-akustischen Ersatzschaltung 20
- 3.1 Unendlich ausgedehnte Anordnung . . . 21
- 3.2 Seitlich begrenzte Platte in einem Schallschirm . . . 22

3.3 Anpassung und Erweiterung der Näherungslösung 23
3.3.1 Effektive Poissonzahl 24
3.3.2 Effektive Plattendicke 26
3.3.3 Effektive Luftschicht 27
3.4 Gesamtimpedanzen des doppelwandigen Plattenresonators 30

4 Berechnung des resultierenden Schallfeldes 33
4.1 Reflexionsverhalten einer periodischen Oberfläche 33
4.1.1 Örtliche Fourier-Zerlegung der Oberfläche 33
4.1.2 Formulierung des resultierenden Schallfeldes 35
4.1.3 Anpassung für Feld-erregte Strahlungsimpedanzen 36
4.1.4 Berechnung der Reflexionsfaktoren 36
4.2 Berechnung des Abstrahlverhaltens eines doppelwandigen Plattenresonators . 37

5 Messungen 39
5.1 Testobjekte 39
5.2 Versuchsaufbau Reflexionsverhalten 40
5.2.1 Fernfeldbedingungen 41
5.2.2 Messverfahren 43
5.2.3 Digitale Signalverarbeitung 44
5.3 Versuchsaufbau Schallabsorptionsgrad 46
5.4 Messergebnisse 48
5.4.1 Reflexionsverhalten 48
5.4.2 Schallabsorptionsgrad 51

6 Diskussion und Zusammenfassung 54

Literaturverzeichnis 58

A Elektro-Akustische Zweitordarstellung 62

B Messergebnisse 65
B.1 Spektren 65
B.1.1 $\theta_e = 20\,^\circ$ 65
B.1.2 $\theta_e = 40\,^\circ$ 84
B.2 Polarplots 103
B.2.1 $\theta_e = 20\,^\circ$ 103
B.2.2 $\theta_e = 40\,^\circ$ 108

Kapitel 1

Einleitung

Aufgrund der Anzahl und Ungenauigkeit der üblicherweise verwendeten Begriffe – Folienresonator, Panelabsorber, Plattenresonator, Plattenschwinger oder Membranabsorber – sei eine kurze Begriffsklärung anhand der Historie, zumeist in der Verwendung als Folienresonanzabsorber, vorangestellt.

1.1 Definition und Historie des Resonanzabsorbers

Leicht kann die allgemeinste Form dieses Resonators beschrieben werden, sie besteht aus einer Massenbelegung m'', die in einem Abstand a vor einer starren Wand ein Luftvolumen einschließt, in einer mechanisch-akustischen Analogie ist dies ein Masse-Feder-System.

Für Fuchs (2017) ergibt sich aus der, im Vergleich zu der Luftmasse der auftreffenden Schallwelle, sehr hohen Massenbelegung, die direkte Folgerung, dass die Anordnung lediglich als Resonanzsystem anregbar sein kann. Dies ist durch Eigenmoden der Flächenmasse oder durch die Masse-Feder-Resonanz möglich.

Offenbar bestimmt, unter der idealisierten Voraussetzung von Inkompressibilität, die Elastizität der Flächenmasse und die Randbedingungen der Auflagerung das Verhalten des Gesamtsystems. Die Grundtypen für die Beschreibung der Flächenmasse sind mit Mechel (1995) biegesteife Platte, biegeelastische Platte, Membran und schlaffe Folie.

Nun folgen bei Ausschluss der Möglichkeit der elastischen Verformung der Massenbelegung zwei theoretische Grenzfälle. Wird des weiteren die plastische Verformung der Flächenmasse nicht zugelassen, ergibt sich die Anordnung der biegesteifen Platte. Hier ist eine Anregung durch das auftreffende Schallfeld ausschließlich dann möglich, wenn die Lagerung elastisch erfolgt und kolbenförmige Schwingungen der gesamten Platte erlaubt.

Schließlich ergibt sich der zweite Grenzfall, die schlaffe Folie, hier wird nun eine plastische Verformung zugelassen, die Folie folgt in jedem Punkt direkt einer Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite, als Gegenkraft wirkt lediglich die Trägheit des Massenbelags. Bereits Schultz (1962) verwendete diese Näherung bei der Auslegung von Resonanzabsorbern mit dünnen Holzplatten für Rundfunkstudios, durch umfangreiche Messreihen konnte die

näherungsweise Gültigkeit dieser Annahme von Fasold et al. (1987) bestätigt werden. Bei senkrechtem Schalleinfall und unter der Voraussetzung lokal reagierenden Verhaltens des Luftvolumens, ist nach Mechel (1995) die Eingangsimpedanz

$$Z = j\omega m'' - jZ_0 \cot(k_0 a) \ . \tag{1.1}$$

Unter der Annahme, dass die Wellenlänge hinreichend groß gegenüber dem Abstand a ist ($k_0 a \ll 1$), sowie des Abbruchs der Laurentreihe des Kotangens nach $n = 0$, folgt aus der Forderung des Verschwindens des Imaginärteils für die Kreisfrequenz ω_0 und, mit Dichte ρ_0 und Schallgeschwindigkeit von Luft c_0 bei $T = 20\,°\mathrm{C}$, für die Resonanzfrequenz f_0:

$$\omega_0 = c_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{m'' \cdot a}}\,; \quad f_0 = \frac{600}{\sqrt{m'' a}} \quad ([m] = \mathrm{kg/m^2};\ [a] = \mathrm{cm}) \ . \tag{1.2}$$

Es ist also bereits, unter Vernachlässigung der beteiligten Plattenresonanzen und bei Beachtung einiger Designvorschriften hinsichtlich der Abmessungen und des Frequenzbereiches, möglich, mit der Betrachtung des Grenzfalls der schlaffen Folie verwendbare Ergebnisse für Resonanzabsorber mit rigiden Massenbelägen zu erhalten.

Für den Grundtyp der Membran ergibt sich die Elastizität aus den, durch die Einspannung verursachten, Zugspannungen in der Flächenmasse. Die Membran ist somit auch für sich selbst resonanzfähig, ein Luftvolumen als Feder ist nicht notwendig.

Im Fall der biegeelastischen Platte folgt die Elastizität aus den Materialeigenschaften, charakterisiert durch den Biegemodul B. Hier ist die Anregung und Ausbreitung von Biegewellen möglich, welche in erzwungene Spur-Biegewellen λ_s und freie Biegewellen λ_b unterteilt werden. Freie Biegewellen werden durch Transienten oder bei Daueranregung durch Störstellen verursacht, Spur-Biegewellen, durch das Luftschallfeld erzwungen. Die Relation der Wellenlängen ergibt sich bei Koinzidenz durch

$$\lambda_s = \frac{\lambda_0}{\sin\varphi} \ . \tag{1.3}$$

Aufgrund der unterschiedlichen Dispersionsrelation von Biegewellen im Festkörper ($\lambda_b \sim 1/\sqrt{\omega}$) und Longitudinalwellen in Luft ($\lambda_0 \sim 1/\omega$), gibt es für jeden Einfallswinkel φ einer ebenen Welle eine Koinzidenzfrequenz, bei welcher gilt: $\lambda_s = \lambda_b$. Hier liegen mögliche Eigenformen der (unendlich ausgedehnten) biegeelastischen Platte, weitere ergeben sich bei endlichen Abmessungen aus ebendiesen, sowie der Art der Lagerung.

Beim Design von Resonanzabsorbern befindet sich die Abstimmungsfrequenz üblicherweise weit unterhalb der niedrigsten Koinzidenzfrequenz, der Koinzidenzgrenzfrequenz. Auch ist man bestrebt, eine möglichst geringe Anzahl von Fehlstellen zu erzeugen und wählt daher die Abmessungen groß gegenüber der Wellenlänge der freien Biegewellen im Material. Nach einer von Mechel (1995) ohne Quellenangabe zitierten Abschätzung Heckels, können freie Biegewellen vernachlässigt werden, wenn die Abmessungen der Platte groß gegenüber $\lambda_b/2$

sind. Des Weiteren wird die Richtcharakteristik der Anordnung zumeist nicht betrachtet, im Standardwerk von Cremer et al. (2009) wird diese lediglich kurz erwähnt, jedoch nicht näher beschrieben.

1.2 Stand der Forschung

Thematisch gruppiert wird eine kurze Zusammenfassung des aktuellen Stands der Forschung in den, für die vorliegende Arbeit, relevanten Bereichen gegeben.

1.2.1 Resonanzabsorber

Die erste ausführliche Beschreibung eines, als Membran-Absorber bezeichneten, Resonanzabsorbers als Tieftonabsorber erfolgt in Rundfunkstudios durch Gilford (1952), wie auch in der detaillierten Design Richtlinie von Schultz (1962), wird die Frontplatte vereinfacht als schlaffen Folie beschrieben. Anhand von empirischen Methoden wird bei Variation der Tiefe, der Flächenmasse, sowie der Resonanzfrequenz der Anordnung auf den Maximalwert des Absorptionskoeffizienten und die Bandbreite geschlossen. Auch für die Art der Auflagerung und deren Abstand, sowie den zu verwendenden Mineralfaserdämmstoff, werden Vorgaben empirisch ermittelt. Die Beschreibungen von Fasold et al. (1987) und Fasold und Veres (2003) erfolgen in dieser Tradition, für viele Beispiele werden die Ergebnisse von Hallraummessungen des Absorptionskoeffizienten vorgestellt. Allerdings erfolgt der einschränkende Hinweis, Resonanzabsorber bei der Auslegung anhand dieser empirischen Methode vor der Verwendung nach Möglichkeit durch Messung zu überprüfen.

Eine analytische Beschreibung des Verhaltens eines Plattenabsorbers wurde von Ford und McCormick (1969) vorgelegt. Unter den Annahmen der festen Einspannung der Plattenränder und des Verhaltens des eingeschlossenen Volumens als lokal reagierend, wird eine akustische Impedanz für eine mehrschichtige Anordnung hergeleitet. Von Zhou et al. (1998) werden an Beispielanordnungen gute Übereinstimmungen von Berechnungen des Absorptionskoeffizienten nach Ford und McCormick (1969) und Messungen im Kundtschen Rohr festgestellt. Durch die vollflächige Verbindung einer dünnen und schweren Frontplatte mit einer elastischen Schicht, ermöglicht das Prinzip eines Verbundplattenresonators nach Fuchs und Zha (1996) die Bedämpfung möglichst vieler Plattenresonanzen und vergrößert die Bandbreite der Wirksamkeit der Anordnung als Resonanzabsorber.

Unter Annahme der Plattenauflagerung als einfach aufgestützt, formuliert Mechel (1989) eine Näherungslösung anhand der akustischen Wandimpedanz. Als Generalisierung zeigen Mechel (1998), für die Schalltransmission durch eine einfach aufgestütze Platte, und Mechel (2001), für einen Resonanzabsorber, jeweils eine exakte Lösung einer einseitig begrenzten Anordnung.

Als Standardwerk für eine ausführliche und grundlegende Beschreibung von Schallabsorbern ist die Veröffentlichung in drei Bänden von Mechel (1989) zu nennen, eine kurze und übersichtliche Zusammenfassung ist zusätzlich von Mechel (2013) verfügbar.

1.2.2 Körperschall

Durch die Anwendung des Reziprozitätsprinzips schließen Cremer et al. (2009) auf den Zusammenhang zwischen Anregung und Abstrahlung einer Platte. Die Beschreibung der Abstrahlung von Ebenen erfolgte zuerst von Heckl (1977), eine weitere Auseinandersetzung – in diesem Fall allerdings mit dem Ziel der Verschlechterung der Abstrahlung – erfolgt vor allem in den Bereichen des Technischen Lärmschutzes und der Maschinenakustik bei Kollmann (2006) und Schirmer (2006). Die „Gerichtete Schallabstrahlung von Außenwänden des Industriebaus bei und oberhalb der Grenzfrequenz“ hat Lotze (1980) betrachtet. Das akustische Verhalten von Doppelwandsystemen wird von Thomas (2005), sowie Lu und Xin (2014) untersucht.

1.2.3 Plattentheorie

Eine detaillierte Einführung in die Kirchhoff-Lovesche Plattentheorie geben Hake und Meskouris (2007), Lösungen der Plattengleichung in Abhängigkeit der Randbedingungen, sowie ausführliche Beschreibungen der Eigenmoden von Platten zeigen Leissa (1969) und Blevins (1995), auch für den Fall der vollständig freien Auflagerung existiert eine exakte Lösung von Hurlebaus et al. (2001).

1.3 Zielsetzung

In der Raumakustik sind möglichst genaue Beschreibungen des Verhaltens von Begrenzungsflächen nötig, um sowohl qualitativ, als auch durch Simulationsuntersuchungen oder Berechnungen, aussagekräftige Vorhersagen treffen zu können. Üblicherweise wird das Verhalten an einer Begrenzungsfläche durch Reflexion, Absorption und Transmission charakterisiert. Für den Fall einer Reflexion ergibt sich des Weiteren die Unterscheidung in den spekularen Anteil nach dem Reflexionsgesetz und einen gestreuten Anteil. Parameter zur quantitativen Beschreibung sind nach ISO (2004) der Streugrad, sowie nach ISO (2012) der Diffusionskoeffizient. Ein übliche Möglichkeit zur Erhöhung des gestreuten Anteils ist die Verwendung von Diffusoren, einfach verständlich sind beispielsweise eindimensional wirksame QRD- oder Maximalfolgendiffusoren nach Schroeder (1975). Hierbei werden, aufgrund der Variation der Vertiefungen oder Breiten, durch Interferenzmuster vermehrt diffuse Reflexionen erreicht.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht ein ähnliches Verhalten bezüglich des Reflexionsverhaltens eines Objekts mit einer glatten Oberfläche zu beschreiben. Zu diesem Zweck wird, anhand der periodischen Kombination von unterschiedlich breiten, doppelwandigen Plattenresonatoren in Impedanzgitteranordnung nach Abbildung 1.1, die Abstrahlung eines Schallfeldes von einer allseitig begrenzten Anordnung berechnet. Die Grundlage hierfür bilden Teilresonatoren unterschiedlicher Abmessungen und somit auch verschiedener Impedanzen und Resonanzverhalten. Hierfür wird zunächst eine erweiterte Näherungslösung für die Berechnung der Gesamtimpedanzen mehrlagiger Systeme auf Basis der endlichen

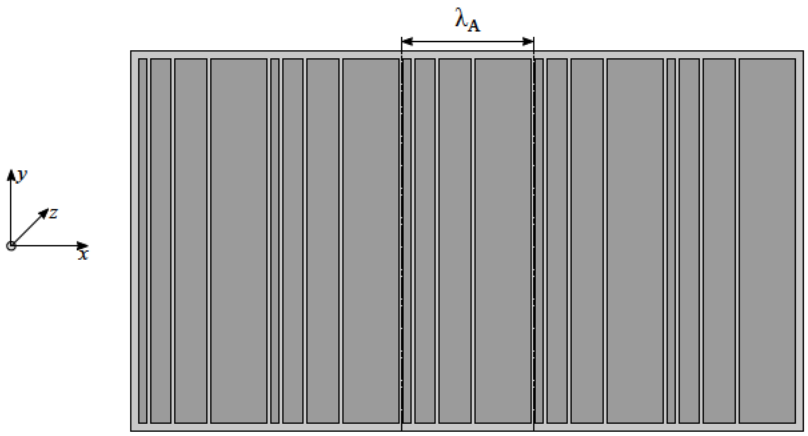

ABBILDUNG 1.1 Schematische Darstellung des doppelwandigen Resonators in Impedanzgitteranordnung als Horizontalschnitt mit Blick durch die Frontplatte

Abmessungen vorgeschlagen, die Berechnungen erfolgen anhand einer elektro-akustischen Analogie. Abschließend wird eine messtechnische Überprüfung des berechneten Verhaltens durchgeführt.

Kapitel 2

Beschreibung des Plattenverhaltens

Als Grundlage einer Problemstellung der Technischen Akustik muss, individuell für den jeweiligen Fall, eine gemeinsame Lösung für die Wellengleichungen der auftretenden Wellenarten in den beteiligten Media gefunden werden. Zur Beschreibung des Plattenverhaltens sind geeignete Ansätze für das Luft- und Körperschallfeld aufzustellen, welche dann über die Randbedingungen an der Grenzfläche zusammenzuführen sind.

2.1 Wellengleichungen

Die Wellengleichungen sind – mit Verweis auf die Standardwerke von Cremer et al. (2009), Möser (2015) und Lerch (2009) – inklusive einer kurzen Erläuterung der Voraussetzungen und Idealisierungen, jedoch ohne weitere Herleitung für den allgemeinen Fall angegeben. Bei Luftschallwellen ist dies der dreidimensionale, für Biegewellen der zweidimensionale.

2.1.1 Schallausbreitung in Luft

Aus der grundlegenden Annahme des Mediums Luft als ideales kompressibles Fluid folgt, bedingt durch die ausschließliche Volumenelastizität (es ist nur die Aufnahme von Normalspannungen möglich), bei der Ausbreitung von Luftschall der Charakter als Longitudinalwelle (Schwingung in Ausbreitungsrichtung) und die Anwendbarkeit der Euler-Gleichungen für Bewegung und Kontinuität. Aufgrund der schnellen Abfolge der Zustandsänderungen werden diese als adiabatisch, also ohne Energieaustausch mit der Umgebung, angenommen. Fundamental ist auch die Linearisierung der Euler-Grundgleichungen, sowie der adiabatischen Zustandsgleichung, durchführbar wegen der kleinen dynamischen Druckänderungen einer Schallwelle im, für die Audiokommunikation relevanten Bereich bis ca. 100 dB ($\equiv 20\,\mathrm{Pa}$), verglichen mit dem hydrostatischen Druck von $10^{-5}\,\mathrm{Pa}$. Durch Kombination dieser drei Gleichungen folgt eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung als homogene Wellengleichung

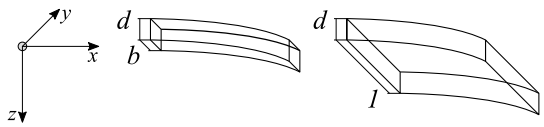

Abbildung 2.1 Durchbiegung eines Stabes (Dicke: d, Breite: b) und einer Platte (Dicke: d, Breite 1)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \tag{2.1}$$

für den Schalldruck p mit dem Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Bei der Betrachtung von harmonischen Schwingungen mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ kann diese auch in die, als Helmholtz-Gleichung bezeichnete, Form

$$\Delta p + k_0^2 p = 0 \tag{2.2}$$

mit der Wellenzahl $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ überführt werden.

2.1.2 Schallausbreitung im Festkörper

Bei der Ausbreitung von akustischen Wellen in Festkörpern ist nun auch eine Formelastizität des Mediums gegeben, dieses bildet sowohl für Volumen-, als auch Formänderungen (hier ist die Aufnahme von Normal- und Schubspannungen möglich) einen elastischen Widerstand. Unter Voraussetzung von Isotropie sind die Materialkonstanten Elastizitätsmodul E, Schubmodul G, Kompressionsmodul K und Poissonzahl ν ineinander überführbar, zwei dieser Konstanten und die Dichte des Materials sind ausreichend, um das elastische Verhalten eines Festkörpers zu beschreiben. Durch die zusätzliche Fähigkeit des Mediums zur Aufnahme von Schubspannungen existieren im Festkörper neben Longitudinal- auch Transversalwellen (Schwingung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung).

2.1.3 Plattentheorie nach Kirchhoff-Love

Von besonderem Interesse im Bereich der Technischen Akustik, und im speziellen in dieser Arbeit, ist das Verhalten von dünnen Platten. Eine übliche Art der Beschreibung ist mithilfe der Vereinfachungen und Idealisierungen der Theorie für dünne Platten von Kirchhoff-Love, eine gute Einführung ist von Hake und Meskouris (2007) verfügbar, auch Mechel (1998) gibt eine kurze Übersicht der Grundlagen. Die Plattentheorie nach Kirchhoff-Love gilt unabhängig von Berandungsform und Art der Auflagerung für homogene und isotrope Platten, deren Dicke d klein gegenüber der Biegewellenlänge λ_b ist. Die Abgrenzung zu einem Balken erfolgt, aus Abbildung 2.1 ersichtlich, durch die Voraussetzung $d \ll b$, was die Einführung der dimensionslosen Einheitsbreite 1 zur Folge hat. Es wird ideal elastisches Verhalten nach dem hookeschen Gesetz vorausgesetzt, des Weiteren wird die Schubverformung gegenüber der Biegeverformung vernachlässigt, die infinitesimalen Plattenelemente bleiben also immer

eben. Diese Annahmen führen, im Vergleich zu der Betrachtung eines Balkens, zu einer Verhinderung der Möglichkeit der Ausdehnung (respektive des Zusammenziehens) des Plattenelements in Richtung der Flächennormalen. Diese Behinderung der Querkontraktion wird durch die Poissonzahl (auch Querkontraktionszahl) ν berücksichtigt, der Elastizitätsmodul wird daher wie folgt erhöht

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2} \ . \tag{2.3}$$

Die Plattensteifigkeit ergibt sich dann als Produkt aus angepasstem Elastizitätsmodul und Flächenträgheitsmoment I zu

$$B = E \cdot I = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \quad [\mathrm{Pa\,m^3}] \ . \tag{2.4}$$

Aus einer Beispielrechnung erhält man, für eine obere Grenzfrequenz von 10 kHz, bei einer MDF-Platte mit der Schallgeschwindigkeit $c_{MDF} = 2590\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Niemz und Sonderegger (2017) eine Anwendbarkeit für Plattendicken bis

$$d < \frac{\lambda_b}{10} = \frac{2590\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10 \cdot 10\,\mathrm{kHz}} \approx 25.9\,\mathrm{mm} \ , \tag{2.5}$$

es sind nach Vigran (2008) auch optimistischere Annahmen hinsichtlich $d \ll \lambda_b$ mit einem Faktor von 6 üblich. Eine weitere wichtige Bemessungsgrundlage bildet die Frage nach der Berücksichtigung von Eigenfrequenzen der Platte, bei einer allseitigen einfachen Auflagerung ergibt sich für die Resonanzfrequenzen

$$f = 0.45 \cdot c_D \cdot d \left[\left(\frac{m_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{L_y}\right)^2 \right] \ , \tag{2.6}$$

mit den Moden $m_x, m_y = 1, 2, 3, ...$, den Abmessungen in x- und y-Richtung L_x, L_y, sowie der Dehnwellengeschwindigkeit c_D und der Plattendicke d. Es ist direkt ersichtlich, dass bei geringerer Dicke ($f \sim d$) und zunehmenden Abmessungen ($f \sim 1/L$) das Verhalten zunehmend durch Eigenfrequenzen bestimmt wird.

2.1.4 Schallausbreitung in dünnen Platten

In begrenzten Festkörpern sind, durch die Überlagerung von longitudinalen und transversalen Wellenkomponenten, weitere spezielle Wellenformen ausbreitungsfähig. Im Fall der, in Abbildung 2.2 schematisch gezeigten, Dehnwelle überwiegt der transversale Anteil, die Ausbreitung erfolgt tangential zur Oberfläche als Abfolge von Kontraktion und Dilation. Allerdings sind die Auslenkung der Dehnwelle in z-Richtung und die transversale Komponente senkrecht zur Plattenoberfläche sehr gering, daher sind Dehnwellen durch äußere Kräfte nur sehr schwer anzuregen, bzw. in umgekehrter Richtung ist die Abstrahlung von Körperschall aus Dehnwellen zu vernachlässigen. Das Verhalten einer dünnen Platte hinsichtlich der

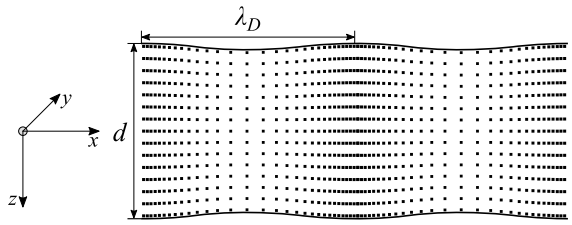

Abbildung 2.2 Ausbreitung einer Dehnwelle in einer dünnen Platte in x-Richtung

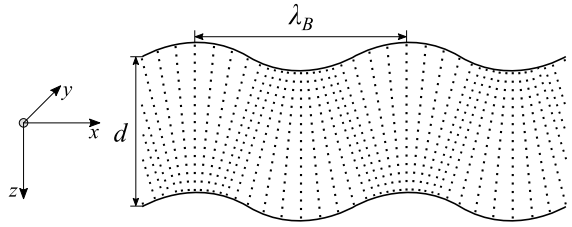

Abbildung 2.3 Ausbreitung einer Biegewelle in einer dünnen Platte in x-Richtung

Anregung, Fortleitung und Abstrahlung von Körperschall wird durch Biegeschwingungen bestimmt. Abbildung 2.3 zeigt die Ausbreitung einer Biegewelle mit der Wellenlänge λ_B in x-Richtung, die Auslenkung erfolgt, mit den Annahmen der Plattentheorie nach Kirchhoff-Love, ausschließlich in z-Richtung. Ausgehend von der statischen Plattengleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta\Delta w = \frac{p}{B} \ , \tag{2.7}$$

mit der statischen Durchbiegung $w(x, y)$, der Drucklast $p(x, y)$, der Dichte des Plattenmaterials ρ und der Plattensteifigkeit B nach Gleichung 2.4, ergibt sich für das Schwingungsverhalten ohne anregendes Druckfeld eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung als homogene Wellengleichung

$$\Delta\Delta w + \frac{\rho d}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{2.8}$$

Analog zur Helmholtz-Gleichung 2.2 lässt sich diese für zeitharmonische Schwingungen, nun bei Anregung mit einem Druckfeld $\delta p(x, y)$, in die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\Delta\Delta - k_B^4\right) v_z = \frac{j\omega}{B}\delta p \tag{2.9}$$

überführen, mit der Schallschnelle in z-Richtung v_z und der Wellenzahl k_B der Biegeschwingung

$$k_B = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\rho d}{B}} \ . \tag{2.10}$$

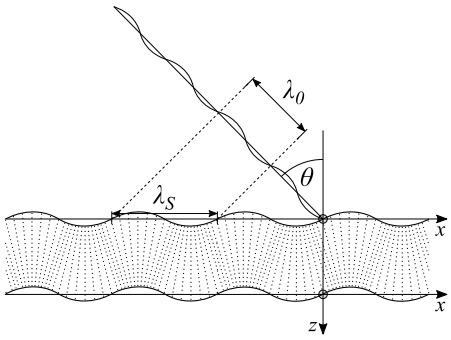

ABBILDUNG 2.4 Projektion (Spuranpassung) der Wellenlänge des anregenden Schallfeldes λ_0 auf die Spur-Biegewellenlänge λ_s

2.1.5 Anregung und Abstrahlung von Körperschall

Im Gegensatz zur Wellenzahl einer ebenen Luftschallwelle $k_0 \sim \omega$, gilt für Biegewellen die Dispersionsrelation $k_B \sim \sqrt{\omega}$. Es existiert daher, für den zweidimensionalen Fall und bei gegebenem Einfallswinkel θ nach Abbildung 2.4, nur eine Frequenz f bei der gilt: $k_0 = k_B$. Diese Frequenz heißt nach Cremer (1942) Koinzidenzfrequenz f_c, bei streifendem Schalleinfall $\theta \to 90°$ folgt als niedrigste Koinzidenzfrequenz die Koinzidenzgrenzfrequenz

$$f_{cr} = \frac{c_0^2}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho d}{B}} \ , \tag{2.11}$$

die Koinzidenzfrequenzen in Abhängigkeit des Einfallswinkels erhält man aus

$$f_c = \frac{f_{cr}}{\sin^2\theta} \ . \tag{2.12}$$

Für die Biegewellenlänge λ_B folgt

$$\lambda_B = \lambda_0\sqrt{\frac{f}{f_{cr}}} \ , \tag{2.13}$$

unterhalb der Koinzidenzgrenzfrequenz ist die Biegewellenlänge somit kürzer als die Wellenlänge in Luft, darüber gilt die umgekehrte Relation.

Eine Veranschaulichung der Projektion einer Luftschallwelle der Wellenlänge λ_0 mit Einfallswinkel θ auf eine Biegewelle der Spur-Biegewellenlänge λ_s zeigt Abbildung 2.4, die Anregung und Abstrahlung von Körperschall einer Platte in das umgebende Medium Luft ist möglich. Bei den ausbreitungsfähigen Biegewellen unterscheidet Mechel (1995) erzwungene Spur-Biegewellen λ_s und freie Biegewellen λ_b. Freie Biegewellen sind allgemeine Lösungen der homogenen Biegewellengleichung, diese enthalten somit auch die Anpassung an die Randbedingungen einer möglichen Auflagerung, sie werden durch Transienten, bei Daueranregung durch Störstellen oder räumliche Begrenzung verursacht. Spur-Biegewellen sind partikuläre

Lösungen der inhomogenen Biegewellengleichung und werden, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, durch das Luftschallfeld erzwungen. Nach Abschaltung einer Anregung, oder in weit vom Ort der Anregung entfernten Plattenteilen, wird das Feld von freien Biegewellen bestimmt. Für den theoretischen Fall einer unendlich ausgedehnten Platte und unter Voraussetzung der Erfüllung der Bedingungen der Plattentheorie nach Kirchhoff-Love, existieren auf dieser ausschließlich Spur-Biegewellen.

2.2 Analytisch, Numerisch, Qualitativ

Eine Beschreibung des Verhaltens der vorgeschlagenen Anordnung eines doppelwandigen Plattenresonators in Impedanzgitteranordnung aus Abschnitt 1.3 ist auf der Grundlage verschiedener Methoden möglich. Zuerst ist festzulegen, in welchem Umfang eine analytische Beschreibung erfolgen kann und zu welchem Anteil und Zeitpunkt auf numerische Berechnungsverfahren zurückgegriffen werden soll. In beiden Fällen gibt es darüber hinaus mehrere Ansätze, welche an unterschiedlichen Stellen und in verschiedenem Umfang Vereinfachungen erfordern. Im Folgenden werden mehrere Möglichkeiten der Art der Beschreibung vorgestellt, die Randbedingungen und Voraussetzungen definiert, die notwendigen Vereinfachungen benannt und deren Auswirkung auf die Qualität der Lösung beschrieben.

Mithilfe numerischer Berechnungsverfahren für partielle Differentialgleichungen, wie der Randelement-Methode (REM) oder Finite-Elemente-Methode (FEM), können Lösungen der Wellengleichungen bestimmt werden. Die Betrachtung von Luftschallfeldern, sowie die Abstrahlung von Schall erfolgt üblicherweise durch REM, für die Beschreibung von Körperschall ist durch das Problem der Verformungsanalyse von Festkörpern FEM geeignet. So ist nach Liu et al. (2018) und Zhao et al. (2017) eine Kombination aus REM zur Lösung der Helmholtz-Gleichung in Luft (Gleichung 2.2), und FEM als Lösungsansatz für die Biegewellengleichung im Festkörper (Gleichung 2.9) zur Untersuchung des Abstrahlungsverhaltens geeignet. Mit COMSOL Multiphysics® (COMSOL (2017)) oder CADFEM ANSYS stehen hierfür auch kommerziell entwickelte Softwarepakete zur Verfügung.

Zur Maximierung des qualitativen Erkenntnisgewinns und der Minimierung der Berechnungszeit bei der Auslegung einer geeigneten Beispielanordnung, wird im Folgenden jedoch eine analytische Beschreibung angestrebt. Sollte es der Anspruch an die Genauigkeit und Rechenzeit zulassen, werden aber, beispielsweise zur Lösung von einzelnen Integralen, auch numerische Verfahren verwendet.

2.3 Trennimpedanz

Unter Verwendung der Idealisierung der Übereinstimmung der örtlichen Verteilungen von Schalldruck und Schallschnelle, kann nach Cremer et al. (2009) und Mechel (1998) für eine Platte als Massenbelag eine Trennimpedanz Z_T definiert werden. Aufgrund der Annahmen

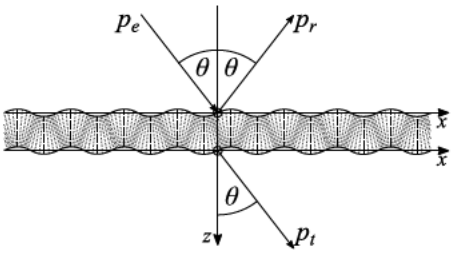

ABBILDUNG 2.5 Schematische Darstellung des umgebenden Luftschallfeldes einer unendlich ausgedehnten Platte

der Plattentheorie nach Kirchhoff-Love (Inkompressibilität, Homogenität und Isotropie) ist nur der transversale Anteil der Schnelle v_z zu berücksichtigen, es folgt

$$Z_T = \frac{p}{v_z} \ . \tag{2.14}$$

2.3.1 Unendlich ausgedehnte, ideale Platte

Bei der Betrachtung von ebenen Wellen oder deren Überlagerung, existieren in der unendlich ausgedehnten Platte keine freien Biegewellen λ_b, somit kann das Schallfeld nach Abbildung 2.5 ohne gestreuten Anteil des Schalldruckes p_s beschrieben werden. Eine Bestimmung des Reflexions-, Absorptions- und Transmissionsverhaltens ist aufgrund der Ortsunabhängigkeit der Trennimpedanz Z_T alleine durch diese Größe möglich. Des Weiteren ist, auch hier wieder mit der Einschränkung auf die Betrachtung von ebenen Wellen, nach Mechel (1995) auch die Verwendung einer elektro-akustischen Analogie möglich, diese bietet einen großen Vorteil bei der Analyse mehrlagiger Strukturen. Mit den Ansätzen für das Luftschallfeld (auf den Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ wird bei den Ansätzen aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet)

$$\begin{aligned} p_e\left(x,z\right) &= P_e \cdot e^{-jk_x x} \cdot e^{-jk_z z} \\ p_r\left(x,z\right) &= r \cdot P_e \cdot e^{-jk_x x} \cdot e^{jk_z z} \\ p_t\left(x,z\right) &= P_t \cdot e^{-jk_x x} \cdot e^{-jk_z z} \\ k_x &= k_0 \cdot \sin\theta \\ k_z &= k_0 \cdot \cos\theta \end{aligned} \tag{2.15}$$

und das Biegewellenfeld der Platte

$$\begin{aligned} v\left(x\right) = v_z &= V \cdot e^{-jk_x x} \\ \delta p &= \left(P_e + r \cdot P_e - P_t\right) \cdot e^{-jk_x x} \ , \end{aligned} \tag{2.16}$$

folgt bei Einsetzen in die Biegewellengleichung 2.9

$$\left(k_x^4 - k_B^4\right) \cdot v_z = \frac{j\omega}{B} \delta p \ . \tag{2.17}$$

Durch Einsetzen der Biegewellenzahl folgt für die Trennimpedanz der unendlich ausgedehnten Platte

$$Z_T = \frac{\delta p}{v_z} = \left(k_x^4 - k_B^4\right)\frac{B}{j\omega} = j\omega\rho d\frac{k_B^4 - k_x^4}{k_B^4} = j\omega\rho d\left[1 - \left(\frac{f}{f_{cr}}\right)^2 \sin^4\theta\right] \ . \tag{2.18}$$

2.3.2 Unendlich ausgedehnte Platte mit Verlusten

Der bisherige Ansatz berücksichtigt keine inneren Verluste, diese sind über einen Verlustfaktor η an der komplexen Biegesteifigkeit zu berücksichtigen

$$B \rightarrow B \cdot (1 + j\eta) \ . \tag{2.19}$$

Ein Weg zur experimentellen Bestimmung dieses Verlustfaktors (für $\eta \ll 1$) ist nach Mechel (1998) die Auswertung der Nachhallzeit bei Stoßanregung einer Platte

$$\eta \approx \frac{2.2}{f \cdot T} \ . \tag{2.20}$$

Für Holzplatten nimmt dieser, in Abhängigkeit der Holzart und Verarbeitungsweise, Werte von $\eta = 0.01 \ldots 0.03$ an. Durch Einsetzen der verlustbehafteten Biegesteifigkeit in Gleichung 2.18 erhält man für die Trennimpedanz Z_T der unendlich ausgedehnten Platte mit inneren Verlusten

$$\begin{aligned} Z_T &= \left(k_x^4 - k_B^4\right)\frac{B \cdot (1 + j\eta)}{j\omega} \\ &= \omega\rho d\left[\eta\left(\frac{f}{f_{cr}}\right)^2 \sin^4\theta + j\left(1 - \left(\frac{f}{f_{cr}}\right)^2 \sin^4\theta\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3.3 Näherungslösung für seitlich begrenzte Platte in einem Schallschirm

Nun wurde bisher eine unendliche Ausdehnung der Anordnung angenommen, für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ist allerdings eine Beschreibung von Teilresonatoren endlicher und vor allem unterschiedlicher Abmessungen und Abstrahleigenschaften erforderlich. Für eine seitlich begrenzte Platte ergibt sich die inhomogene Biegewellengleichung als partielle Differentialgleichung zu

$$\left(\frac{\delta^4}{\delta x^4} + \frac{\delta^4}{\delta y^4} - k_B^4\right) v_z(x, y) = \frac{j\omega}{B}\delta p(x, y) \ . \tag{2.22}$$

Allerdings sind, zusätzlich zu der Anpassung an die Luftschallfelder auf beiden Plattenseiten, auch die Randbedingungen durch die endlichen Abmessungen und die Art der Auflagerung zu erfüllen. Unter Vernachlässigung des Biegewellen-Nahfeldes an der Begrenzung, welches die Anpassung des Schnelleprofils an die Randbedingungen erledigt, also mithilfe der Un-

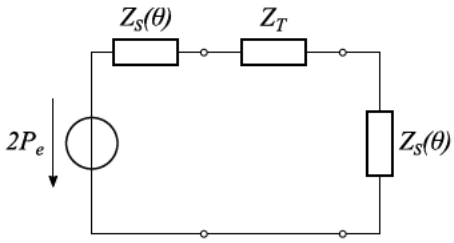

ABBILDUNG 2.6 Ersatzschaltbild zur Berechnung des Verhaltens einer endlichen Platte in einem Schallschirm

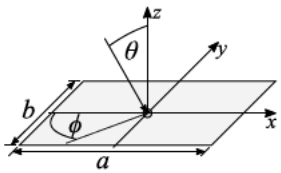

ABBILDUNG 2.7 Schematische Darstellung eines Feld-erregten Rechteckstrahlers

terdrückung des gestreuten Feldanteils P_s, gibt Mechel (1998) eine Näherung für seitlich begrenzte Platten in einem Schallschirm an. Die Anpassung der Platte an das umgebende Medium Luft erfolgt über eine elektro-akustische Ersatzschaltung und mit der, aus der Spurwellenverteilung resultierenden, Strahlungsimpedanz $Z_S(\theta)$ einer Feld-erregten Fläche. Diese kann durch Integration über eine Fläche von Punktstrahlern bestimmt werden. Eine mögliche Ersatzschaltung, unter der Annahme $P_e = P_r$, besteht, wie Abbildung 2.6 zeigt, aus der Anregung mit einer Druckquelle der Amplitude $2P_e$ und sowohl des quell-, als auch lastseitigen Abschlusses mit der Strahlungsimpedanz $Z_S(\theta)$ als Anpassung an den unendlichen Halbraum. Anstatt der Trennimpedanz einer Platte kann auch die resultierende Gesamtimpedanz einer mehrlagigen Struktur eingesetzt werden.

Strahlungsimpedanz eines Rechteckstrahlers

Die Strahlungsimpedanz eines Feld-erregten Rechteckstrahlers der Abmessungen a und b, unter den Einfallswinkeln θ, ϕ nach Abbildung 2.7, ergibt sich bei Mechel (1989) mit den Wellenzahlen k_x, k_y

$$\begin{aligned} k_x &= k_0 \cdot \sin\theta \cdot \cos\Phi = k_0 \cdot \mu_x \\ k_y &= k_0 \cdot \sin\theta \cdot \sin\Phi = k_0 \cdot \mu_y \end{aligned} \tag{2.23}$$

zu

$$Z_S = \frac{Z_0 \cdot 2j}{\pi k_0 a k_0 b} \int_{x=0}^{k_0 a} \int_{y=0}^{k_0 b} (k_0 a - x)(k_0 b - y) \cos(\mu_x x) \cos(\mu_y y) \frac{e^{-j\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \ . \tag{2.24}$$

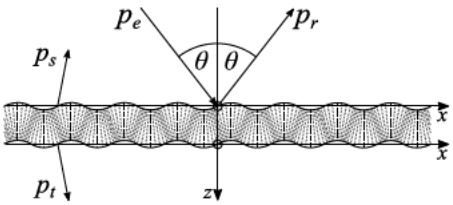

ABBILDUNG 2.8 Schematische Darstellung des umgebenden Luftschallfeldes einer unendlich ausgedehnten Platte

Lösungen für verschiedene Abmessungen und Einfallswinkel sind schnell und mit hoher Genauigkeit durch ein Verfahren zur numerischen Integration bestimmbar.

2.4 Vollständige Analyse des Schallfeldes

Eine andere Möglichkeit der Beschreibung des Verhaltens einer seitlich begrenzten Anordnung ist die vollständige Analyse der beteiligten Schallfelder, ohne Vernachlässigung des zusätzlichen gestreuten Anteils p_s des Schalldruckes, bedingt durch die Randbereiche und deren Auflagebedingungen der einzelnen Teilelemente. Hierzu wird im zweidimensionalen Fall für das Luftschallfeld als ebene Welle an der Plattenoberseite der Ansatz

$$p(x,y) = p_e(x,y) + p_r(x,y) + p_s(x,y) \ , \tag{2.25}$$

mit der Überlagerung der Anteile von einfallenden p_e, spekular reflektierten p_r und gestreuten p_s Teilschalldrücken gewählt, θ bezeichnet den Ein-, bzw. Ausfallswinkel nach dem Reflexionsgesetz. Auf der Plattenunterseite ergibt sich, wie auch Abbildung 2.8 verdeutlicht, zusätzlich ein transmittiertes Teilschallfeld, für welches nach dem Reziprozitätstheorem $p_t = -p_s$ gilt.

Ein System von orthogonalen Funktionen ist zur analytischen Beschreibung des Luftschallfeldes unabdingbar, wichtiges Hilfsmittel kann hierbei die Zerlegung einer Funktion in ihre geraden und ungeraden Anteile sein. In der nachfolgenden Beschreibung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die explizite Angabe der jeweiligen Symmetriearten verzichtet. Unter Berücksichtigung der Auflagerung, sowie Abmessungen und Materialparametern, sind mit geeigneten Ansätzen für die Schnellekomponenten die Wellengleichungen über die Randbedingungen an den Grenzflächen zu lösen. Nachfolgend wird diese Vorgehensweise der vollständigen Analyse an Beispielen kurz verdeutlicht, eine ausführliche Beschreibung ist von Mechel (1998), Mechel (2001), Thomas (2005) und Mechel (2008) verfügbar.

2.4.1 Plattenstreifen

In den beiden folgenden Beispielen wird jeweils der Fall des einseitig begrenzten Plattenstreifens verwendet. Durch die Begrenzung ergibt sich in der Platte ein durch Moden (Eigenfrequenzen) bestimmtes Schallfeld, für den eindimensionalen Fall lässt sich, mit der nach

Abbildung 2.9 normierten Koordinate $\xi = x/h$ und dem Modenindex γ_n, die Plattenschnelle $V(\xi)$ aus den modalen Lösungen für die Querprofile $v_n(\xi)$ der homogenen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \gamma_n^4\right) \cdot v_n(\xi) = 0 \tag{2.26}$$

und den jeweiligen, im weiteren Verlauf zu bestimmenden, Amplituden V_n zusammensetzen

$$V(\xi) = \sum_n V_n v_n(\xi) \ . \tag{2.27}$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Biegewellengleichung 2.9 folgt

$$\sum_n \left(\gamma_n^4 - (k_B h)^4\right) \cdot V_n v_n(\xi) = \frac{j\omega h^4}{B} \delta p(\xi) \ , \tag{2.28}$$

es resultieren über die Definition

$$\sum_n Z_{Tn} \cdot V_n v_n(\xi) = \delta p(\xi) \ , \tag{2.29}$$

mit der modalen Biegewellenzahl $k_{bn} = \gamma_n/h$, die modalen Trennimpedanzen

$$Z_{Tn} = j\omega m \frac{k_B^4 - k_{bn}^4}{k_B^4} \ . \tag{2.30}$$

2.4.2 Plattenstreifen in einem Kanal

Ein mögliche Art der Beschreibung ist der Einbau einer einseitig begrenzten Platte in einen zweidimensionalen Kanal nach Abbildung 2.9. In der Abwandlung zum Einbau in einer Kanalnische findet dieses Modell Anwendung zur Bestimmung der Schalldämmung von Wand- oder Fassadenelementen und bildet gut die Bedingungen von Prüfstandmessungen nach DIN EN ISO (2016) ab.

In begrenzten Umgebungen wie einem Kanal sind auch für das Luftschallfeld nur Moden ausbreitungsfähig, sie werden mit einem Modenindex ν gekennzeichnet, θ_v bezeichnet den Modenwinkel. Der Weg zur Bestimmung des Schallfeldes im Plattenstreifen wurde oben gezeigt, ein geeigneter Ansatz für die Beschreibung des Schalldrucks im Kanal ist relativ einfach anzugeben. Der Schalldruck setzt sich, mit den Querprofilen q_ν, aus geraden und ungeraden Modensummen nach

$$p_\nu(\xi, z) = q_\nu(\xi) \cdot e^{\pm j k_{\nu z} z} \tag{2.31}$$

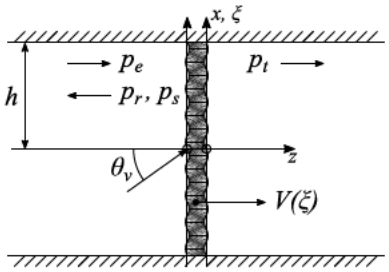

ABBILDUNG 2.9 Schematische Darstellung des resultierenden Schallfeldes in einem Kanal

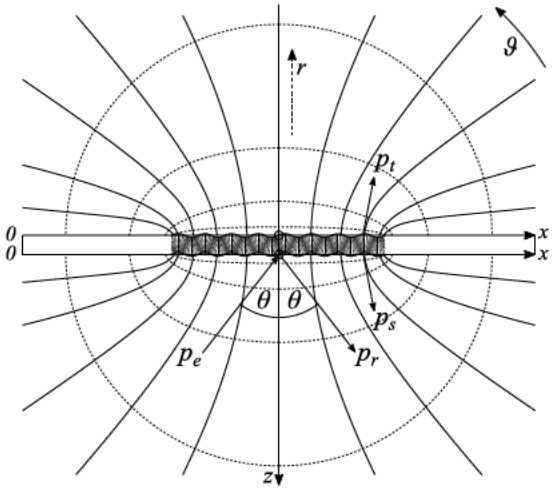

ABBILDUNG 2.10 Plattenstreifen in unendlicher Schallwand in elliptisch-hyperbolischem Zylinderkoordinatensystem

zusammen, diese sind mit den modalen Wellenzahlen $k_{\nu z} = k_0 \cdot \sin\theta_v$ in z-Richtung ausbreitungsfähig. Die Möglichkeit der Anregung von Schallfeldern zwischen den Kanal- und Plattenmoden kann nun über Kopplungskoeffizienten nach

$$S_{\nu n} = \int_{-1}^{1} q_\nu(\xi) \cdot v_n(\xi) d\xi \tag{2.32}$$

erfolgen, an den Grenzgebieten sind die Lösungen unter Erfüllung der Randbedingungen ineinander überzuführen. Nun können Gleichungssysteme für die Bestimmung der Amplituden der Plattenschnelle V_n und davon abhängigen Größen, wie dem gestreuten P_s und transmittierten Anteil P_t der Amplituden des Schallfeldes, aufgestellt werden.

2.4.3 Plattenstreifen in unendlicher Schallwand

Der zweite, hier zur Verdeutlichung der Vorgehensweise, kurz beschriebene Fall ist der des Plattenstreifens in unendlicher Schallwand. Das Luftschallfeld ist nun jeweils für die obere und untere Hälfte in einem zweidimensionalen, unendlich ausgedehnten Halbraum zu bestimmen, dies erfordert eine ungleich komplexere Vorgehensweise. Als Grundlage der Beschreibung

des Luftschallfeldes dient hier ein elliptisch-hyperbolisches Zylinderkoordinatensystem nach Abbildung 2.10, für die Wellengleichungen wird ein Lösungsansatz mit Mathieu-Funktionen formuliert. Die Flächen mit zu formulierenden Randbedingungen sind dann, aufgrund dieses Ansatzes nach Mechel (1998), wieder Koordinatenflächen. Eine Berechnung des Schallfeldes kann ähnlich zu dem oben für den Kanal beschriebenen Prinzip mit modalen Trennimpedanzen erfolgen, das Luftschallfeld geht allerdings, aufgrund der Ausdehnung in den unendlichen Halbraum, wieder von einem modal bestimmten in ein kontinuierliches Wellenfeld über.

2.5 Gegenüberstellung

Die beiden, in den Abschnitten 2.3 und 2.4 vorgestellten Möglichkeiten, unterscheiden sich vor allem in einem wesentlichen Punkt, der Berücksichtigung der Ausbreitung von freien Biegewellen in der Platte: Ist also eine überlagerte Anpassung des Schnelleprofils an die Randbedingungen einer Auflagerung erforderlich oder nicht. Nachfolgend wird eine vergleichende Einordnung der genannten Möglichkeiten mit Beschreibung der Vor- und Nachteile, sowie der notwendigen Vereinfachungen und damit verbundenen Limitierung der Ergebnisse gegeben. Für beide Varianten wird eine dauerhafte Anregung ohne transiente Vorgänge angenommen, die Abbildung des zeitlichen Verhaltens ist demnach nicht möglich. Im Bereich der Musikalischen Akustik ist das Ein- und Ausschwingverhalten von großem Interesse, auch in der Raumakustik, hier vor allem in Aufführungsräumen, könnte eine Betrachtung dieser Vorgänge einen weiteren Einblick ermöglichen. Dieser Aspekt kann aber bereits durch den grundlegenden Ansatz der Wellengleichungen für zeitharmonische Schwingungen nicht beschrieben werden.

Bei der vollständigen Analyse des Schallfeldes wird, wie auch Mechel (1998) benennt, die Lösung ausschließlich für die Amplituden entwickelt, die Phasen sind beliebig wählbar. Auch wird die Platte stets als einseitig unendlich ausgedehnter Streifen angenommen und somit nur eine Näherung für allseitig begrenzte Platten mit deutlich unterschiedlichen Seitenabmessungen im realen Anwendungsfall (Wände, Fassadenelemente) gegeben. Für die energetische Betrachtung und die ausschließliche Berechnung der Absorption oder Transmission von länglichen Anordnungen, beziehungsweise der Schalldämmung eines Wandsystems ist dies unter Umständen geeignet. In dieser Arbeit wird allerdings im Folgenden der Ansatz gewählt, anhand von verschiedenen Schallkennimpedanzen, durch die Überlagerung von unterschiedlichen Teilschallfeldern, die Richtungscharakteristik einer allseitig begrenzten und in den Abmessungen variierten Anordnung von Teilresonatoren zu bestimmen. Es wird daher eine Beschreibung angestrebt, welche die Abbildung der allseitig Begrenzung ermöglicht, auch für die vollständige Analyse des Schallfeldes mit modalen Trennimpedanzen wäre dies sicher möglich, allerdings ist bereits bei der Abstrahlung eines nur einseitig begrenzten Plattenstreifens in den unendlichen Halbraum die Beschreibung in einem elliptisch-hyperbolischen

Koordinatensystem mit Mathieu-Funktionen erforderlich. Für den allseitig begrenzten Fall ist jedoch kein Lösungsansatz mit einem geeigneten Funktionensystem verfügbar.

Eine Lösung mit Trennimpedanzen berücksichtigt ausschließlich erzwungene Spur-Biegewellen, dies ist nach Cremer et al. (2009), Mechel (2013), Mechel (1995) und Mechel (1998) eine gültige Lösung bei homogenen und isotropen Materialien. Des Weiteren wird durch die unendliche Ausdehnung der Platte die Vernachlässigung der Anpassung des Schallschnelleprofils an die Randbedingungen der Auflagerung gerechtfertigt, für die Gültigkeit dieser Nichtbeachtung der Randeffekte sollen die Abmessungen nach Mechel (1995) groß gegenüber der halben Biegewellenlänge sein ($a, b \gg \frac{\lambda_B}{2}$). Schlussendlich wird durch die Unterdrückung der Feldanteile aus freien Biegewellen auch das, durch die endlichen Abmessungen bedingte, Resonanzverhalten der Platte vernachlässigt. Aus der Vernachlässigung der Randeffekte folgt somit eine untere, aus dem Resonanzverhalten der Platte eine obere Grenzfrequenz für die Gültigkeit der Näherungslösung mit einer Trennimpedanz. Der Anteil des direkt gestreuten Anteils P_s und der damit verbundenen Erhöhung der Diffusität nach Cremer (1976), Lotze (1980) und Schirmer (2006) wird hier gegenüber der, sich aus der Überlagerung der Teilschallfelder der Teilresonatoren resultierenden, Veränderung des Abstrahlverhaltens durch Interferenzen vernachlässigt. Auch wird für den Startwert bei der beschriebenen Näherungslösung von einem Reflexionsfaktor nahe $R = 1$ ausgegangen, es ergibt sich eine Amplitude des Anregungsdrucks der Schalldruckquelle von $2P_e$. Auf den in dieser Arbeit beschriebenen Anwendungsfall bezogen, erhält man mit $a = 0.1\,\mathrm{m}, b = 1\,\mathrm{m}, d = 5\,\mathrm{mm}, \rho = 800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, E = 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}, \nu = 0.3$ zwar lediglich eine untere Grenzfrequenz von $f_{unten} = 1\,\mathrm{kHz}$, die in praktischen Anwendungen erprobte Annahme einer Mindestgröße für tieffrequent wirksame Resonanzabsorber (anwendbar auch unter 100 Hz) nach Fasold et al. (1987) von $A = 0.4\,\mathrm{m}^2$, führt mit den Parametern $a = 0.5\,\mathrm{m}, b = 0.8\,\mathrm{m}, f_{cr} = 4\,\mathrm{kHz}$ allerdings auch zu einer unteren Grenzfrequenz von $f_{unten} = 630\,\mathrm{Hz}$. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass es zulässig ist, den Frequenzbereich einer Näherungslösung um einige Oktaven zu erweitern.

Im weiteren Verlauf wird ein Ansatz mit Trennimpedanzen für die Teilresonatoren verfolgt, es werden zudem Vorschläge für die weitergehende Anpassung dieser Näherungslösung erarbeitet, die Qualität der resultierenden Gesamtlösung wird durch einen Messaufbau evaluiert.

Kapitel 3

Bestimmung der elektro-akustischen Ersatzschaltung

Im Folgenden wird die Vorgehensweise bei der Beschreibung des Verhaltens eines doppelwandigen Plattenresonators anhand einer elektro-akustischen Ersatzschaltung erläutert. Eine kurze Zusammenfassung der verwendeten Kettenmatrizen der Zweitorstellung ist als Anhang A angefügt.

Für jeden Teilresonator wird, mit dem Koordinatensystem, dem Aufbau, den dazu gehörigen Plattendicken d_P und der Dicke der Luftschicht d_L nach Abbildung 3.1, sowie unter Berücksichtigung der jeweiligen Abmessungen, eine resultierende Gesamtimpedanz bestimmt. Diese wird anhand von Ersatzschaltbildern mit konzentrierten Elementen (lumped element model) in Zweitordarstellung ermittelt. Mithilfe einer Zweitordarstellung nach Abbildung 3.2 wird das mehrschichtige Gesamtsystem im Ersatzschaltbild erfasst. Die, in Abschnitt 2.3 vorgestellten, Trennimpedanzen der Platten werden hier mit Z_P bezeichnet, die Luftschicht im Hohlraum kann in der Zweitordarstellung als π-Schaltung mit der Impedanz Z_L und den Admittanzen Y_L dargestellt werden. Die Beschreibung des Reflexionsverhaltens erfolgt dann durch das Verfahren zur Berechnung des resultierenden Schallfeldes vor einer periodischen Oberfläche in Kapitel 4. Auf eine explizite Kennzeichnung der komplexen Impedanzen und Admittanzen wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Zuerst wird der allgemeine

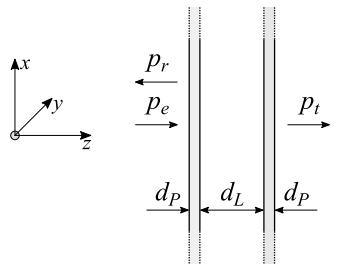

Abbildung 3.1 Schematische Darstellung des unendlich ausgedehnten doppelwandigen Plattenresonators

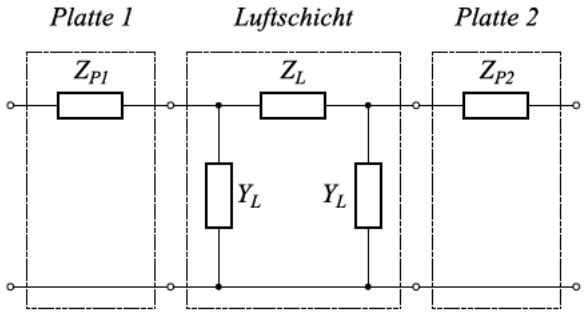

ABBILDUNG 3.2 Zweitordarstellung eines doppelwandigen Plattenresonators

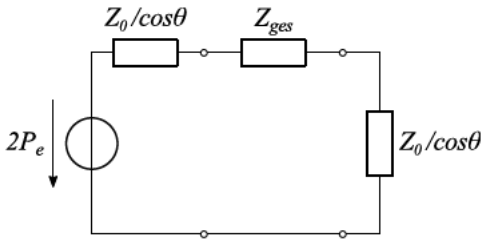

ABBILDUNG 3.3 Ersatzschaltbild für die Berechnung des Verhaltens einer unendlich ausgedehnten Platte

Fall einer unendlich ausgedehnten Anordnung beschrieben, dieser wird dann um die, in Abschnitt 2.3.3 beschriebene, Näherungslösung für den seitlich begrenzten Fall von Mechel (1998) erweitert. Abschließend wird, aufgrund der Vernachlässigung der Randeffekte in der Näherungslösung, eine geeignete Erweiterung und Anpassung derselben vorgeschlagen.

3.1 Unendlich ausgedehnte Anordnung

Für den Fall der Anregung eines doppelwandigen Plattenresonators unendlicher Ausdehnung mit einer einfallenden ebenen Welle unter dem Winkel θ, ergibt sich bei Mechel (1998) das Ersatzschaltbild in Abbildung 3.3. Die Anpassung der resultierenden Impedanz Z_{ges} des Gesamtsystems an das umgebende Medium Luft erfolgt sowohl anregungsseitig mit der Quellimpedanz, als auch rückseitig mit der Lastimpedanz $\frac{Z_0}{\cos\theta}$, dies entspricht jeweils einer fortschreitenden ebenen Welle in z-Richtung im Medium Luft mit der Wellenzahl $k_z = k_0 \cdot \cos\theta$ und der Schallkennimpedanz $Z_0 = \rho_0 \cdot c_0$. Die Berücksichtigung der Mehrlagigkeit der Teilresonatoren erfolgt, wie schon in Abbildung 3.2 dargestellt, durch eine Kettenschaltung der Einzelelemente in Zweitordarstellung. Die Überführung des freien Endes auf der Seite des transmittierten Schallfeldes erfolgt in der Zweitordarstellung mit der Einführung einer Queradmittanz $Y_f = \frac{1}{Z_f} = \frac{\cos\theta}{Z_0}$, das resultierende Ersatzschaltbild ist in Abbildung 3.4 angegeben, bei einem schallharten Abschluss entfällt die Strahlungsadmittanz des freien Endes.

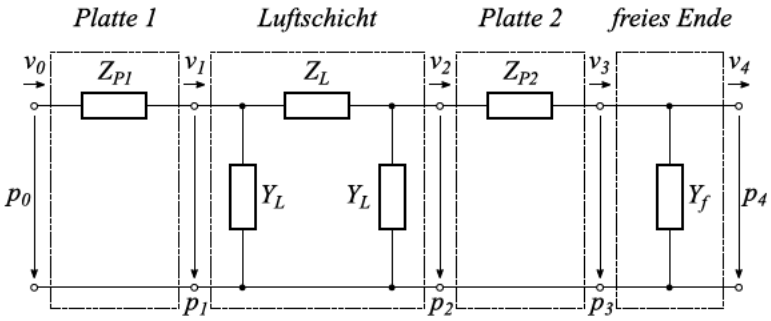

ABBILDUNG 3.4 Ersatzschaltbild des unendlich ausgedehnten doppelwandigen Plattenresonators in Zweitordarstellung

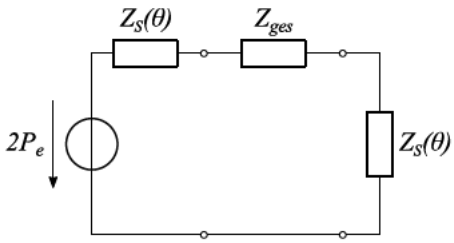

ABBILDUNG 3.5 Ersatzschaltbild für die Berechnung des Verhaltens einer endlichen Platte in einem Schallschirm

3.2 Seitlich begrenzte Platte in einem Schallschirm

Eine Näherungslösung für seitliche begrenzte Platten in einem unendlichen Schallschirm ist die Verwendung Feld-erregter Strahlungsimpedanzen nach Mechel (1989), anstelle der Strahlungsimpedanz für die Abstrahlung von ebenen Wellen in den unendlichen Halbraum mit $Z_f = \frac{1}{Y_f} = \frac{Z_0}{\cos\theta}$. Das zugehörige Ersatzschaltbild aus einer Serienschaltung der resultierenden Gesamtimpedanz eines mehrschichtigen Aufbaus Z_{ges} und der zugehörigen Strahlungsimpedanz einer Feld-erregten Fläche eines Rechteckstrahlers nach Mechel (1998), sowohl für die Quellimpedanz, als auch das freie Ende auf der gegenüberliegenden Seite, zeigt Abbildung 3.5. Eine Anpassung der Ersatzschaltung an eine einfallende ebene Welle kann durch eine Impedanzwandlung mit einer Zweitorschaltung erfolgen, eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung der so erhaltenen Impedanzen im weiteren Verlauf und der entsprechenden Anpassung der weitergehenden Berechnungen an die Feld-erregten Strahlungsimpedanzen. Mit der Strahlungsadmittanz $Y_S(\theta)$ als Kehrwert der Strahlungsimpedanz des Feld-erregten Rechteckstrahlers aus Abschnitt 2.3.3, erhält man das Ersatzschaltbild des seitlich begrenzten, doppelwandigen Plattenresonators in einem unendlich ausgedehnten Schallschirm nach Abbildung 3.6. Aufgrund der Fernfeldbetrachtung ist nur der Realteil der komplexen Strahlungsimpedanz $Z_S(\theta)$ zu berücksichtigen. Die Lösung lässt sich nun durch Rekursion mit den Startwerten, welche sich aus den Randbedingungen eines Abschlusses mit einer schallharten Fläche nach der Strahlungsadmittanz des Rechteckstrahlers zu $p_4 = 1$ und $v_4 = 0$ ergeben, berechnen. Eine gute Repräsentation der Ersatzschaltung kann durch die Darstellung des

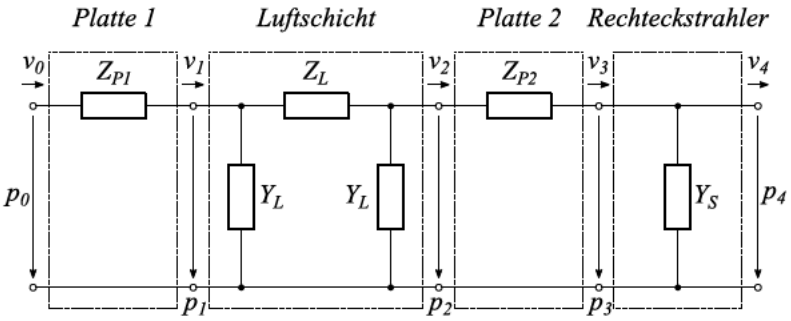

ABBILDUNG 3.6 Ersatzschaltbild des seitlich begrenzten, doppelwandigen Plattenresonators in Zweitordarstellung

Übertragungsverhaltens mit den zugehörigen Kettenmatrizen gegeben werden, bezüglich der Kettenmatrizen der beteiligten Zweitore sei hier erneut auf Abschnitt A verwiesen, die Gesamtmatrix A_{ges} ergibt sich dann durch Matrixmultiplikation der Einzelelemente zu

$$\mathbf{A}_{ges} = \mathbf{A}_{P1} \cdot \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{A}_{P2} \cdot \mathbf{A}_S \ . \tag{3.1}$$

Nun kann direkt die Berechnung der Eingangsgrößen p_0 und v_0 mit

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{ges} \cdot \begin{pmatrix} v_4 \\ p_4 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

vorgenommen werden, schlussendlich ergibt sich aus diesen Ergebnissen direkt die Oberflächenimpedanz des seitlich begrenzten, doppelwandigen Plattenresonators zu

$$Z = \frac{p_0}{v_0} \ . \tag{3.3}$$

3.3 Anpassung und Erweiterung der Näherungslösung

Im bisherigen Verlauf werden die, aus der Auflagerung resultierenden, Effekte in den Randbereichen vernachlässigt, eine Anpassung der Abstrahlung erfolgt lediglich anhand einer Näherungslösung unter Einbeziehung der seitlichen Begrenzung. Durch die Berechnung von Feld-erregten Strahlungsimpedanzen von Rechteckflächen unterschiedlicher Abmessungen werden, wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben, die endlichen Abmessungen einer Anordnung berücksichtigt. Abbildung 3.7 zeigt die, auf Z_0 normierten, Realteile der Strahlungsimpedanzen für den Einfallswinkel $\theta = 40°$ in Abhängigkeit der Abmessungen, a_i ist hierbei die Länge in x-Richtung, für die y-Richtung gilt $b = 1\,\mathrm{m}$. Als Vergleich ist in Strichlinien die Strahlungsimpedanz einer unendlich ausgedehnten Fläche bei Abstrahlung einer ebenen Welle in den unendlichen Halbraum mit $\frac{Z_0}{\cos\theta}$ eingefügt, an diese erfolgt eine asymptotische Annäherung mit gedämpft überschwingendem Verhalten. Im Hinblick auf das resultierende Verhalten einer elektro-akustischen Ersatzschaltung lässt sich die Strahlungsimpedanz einer

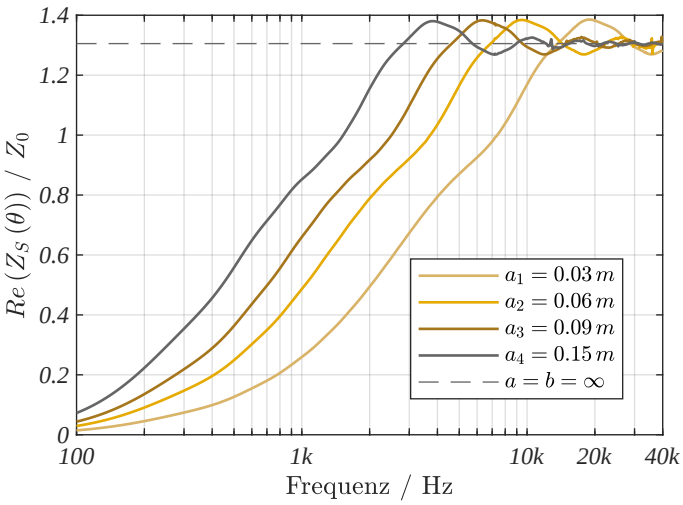

Abbildung 3.7 Realteile der Strahlungsimpedanzen von Rechtecken unterschiedlicher Abmessungen a_i $(b = 1\,\mathrm{m}, \theta = 40°)$

Feld-erregten Fläche mit abnehmenden Abmessungen als Hochpass mit ansteigender Grenzfrequenz beschreiben, eine Oberfläche mit geringeren Abmessungen weist tieffrequent eine niedrigere Abstrahlung auf. Bezogen auf die resultierende Gesamtimpedanz einer doppelwandigen Anordnung wird, wie Abbildung 3.8 verdeutlicht, lediglich eine Veränderung des Betrags vorgenommen, eine Verschiebung des Resonanzverhaltens im Frequenzbereich findet nicht statt.

Nachfolgend wird daher eine näherungsweise Berücksichtigung dieser Randbedingungen anhand der Variation der effektiven Poissonzahl ν_{eff} und einer Änderung der effektiven Platten- und Luftschichtdicken $d_{P,eff}, d_{L,eff}$ vorgeschlagen, eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung der Luftschicht als poröser Absorber mit geringen Strömungswiderstand $\Xi < 500\,\frac{\mathrm{Pa\,s}}{\mathrm{m}^2}$. Für die Berechnung dieser Parameter wird als Startwert eine Vorgehensweise anhand der Relation der Abmessungen unterbreitet, welche allerdings durch weitergehende empirische Untersuchungen zu validieren wäre. Eine erste qualitative Bewertung der Beschreibung des Verhaltens über diese effektiven Parameter wird anhand der durchgeführten Messungen im Rahmen dieser Arbeit getroffen.

3.3.1 Effektive Poissonzahl

Wie bereits in Abschnitt 2.1.3 erläutert, wird in der Mechanik der Einfluss der behinderten Querkontraktion durch die Poissonzahl quantifiziert. Diese entspricht im einfachsten Fall des Zugversuchs an einem zweidimensionalen homogenen Körper dem Quotienten aus der relativen Dickenänderung und der relativen Längenänderung

$$\nu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}\ . \tag{3.4}$$

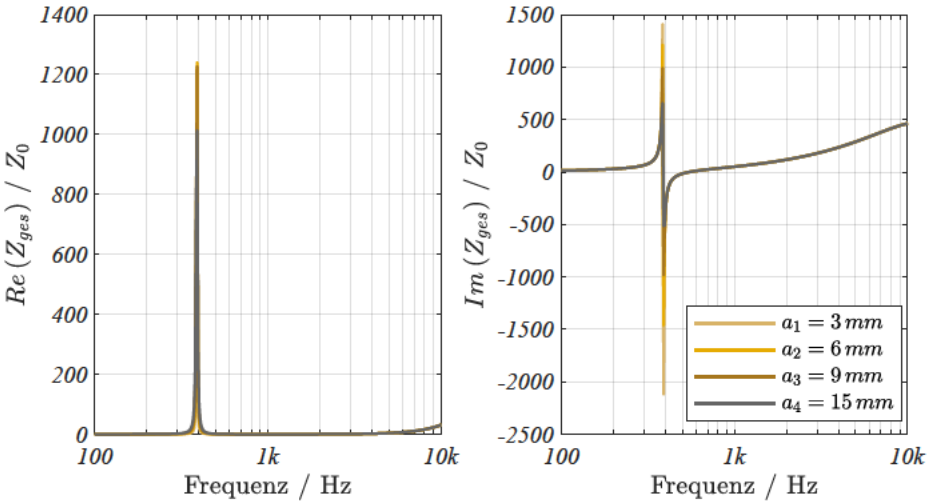

ABBILDUNG 3.8 Gesamtimpedanzen doppelwandiger Plattenresonatoren unterschiedlicher Abmessungen a_i $(b = 1\,\mathrm{m}, \theta = 40°)$

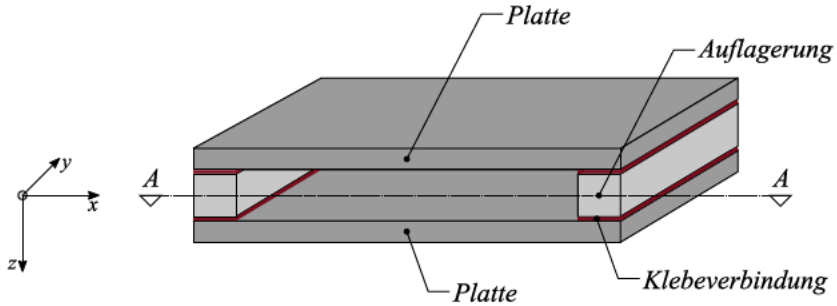

ABBILDUNG 3.9 3D-Vertikalschnitt durch einen Teilresonator

Ein Wert von $\nu = 0,5$ entspricht einem volumenneutralen Vorgang und somit der Annahme von Inkompressibilität. Bei $\nu > 0,5$ nimmt das Volumen unter Zugbelastung ab, bei typischen Werten für Festwerkstoffe $\nu < 0,5$ steigt das Volumen. Diese Beschreibung gilt explizit für das linear-elastische Verhalten bei einer elastischen Verformung von Festkörpern nach dem hookeschen Gesetz. Für eine Platte ergibt sich durch die Grundannahme der geringen Abmessung der Plattendicke gegenüber den betrachteten Wellenlängen, dass die Querkontraktion in dieser Richtung, auch durch die Voraussetzung der infinitesimalen Elemente als inkompressibel, behindert ist. Die Zunahme der Steifigkeit wird daher am Elastizitätsmodul mit

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2} \tag{3.5}$$

berücksichtigt. Die Art der Auflagerung in der vorliegenden Anwendung des doppelwandigen Plattenresonators ist in Abbildung 3.9 schematisch dargestellt, die Verbindung mit den Auflagerungsstegen soll mittels kraftschlüssiger Klebeverbindung erfolgen. Es ergeben sich gleich mehrere Quellen der zusätzlichen Behinderung der Querkontraktion, so ist bereits die

generelle Annahme einer Lagerbedingung eine Ursache, durch die flächige Ausführung und die zusätzliche Fixierung ergeben sich weitere Komponenten. Daher ist in den Randbereichen und im Besonderen in den Bereichen der Auflagerung die Querkontraktion zusätzlich weiter behindert, Cremer et al. (2009) gibt als Maximalwert bei Klebestellen die Poissonzahl von Gummi mit $\nu \approx 0,5$ an.

Als Resultat dieser Vorüberlegung wird der Randbereich, als Zone zusätzlich behinderter Querkontraktion, mit der Ausdehnung r der Auflagerung betrachtet. Die Gesamtfläche $A_{ges} = a \cdot b$ wird in den Randbereich mit zusätzlich behinderter Querkontraktion A_{rand} und die, als frei schwingend angenommenen, Fläche A_{frei} aufgeteilt. Eine Berechnung der effektiven Poissonzahl ν_{eff} erfolgt dann über die Gewichtung der jeweiligen Poissonzahlen mit dem Flächenanteil nach

$$\nu_{eff} = \frac{A_{frei} \cdot \nu_{frei} + A_{rand} \cdot \nu_{rand}}{A_{ges}} \ . \tag{3.6}$$

Eine Beispielrechnung für eine derartige Anpassung bei einer doppelwandigen Anordnung mit den Parametern $a = 0.03\,\mathrm{m}, b = 1\,\mathrm{m}, r = 0.005\,\mathrm{m}, d_P = 0.005\,\mathrm{m}, d_L = 0.01\,\mathrm{m}, \rho = 800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, E = 10 \times 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}, \nu_{MDF} = 0.2, \nu_{Rand} = \nu_{Gummi} = 0.5$ führt zu einer mittleren Poissonzahl von $\nu_{eff} = 0.4$.

Die Variation der Poissonzahl hat eine Veränderung der Plattensteifigkeit und somit auch der Koinzidenzgrenzfrequenz zur Folge, setzt man Gleichung 2.4 in 2.11 ein, erhält man

$$f_{cr} = \frac{c_0^2}{2\pi d}\sqrt{\frac{12\rho\,(1-\nu^2)}{E}} \ . \tag{3.7}$$

Für größere effektive Poissonzahlen ergibt sich also eine Verringerung der Koinzidenzgrenzfrequenz, allerdings liegt der Wertebereich des hier relevanten Beispiels bei $f_{cr} = 7500 \ldots 8000\,\mathrm{Hz}$ und somit weit oberhalb der betrachteten Doppelwandresonanz. Auch Abbildung 3.10 zeigt für die doppelwandige Anordnung nur kleine Unterschiede des Realteils der Gesamtimpedanz und auch das nur sehr hochfrequent im Bereich der Koinzidenzgrenzfrequenzen, der Imaginärteil bleibt unverändert. Ein Verschiebung der Resonanzfrequenz oder ein abweichendes Verhalten im Resonanzbereich kann durch die Variation einer effektiven Poissonzahl somit nicht erreicht werden.

3.3.2 Effektive Plattendicke

Eine weitere Möglichkeit zur Beeinflussung der Gesamtimpedanz ist die Variation der effektiven Plattendicke, also die Veränderung der Massenbeläge, bei der Berechnung der Trennimpedanzen. Die Auflagerung kann als erweiterter Anteil der Plattendicke zugerechnet werden, analog zur Berechnung der effektiven Poissonzahl in Gleichung 3.6 kann auch hier eine Aufteilung in frei schwingende Fläche und Randbereich, mit anschließender Bestimmung einer effektiven Plattendicke $d_{P,eff}$, vorgenommen werden. Mit den übrigen Parametern aus

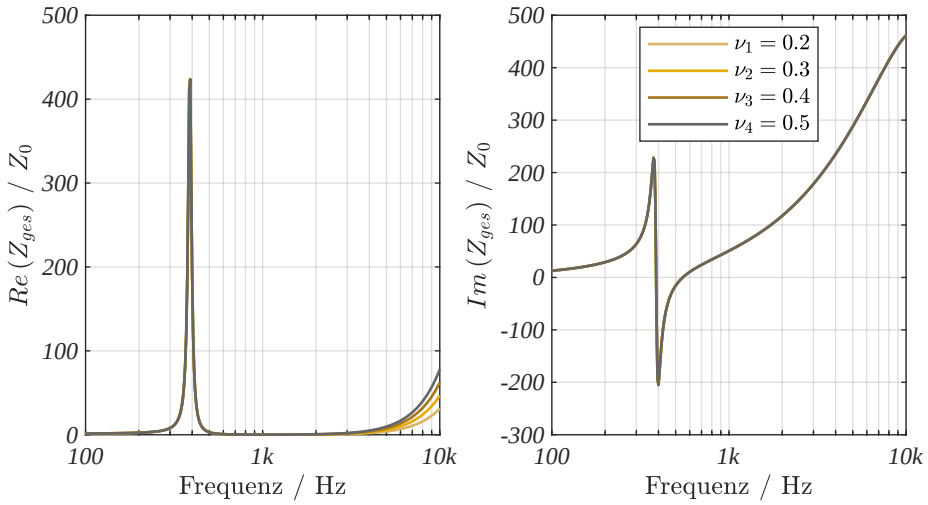

Abbildung 3.10 Gesamtimpedanzen doppelwandiger Plattenresonatoren unterschiedlicher Poissonzahlen ν_i $(a = b = \infty, \theta = 40°)$

Abschnitt 3.3.1 ergibt sich, wie aus Abbildung 3.11 für beispielhaft angenommene effektive Plattendicken ersichtlich, für zunehmende Plattendicken $d_{P,i}$ eine Verschiebung des Real- und Imaginärteils der Trennimpedanz zu niedrigeren Frequenzen, auch die Koinzidenzgrenzfrequenz nimmt mit steigender Plattendicke ab. Mit den, aus der effektiven Plattendicke resultierenden, Trennimpedanzen ergibt sich für die doppelwandige Anordnung eine Gesamtimpedanz nach Abbildung 3.12. Es zeigt sich für ansteigende Plattendicken eine Reduzierung der Resonanzfrequenz, auch ein Anstieg des Betrages der Gesamtimpedanz kann festgestellt werden. Durch diesen Anstieg ist, mit zunehmender Plattendicke, bedingt durch die Verschlechterung der Anpassung der Anordnung an die Schallkennimpedanz $Z_0 = \rho_0 \cdot c_0$ eines auftreffenden Luftschallfeldes, bei der Resonanzfrequenz von einem geringeren Maximum des Absorptionsgrades auszugehen.

3.3.3 Effektive Luftschicht

Bei der Beschreibung der Luftschicht lässt sich qualitativ feststellen, dass durch die seitliche Begrenzung im Anwendungsfall, in der mechanisch-akustischen Analogie eines Masse-Feder-Systems, eine höhere Steifigkeit der Feder verursacht wird. Daraus resultiert eine Verringerung der effektiv wirksamen Luftschicht, auch ist es möglich dieses Verhalten zu beschreiben, indem die Luftschicht als poröser Absorber geringen spezifischen Strömungswiderstandes $(\Xi < 500\,\frac{\mathrm{Pa\,s}}{\mathrm{m}^2})$ aufgefasst wird.

Luftschichtdicke

Als Startwert für eine experimentelle Untersuchung wird, wie schon im Fall der effektiven Poissonzahl in Gleichung 3.6, eine effektive Luftschichtdicke $d_{L,eff}$ berechnet, hierfür wird

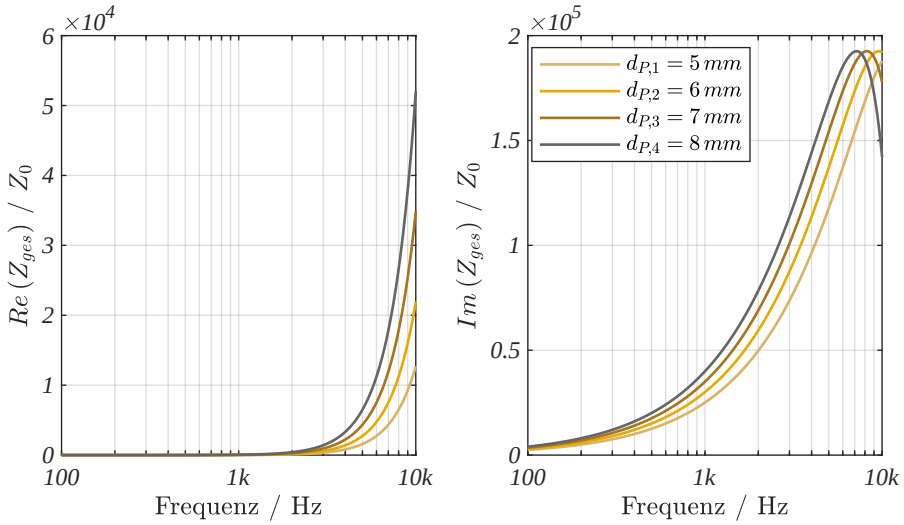

Abbildung 3.11 Trennimpedanzen einfacher Platten unterschiedlicher Dicke $d_{P,i}$ $(a = b = \infty, \theta = 40°)$

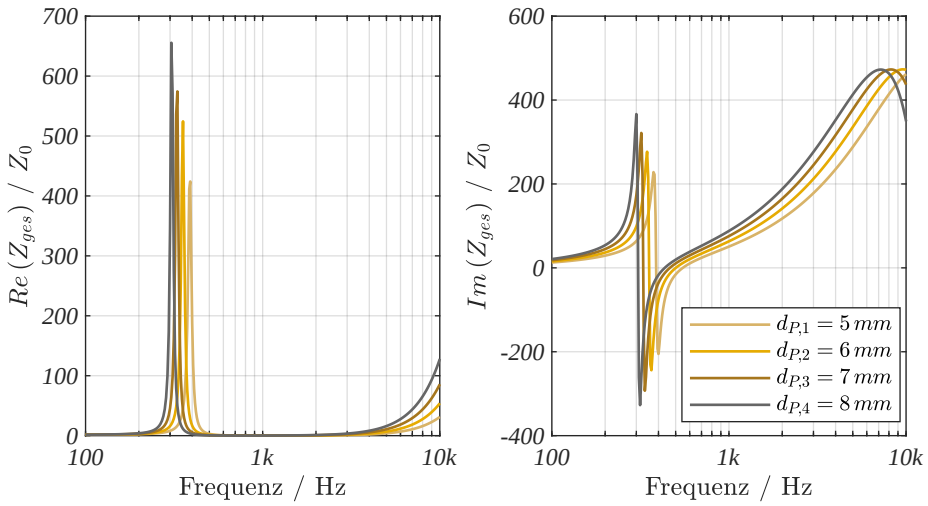

Abbildung 3.12 Gesamtimpedanzen doppelwandiger Plattenresonatoren mit Platten unterschiedlicher Dicke $d_{P,i}$ $(a = b = \infty, d_L = 0.01\,\mathrm{m}, \theta = 40°)$

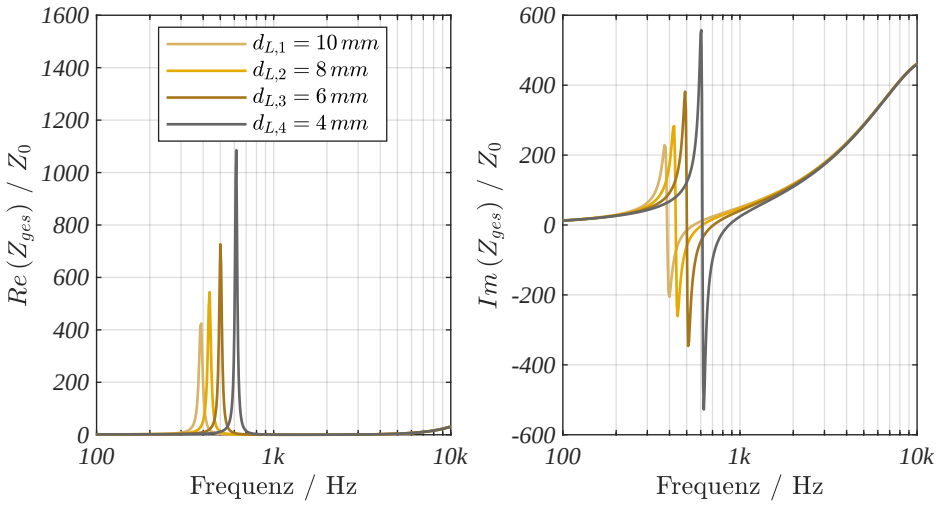

Abbildung 3.13 Gesamtimpedanzen doppelwandiger Plattenresonatoren mit Luftschichten unterschiedlicher Dicke $d_{L,i}$ $(a = b = \infty, d_P = 5\,\mathrm{mm}, \theta = 40°)$

in den Randbereichen die Dicke gleich Null gesetzt und ein flächengewichteter Mittelwert gebildet. Für die Variation dieses Parameters zeigt Abbildung 3.13 die Auswirkung auf die Gesamtimpedanz des doppelwandigen Plattenresonators, als Grundparameter finden wieder die, in Abschnitt 3.3.1 Etablierten, Verwendung. Es zeigt sich eine Anhebung der Resonanzfrequenz bei abnehmenden Dicken der Luftschicht, auch die Maximalwerte von Real- und Imaginärteil der Gesamtimpedanz steigen an.

Luftschicht als poröser Absorber geringen Strömungswiderstands

Abschließend kann die Anpassung der Näherungslösung durch die Beschreibung der Luftschicht als poröser Absorber erfolgen. In Abhängigkeit der Abmessungen und dem damit verbundenen Anteil der Begrenzungsflächen, sind selbstverständlich nur geringe spezifische Strömungswiderstände Ξ zielführend. Für diese Größe wird kein Berechnungsvorschlag aus den Randbedingungen abgeleitet, sie kann versuchsweise zur Anpassung des Modells an die gemessenen Größen verwendet werden. Die Berücksichtigung der Luftschicht als poröser Absorber ist auch dann notwendig, falls der Abschluss einer Anordnung mit einer schallharten Fläche, beispielsweise einen Hallraumboden, erfolgt. Der Fall einer lateral wirksamen Luftschicht enthält keinen Dämpfungsterm, es wird dann nur eine sehr geringe Netto-Absorption α durch die inneren Verluste in den Platten verursacht, die Transmission bei Resonanz ist hier die Ursache für den Hauptanteil der Brutto-Absorption anhand des Verlustgrades β. Somit ist für den Fall eines schallharten Abschlusses ohne eine absorbierende Schicht als Ersatz der Luftschicht keine Absorption der Gesamtanordnung vorhanden.

Beispielhaft zeigt, wieder unter Verwendung der Parameter aus Abschnitt 3.3.1, Abbildung 3.14 die Auswirkung des spezifischen Strömungswiderstandes Ξ auf die Gesamtimpedanz.

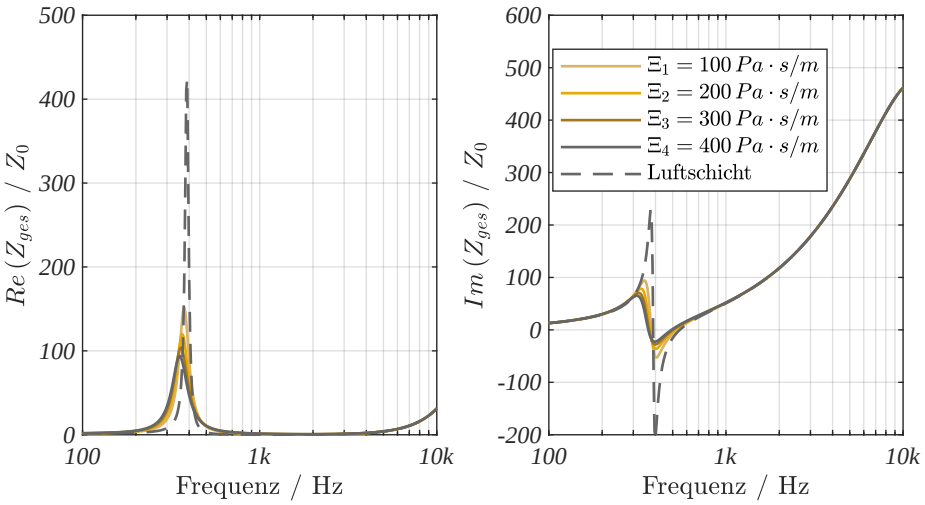

ABBILDUNG 3.14 Gesamtimpedanzen doppelwandiger Plattenresonatoren mit Absorberschichten unterschiedlichen spezifischen Strömungswiderstandes Ξ_i $(a = b = \infty, d_L = 0.01\,\mathrm{m}, \theta = 40°)$

In Strichlinien ist zum Vergleich die Gesamtimpedanz einer doppelwandigen Anordnung mit einer Luftschicht ohne zusätzlichen Strömungswiderstand eingefügt. Die Resonanzfrequenz nimmt bei größeren spezifischen Strömungswiderständen geringfügig ab, jedoch ergibt sich eine deutliche Verbreiterung des Maximums des Realteils der Gesamtimpedanz, in Verbindung mit dem geringeren und flacheren Verlaufs des Imaginärteils kann von einer Erhöhung des resultierenden Absorptionsgrades und auch der Bandbreite dieses Verhaltens ausgegangen werden.

3.4 Gesamtimpedanzen des doppelwandigen Plattenresonators

Nun soll die Anwendung der beschriebenen Ersatzschaltung, mit der angepassten und erweiterten Näherungslösung über die Variation der effektiven Poissonzahlen $\nu_{eff,i}$, sowie der Luftschicht- und Plattendicken $d_{L,i}, d_{P,i}$ am Beispiel des doppelwandigen Plattenresonators in Impedanzgitteranordnung gezeigt werden. Als Grundlage dient die Darstellung einer Anordnung nach Abbildung 3.15, diese ist, für die Berechnung des resultierenden Schallfeldes nach Kapitel 4, in x-Richtung periodisch mit der Wellenlänge $\lambda_x = \sum_{i=1}^{4} a_i$ zu erweitern. Diese Fortsetzung erfolgt zur Erzeugung ausreichend großer Abmessungen im Bereich der beteiligten Wellenlängen in Luft, sowie als Grundvoraussetzung zur Anwendbarkeit der Methoden der Fourier-Akustik, auf welchen anschließend die Beschreibung des Schallfeldes in Kapitel 4 basiert. Es folgt eine Abfolge von Streifen verschiedener Oberflächenimpedanzen Z_i. Mit einem Beispielsatz an Parametern $(a_1 = 0.03\,\mathrm{m}, a_2 = 0.06\,\mathrm{m}, a_3 = 0.09\,\mathrm{m}, a_4 = 0.15\,\mathrm{m}, b = 1\,\mathrm{m}, r = 0.005\,\mathrm{m}, d_P = 0.005\,\mathrm{m}, d_L = 0.01\,\mathrm{m}, \rho = 800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}, E =$

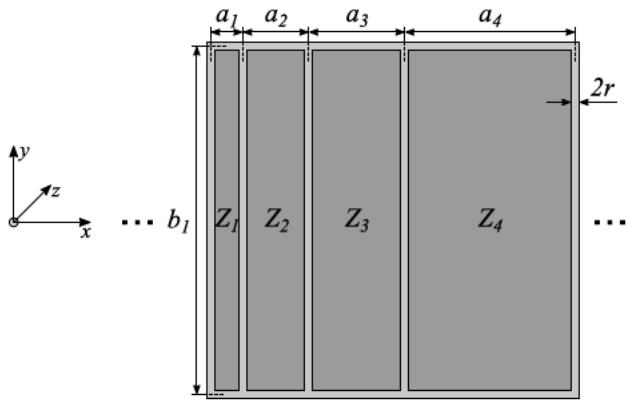

ABBILDUNG 3.15 Horizontalschnitt A-A einer Periode von Teilresonatoren mit zugeordneten Abmessungen und Oberflächenimpedanzen

	ν_{eff}	$d_{P,eff}$	$d_{L,eff}$
Z_1	0.30	6.7 mm	3.3 mm
Z_2	0.25	5.9 mm	6.5 mm
Z_3	0.24	5.6 mm	7.6 mm
Z_4	0.22	5.4 mm	8.5 mm

TABELLE 3.1 Effektive Parameter in Abhängigkeit der Abmessungen für Poissonzahl, Platten- und Luftschichtdicke

$10 \times 10^9 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}, \nu_{MDF} = 0.2, \nu_{Rand} = \nu_{Gummi} = 0.5$) resultieren bei der Berechnung der effektiven Parameter die Werte in Tabelle 3.1.

Unter Zuhilfenahme einer Ersatzschaltung nach Abbildung 3.6, sowie unter Berücksichtigung der vorgeschlagenen Anpassung der effektiven Parameter nach Abschnitt 2.3.3, ergeben sich die in Abbildung 3.16 dokumentierten Gesamtimpedanzen. Für abnehmende Seitenabmessungen zeigt sich ein Anstieg der Resonanzfrequenz, somit liegen bei Kombination von Kammern unterschiedlicher Größe auch verschiedene Resonanzfrequenzen vor. Im folgenden Kapitel wird nun aus diesen unterschiedlichen Impedanzen das Abstrahlverhalten berechnet.

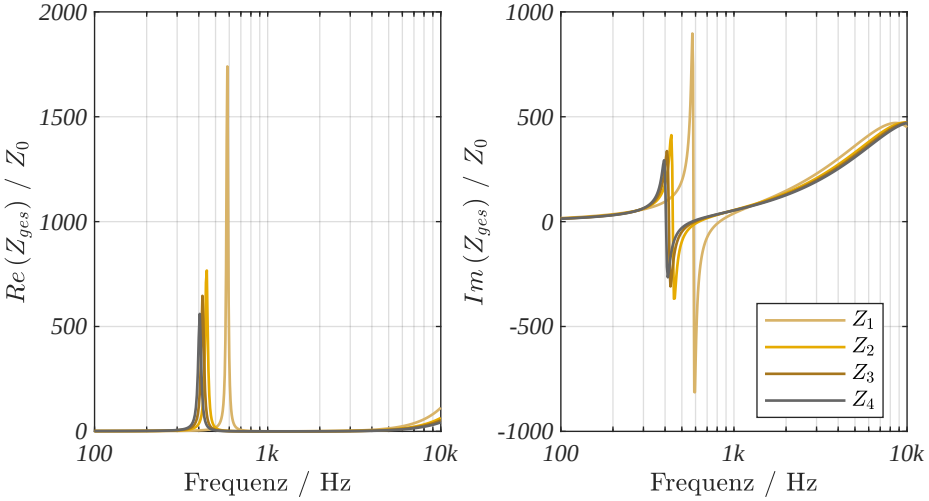

Abbildung 3.16 Gesamtimpedanzen der doppelwandigen Teilresonatoren mit den effektiven Parametern nach Tabelle 3.1 ($\theta = 40°$)

Kapitel 4

Berechnung des resultierenden Schallfeldes

Zur Bestimmung des Reflexionsverhaltens einer Anordnung ist eine geeignete Beschreibung des resultierenden Schallfeldes vorzunehmen. Im Fall einer flächig ausgedehnten, periodischen Struktur ist hierfür eine Betrachtung anhand der Wellenlängen-Zerlegung der Fourier-Akustik geeignet. Es wird eine Zerlegung des Gesamtschallfeldes durchgeführt, die Lösung erhält man durch die Überlagerung N örtlich verteilter Teilschallfeldkomponenten unterschiedlicher Wellenzahlen k_n. Durch die Variation der Impedanz ist vor allem in dieser Koordinatenrichtung von einer Beeinflussung des Reflexionsverhaltens auszugehen, die Berechnung erfolgt für ebene Wellen des Einfallswinkels θ.

4.1 Reflexionsverhalten einer periodischen Oberfläche

Es wird für das Schallfeld vor der Anordnung nach Abbildung 4.1 ein Ansatz, vergleichbar zu dem in Abschnitt 2.3.1, gewählt. Die von Fernández (2013) durchgeführte Aufstellung der Schallfeldkomponenten wird für den hier behandelten Fall nachfolgend angepasst.

4.1.1 Örtliche Fourier-Zerlegung der Oberfläche

Die einfallende ebene Welle ergibt sich, mit der gewählten Orientierung des Koordinatensystems zu

$$p_e = p_0 \cdot e^{jk_x x} \cdot e^{-jk_z z} = p_0 \cdot e^{jk_0 \sin\theta \cdot x} \cdot e^{-jk_0 \cos\theta \cdot z} \quad . \tag{4.1}$$

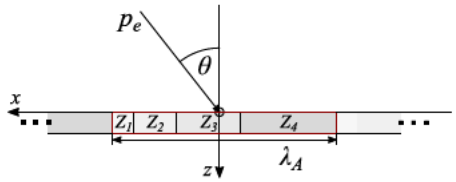

Abbildung 4.1 Schematische Darstellung der periodischen Anordnung

Das reflektierte Schallfeld setzt sich – aufgrund der örtlichen Zerlegung – nun aus der Überlagerung von Teilschallfeldern mit Indices n zusammen, es folgen somit auch Reflexionsfaktoren r_n. Aufgrund der gewählten Periodizität der Anordnung mit der örtlichen Wellenlänge λ_A nach Abbildung 4.1, ist auch deren örtlich verteilte Wellenzahlkomponente periodisch mit

$$k_{An} = \frac{2\pi n}{\lambda_A} \ , \tag{4.2}$$

diese ist, als gedachter Aufpunkt, der übrigen Komponente in x-Richtung hinzuzufügen. Der reflektierte Schalldruck kann nun mit

$$p_r = p_0 \cdot e^{jk_x x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \cdot e^{jk_{An}x} \cdot e^{jk_{zn}z} \ , \tag{4.3}$$

angegeben werden, durch geometrische Addition der Komponenten in x- und z-Richtung folgt für die Wellenzahl des reflektierten Schallfeldes direkt

$$k_0^2 = k_{zn}^2 + (k_{An} + k_x)^2 = k_{zn}^2 + k_{xn}^2 \ . \tag{4.4}$$

Es ergibt sich somit für jedes n eine Wellenzahlkomponente in x-Richtung

$$k_{xn} = \frac{2\pi n}{\lambda_A} + k_0 \sin\theta \ , \tag{4.5}$$

des Weiteren wird, per Definition, der Ausbreitungswinkel θ_n der Teilschallfelder nach

$$k_{xn} = -k_0 \sin\theta_n \tag{4.6}$$

bestimmt, für die Wellenzahlkomponente in z-Richtung folgt dann

$$k_{zn} = \sqrt{k_0^2 - k_0^2 \sin^2\theta_n} = k_0 \cos\theta_n \ . \tag{4.7}$$

Durch die Quadratwurzel ist nach Möser (2015) noch eine Fallunterscheidung für die Wellenzahlen nach Gleichung 4.4 vorzunehmen, es resultiert, je nach Relation der Wellenzahlkomponenten, eine im Fernfeld ausbreitungsfähige Teilschallwelle oder ein exponentiell abklingendes Nahfeld. Zur Verdeutlichung kann diese Gleichung umgeschrieben werden

$$k_{zn} = k_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{\lambda_A} + \sin\theta\right)^2} \ , \tag{4.8}$$

die Fallunterscheidung ergibt

$$\begin{aligned} k_{zn} &= k_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{\lambda_A} + \sin\theta\right)^2} \quad , \quad \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{\lambda_A} + \sin\theta\right) < 1 \\ k_{zn} &= -jk_0 \cdot \sqrt{-1 + \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{\lambda_A} + \sin\theta\right)^2} \quad , \quad \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{\lambda_A} + \sin\theta\right) \geq 1 \ . \end{aligned} \tag{4.9}$$

In Abhängigkeit der Relation von Luftschallwellenlänge, der Abmessung der Anordnung und des Einfallswinkels, gibt es eine Anzahl von Werten für n, für welche die Wellenzahl k_{zn} reale Werte annimmt und somit ein Beitrag zu einem ausbreitungsfähigen Fernfeld existiert.

4.1.2 Formulierung des resultierenden Schallfeldes

Nach der erfolgten Bestimmung der Wellenzahlkomponenten kann das Schallfeld vor der periodischen Anordnung angegeben werden. Der resultierende Schalldruck ergibt sich aus der Addition des einfallenden und reflektierten Anteils zu

$$p = p_e + p_r = p_0 \cdot e^{jk_0 \sin\theta \cdot x} \left(e^{-jk_0 \cos\theta \cdot z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \cdot e^{j\frac{2\pi n}{\lambda_A} \cdot x} \cdot e^{jk_{zn} \cdot z} \right) \ . \tag{4.10}$$

Die Definition der Trennimpedanz verknüpft an der Oberfläche der Anordnung ($z = 0$) Schalldruck und -schnelle

$$Z_T = \frac{p}{v_z} \ . \tag{4.11}$$

Aus dem Trägheitsgesetz der Akustik

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{4.12}$$

folgt für harmonische Schwingungen mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ bei $z = 0$

$$v_z = \frac{j}{\omega \rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \ , \tag{4.13}$$

durch Einsetzen und Ableiten resultiert schließlich

$$v_z = \frac{p_0}{Z_0} \cdot e^{jk_0 \sin\theta \cdot x} \left(\cos\theta - \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \cdot \frac{k_{zn}}{k_0} \cdot e^{jk_{zn} \cdot z} \right) \ . \tag{4.14}$$

Schlussendlich erhält man durch Einsetzen in die Definitionsgleichung der Trennimpedanz die Bestimmungsgleichung für das Reflexionsverhalten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \cdot e^{j\frac{2\pi n}{\lambda_A} \cdot x} \left(1 + \frac{Z_T}{Z_0} \cdot \frac{k_{zn}}{k_0} \right) = \frac{Z_T}{Z_0} \cdot \cos\theta - 1 \ . \tag{4.15}$$

4.1.3 Anpassung für Feld-erregte Strahlungsimpedanzen

Soll eine Berücksichtigung des veränderten Abstrahlverhaltens durch endliche Abmessungen, beschrieben in Abschnitt 2.3.3, anhand der Feld-erregten Strahlungsimpedanzen nach Mechel (1998) erfolgen, ist die erhaltene Bestimmungsgleichung für das Reflexionsverhalten einer periodischen Anordnung anzupassen. Die Anregung und Abstrahlung wird nun nicht mehr direkt in das umgebende Medium durch eine ebene Welle vermittelt, zuvor ist die Strahlungsimpedanz der ebenen Welle in den nun vorliegenden Fall der Feld-erregten Strahlungsimpedanz überzuführen. Für den, aus der Anregung durch die einfallende Welle resultierenden, Anteil ist diese Modifikation direkt durchführbar

$$\frac{Z_0}{\cos\theta} \rightarrow Z_S\left(\theta\right) \ . \tag{4.16}$$

Die Anpassung der Strahlungsimpedanzen der Abstrahlung unter der Summe kann nicht direkt erfolgen, hier müssen für alle realen Komponenten von k_{zn}, also die Anteile an einem ausbreitungsfähigen Fernfeld, die Abstrahlwinkel nach

$$\theta_n = \arcsin\left(-\frac{k_{xn}}{k_0}\right) \tag{4.17}$$

berechnet werden. Nun können für diese Winkel die Feld-erregten Strahlungsimpedanzen bestimmt und in die Gleichung für das Reflexionsverhalten eingesetzt werden

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \cdot e^{j\frac{2\pi n}{\lambda_A}\cdot x}\left(1+\frac{Z_T}{Z_S(\theta_n)}\right) = \frac{Z_T}{Z_S(\theta)} - 1 \ . \tag{4.18}$$

4.1.4 Berechnung der Reflexionsfaktoren

Numerisch kann nun eine Berechnung der Reflexionsfaktoren durchgeführt werden, in dem die unendliche Summe diskretisiert wird. Es erfolgt eine Einteilung der Periode der Anordnung λ_A in $2\cdot N+1$ diskrete Intervalle, die Auswertung erfolgt an den Punkten

$$x_i = (i+0.5)\cdot\Delta x \quad ; \quad i = 0,1,2,\ldots,2N \ . \tag{4.19}$$

Es folgt ein lineares Gleichungssystem $A\cdot r = b$ mit $2\cdot N+1$ Gleichungen zur Bestimmung von $2\cdot N+1$ Reflexionsfaktoren r_n, in Matrixschreibweise ergeben sich die Koeffizienten zu

$$A = \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi(-N)}{\lambda_A}x_{[0]}\left(1+\frac{Z_{T,x_{[0]}}}{Z_S(\theta_{(-N)})}\right)} & \ldots & e^{j\frac{2\pi(N)}{\lambda_A}x_{[0]}\left(1+\frac{Z_{T,x_{[0]}}}{Z_S(\theta_{(N)})}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi(-N)}{\lambda_A}x_{[2N]}\left(1+\frac{Z_{T,x_{[2N]}}}{Z_S(\theta_{(-N)})}\right)} & \ldots & e^{j\frac{2\pi(N)}{\lambda_A}x_{[2N]}\left(1+\frac{Z_{T,x_{[2N]}}}{Z_S(\theta_{(N)})}\right)} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{-N} \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \frac{Z_{T,x_{[0]}}}{Z_S(\theta)} - 1 \\ \vdots \\ \frac{Z_{T,x_{[2N]}}}{Z_S(\theta)} - 1 \end{bmatrix} , \tag{4.21}$$

die Lösungen für r_n erhält man aus

$$r = A^{-1} \cdot b \; . \tag{4.22}$$

4.2 Berechnung des Abstrahlverhaltens eines doppelwandigen Plattenresonators

Durch die vorangestellte Beschreibung kann eine Bewertung des Reflexionsverhaltens einer periodischen Anordnung anhand der Reflexionsgrade, als Verhältnis der einfallenden und reflektierten Energie, vorgenommen werden. Aus der Bedingung der Fallunterscheidung nach Gleichung 4.9 resultiert, bei gleichbleibender Periodendauer der Anordnung λ_A, mit zunehmendem Einfallswinkel θ nur für höhere Frequenzen die Möglichkeit eines Beitrages zu einem ausbreitungsfähigem Fernfeld.

Die Abbildungen 4.2 bis 4.5 zeigen, zusätzlich zur spekularen Reflexion (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel), frequenzabhängige Reflexionen in Richtung der Anregung. Die betragsmäßig größten Reflexionsgrade dieser Rückwürfe ergeben sich, bei Anregung mit einer ebenen Welle unter $\theta = 40°$ und mit den beispielhaft angenommenen Parametern nach Abschnitt 3.4, bei 628 Hz mit -3 dB und bei 725 Hz mit -10 dB relativ zur einfallenden Energie. Dieses Verhalten zeigt sich in unterschiedlich starker Ausprägung mit Reflexionsgraden von -23 dB bis -3 dB in einer Bandbreite von ungefähr 120 Hz.

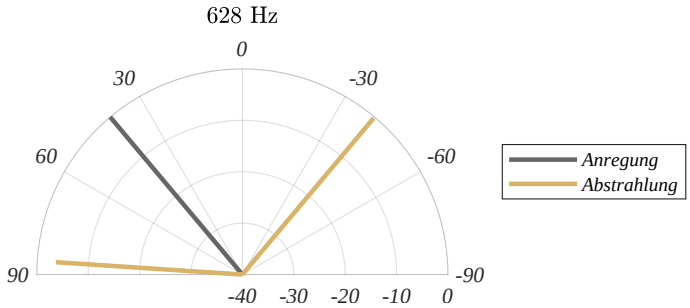

Abbildung 4.2 Berechnetes Reflexionsverhalten des doppelwandigen Plattenresonators mit den Parametern nach Abschnitt 3.4 bei 628 Hz

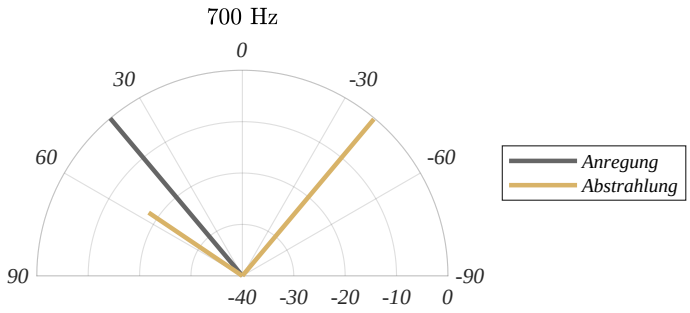

Abbildung 4.3 Berechnetes Reflexionsverhalten des doppelwandigen Plattenresonators mit den Parametern nach Abschnitt 3.4 bei 700 Hz

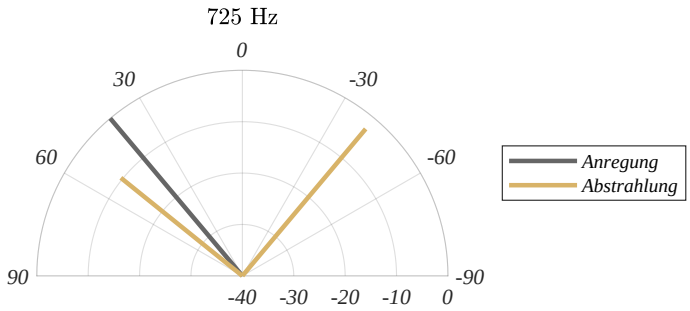

Abbildung 4.4 Berechnetes Reflexionsverhalten des doppelwandigen Plattenresonators mit den Parametern nach Abschnitt 3.4 bei 725 Hz

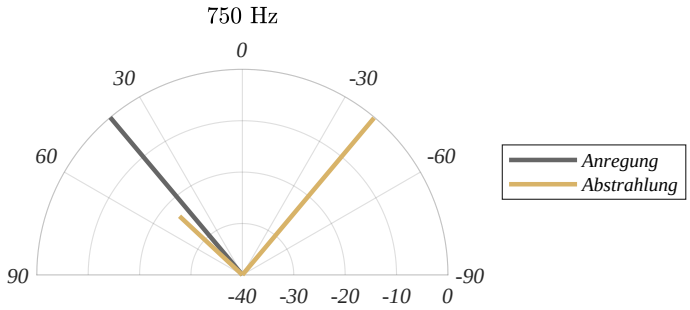

Abbildung 4.5 Berechnetes Reflexionsverhalten des doppelwandigen Plattenresonators mit den Parametern nach Abschnitt 3.4 bei 750 Hz

Kapitel 5

Messungen

Die Anwendbarkeit und der Gültigkeitsbereich der Näherungslösung bei der Bestimmung der Trennimpedanzen nach Kapitel 2 und der resultierenden Gesamtimpedanzen anhand der elektro-akustischen Ersatzschaltung aus Kapitel 3, sind durch geeignete Versuchsanordnungen zu überprüfen. Die so bestimmten Gesamtimpedanzen bilden auch die Grundlage bei der Beschreibung des Reflexionsverhaltens einer periodischen Anordnung in Kapitel 4. Eine Validierung wird durch geeignete Testobjekte mit einem Aufbau zur Bestimmung des Schallreflexionsverhaltens im reflexionsarmen Raum, sowie durch die Bestimmung des Schallabsorptionsverhaltens im Hallraum, durchgeführt.

5.1 Testobjekte

Die messtechnische Überprüfung erfolgt anhand von drei verschiedenen Testobjekten, diese sind wie nachfolgend beschrieben gewählt, um ein aussagekräftiges Ergebnis mit der Möglichkeit der Zuordnung des beobachteten Verhaltens zu dessen Ursache zu ermöglichen.

Referenz Als Referenzobjekt bezüglich der endlichen Abmessungen und der daraus resultierenden Kantenreflexionen wird eine, als schallhart angenommene, MDF-Platte mit den Parametern $a = 1.68\,\mathrm{m}, b = 0.95\,\mathrm{m}, d_{P,Ref} = 19\,\mathrm{mm}, \rho = 800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ verwendet.

Hohlraumresonator Die Qualität der üblichen Näherungslösung bei der Berechnung von Resonanzabsorbern anhand von Trennimpedanzen, beschrieben in Abschnitt 2.3 und ausführlich bei Mechel (1998) oder Fasold et al. (1987), wird durch den Aufbau eines Hohlkammer-Doppelwandresonators mit MDF-Platten der Parameter $a = 1.68\,\mathrm{m}, b = 0.95\,\mathrm{m}, d_{P,Res} = 5\,\mathrm{mm}, \rho = 800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ und einer eingeschlossenen Luftschicht der Dicke $d_L = 10\,\mathrm{mm}$ überprüft, der Randbereich ist mit Rechteckleisten der Abmessungen $d_{Rand} = 10\,\mathrm{mm}, b_{Rand} = 20\,\mathrm{mm}$ in vollflächiger Klebeverbindung kraftschlüssig geschlossen.

Impedanzgitter Die Impedanzgitteranordnung ist eine Variante des Hohlraumresonators, nun jedoch durch Quadratleisten eingeteilt in Kammern der Abmessungen $a_1 =$

Abbildung 5.1 Aufbau des doppelwandigen Resonators in Impedanzgitteranordnung ohne abschließende Decklage in der Aufsicht von oben

$30\,\mathrm{mm}, a_2 = 60\,\mathrm{mm}, a_3 = 90\,\mathrm{mm}, a_4 = 150\,\mathrm{mm}, r = 5\,\mathrm{mm}$ und einer örtlichen Periode von $\lambda_A = 0.33\,\mathrm{m}$, gemäß dem Aufbau in Abbildung 5.1 oder nach der schematischen Darstellung in Abbildung 1.1. Anhand dieser Anordnung kann eine Validierung der grundsätzlichen Möglichkeit der Anpassung der Näherungslösung aus Abschnitt 2.3.3 durch die vorgeschlagenen Parameter der effektiven Poissonzahl, Plattendicke und Luftschicht versucht werden. Des Weiteren wird das Reflexionsverhalten, im Hinblick auf die Übereinstimmung mit der Berechnung aus Kapitel 4, untersucht.

5.2 Versuchsaufbau Reflexionsverhalten

Zur Bestimmung des Reflexionsverhaltens ist ein geeigneter Versuchsaufbau zu wählen, welcher die Trennung der einfallenden und reflektierten Anteile des Schallfeldes in der digitalen Signalverarbeitung ermöglicht. Hierzu wird nach Abbildung 5.2, ähnlich zur Bestimmung des Abstrahlungsverhaltens eines Lautsprechers, das Verhalten des Testobjekts in einer Transversalebene untersucht. Aufgrund der zusätzlich benötigten Anregung durch eine feststehende Punktschallquelle, als Voraussetzung für die näherungsweise Erfüllung einer einfallenden ebenen Welle, ist allerdings die Messung an verschiedenen Positionen im Raum erforderlich und kann nicht durch die Drehung des Testobjektes ermittelt werden.

Die Messungen wurden im reflexionsarmen Vollraum in der Prüfhalle des Fachgebiet Technische Akustik der TU Berlin durchgeführt. Dieser umfasst ein freies Raumvolumen von $1070\,\mathrm{m}^3$ und hat eine untere Grenzfrequenz von 63 Hz. Aufgrund der begehbaren Grundfläche von ungefähr 8.5 x 14.5 m und der in den Raum öffnenden Tür, wurde der Versuchsaufbau mit einem maximal möglichen Radius des Halbkreises der Messpositionen um den Mittelpunkt des Testobjekts von $r_H = 5\,\mathrm{m}$ gewählt. Die Anregung erfolgte mit einer Punktschallquelle an den

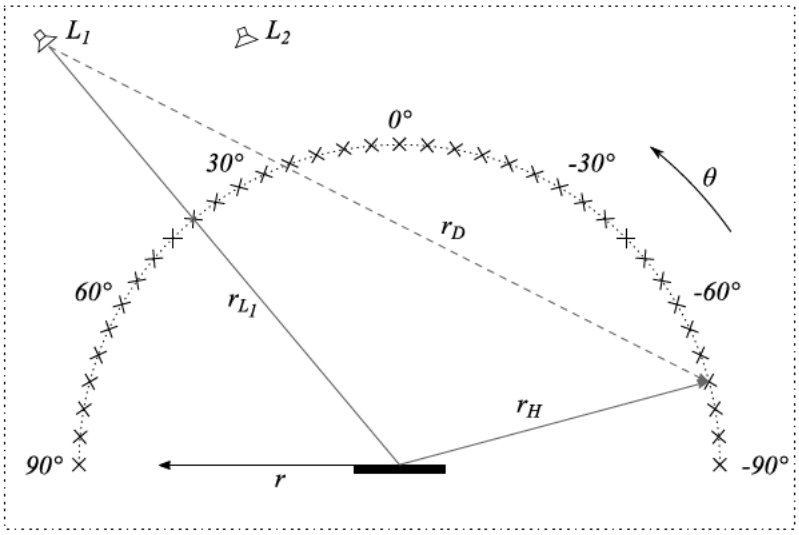

ABBILDUNG 5.2 Schematische Darstellung des Messaufbaus im Reflexionsarmen Raum zur Bestimmung des Reflexionsverhaltens der Testobjekte

Positionen L_1 ($\theta_{L_1} = 40°$) und L_2 ($\theta_{L_2} = 20°$). In Schritten von 5° wurde zwischen $\theta = 90°$ und $\theta = -90°$ an insgesamt 37 Messpunkten die Impulsantwort bestimmt. Beispielhaft sind mit Pfeilen, bei Anregung mit der Punktschallquelle an Position L_1, die unterschiedlichen Ausbreitungswege für den Direktschall r_D und den reflektierten Anteil des Testobjekts $r_L + r_H$ bei $\theta = -75°$ dargestellt. Abbildung 5.3 zeigt den Versuchsaufbau mit Testobjekt, dem Messmikrofon auf der Position $\theta = 90°, r_H = 5\,\mathrm{m}$ und der Punktschallquelle bei $\theta = 90°, r_{L,40°} = 8.65\,\mathrm{m}$.

5.2.1 Fernfeldbedingungen

Bei der Betrachtung der Schallabstrahlung von Ebenen sind, aufgrund der üblicherweise verwendeten Fernfeldnäherung, die Bedingungen für deren Anwendung zu beachten. Auch die, in Kapitel 4 durchgeführten, Berechnungen beziehen sich auf ein ausbreitungsfähiges Fernfeld und nicht das exponentiell abklingende Nahfeld in der Umgebung der Strahlerfläche. Die drei Fernfeldbedingungen können nach Cremer et al. (2009) oder Möser (2015) angegeben werden, der Mittelpunktabstand R ist nachfolgend bereits durch den Halbkreisradius r_H und die maximale Abmessung L_{max} durch die Abmessung in x-Richtung a ersetzt.

1 $- r_H \gg a$

Die erste Fernfeldbedingung folgt aus der geometrischen Annahme, dass die Strahlerabmessungen im Vergleich zum Mittelpunktabstand vernachlässigt werden können. Im Fall der verwendeten Versuchsanordnung ist diese, durch die vorliegenden Abmessungen $r_H = 5\,\mathrm{m}$ und $a = 1.68\,\mathrm{m}$, nur mit dem Faktor 3 erfüllt.

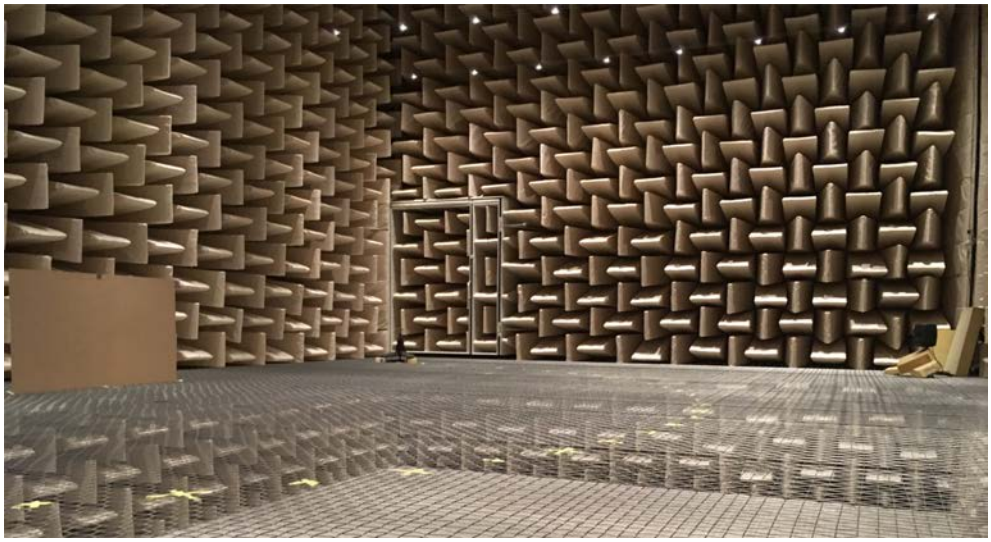

Abbildung 5.3 Versuchsaufbau im reflexionsarmen Vollraum zur Bestimmung des Reflexionsverhaltens der Testobjekte

2 – $r_H \gg \lambda_0$

Wird eine Ausbreitung als ebene Welle vorausgesetzt, ergibt sich die Forderung, dass der Mittelpunktabstand groß gegenüber der Schallwellenlänge sein muss. Nach Möser (2015) ist hier die Abweichung von der exakten Lösung bei Verwendung einer einfachen Größer-als-Relation gering, für den Fall der Versuchsanordnung resultiert somit eine untere Grenzfrequenz von $f_u = 200\,\mathrm{Hz}$

3 – $\frac{r_H}{a} \gg \frac{a}{\lambda_0}$

Anhand dieser Bedingung wird die Gültigkeit der Näherung durch Linearisierung der Taylor-Reihe des Phasenterms überprüft, auch hier ist nach Möser (2015) wieder der Austausch von $\gg$ durch $>$ legitim, wenn eine Phasenfehler von $\pi/4$ toleriert werden kann. Es folgt eine obere Grenzfrequenz von $f_o = 600\,\mathrm{Hz}$.

Bewertung der Qualität der Fernfeldnäherung

Durch die vorliegenden Abmessungen der Testobjekte a, b und des maximal möglichen Messradius r_H ergibt sich – selbst bei optimistischer Annahme der Erfüllung der dritten Fernfeldbedingung mit der Toleranz eines Phasenfehlers von 45° – lediglich ein Gültigkeitsbereich der Fernfeldnäherung von

$$200\,\mathrm{Hz} < f < 600\,\mathrm{Hz} \quad . \tag{5.1}$$

Des Weiteren ist die erste Fernfeldbedingung nur mit einem Faktor von 3 erfüllt, es ist also zu beachten, dass die Fernfeldnäherung, auch in der angegebenen Gültigkeitsbandbreite, eine mögliche Fehlerquelle darstellt.

Messung	Testobjekt	Bedingungen
M0001 - M0074	Referenz	$T = 20.6 \ldots 20.7\,°\mathrm{C}, \varphi = 57 \ldots 58\,\%$
M0081 - M0154	Hohlraumresonator	$T = 20.7 \ldots 20.9\,°\mathrm{C}, \varphi = 58 \ldots 59\,\%$
M0161 - M0234	Impedanzgitter	$T = 20.8 \ldots 20.9\,°\mathrm{C}, \varphi = 58 \ldots 59\,\%$
M0401 - M0474	Impedanzgitter	$T = 20.2 \ldots 20.3\,°\mathrm{C}, \varphi = 58 \ldots 59\,\%$
M0481 - M0554	Hohlraumresonator	$T = 20.4 \ldots 20.5\,°\mathrm{C}, \varphi = 59 \ldots 60\,\%$
M0561 - M0634	Referenz	$T = 20.5 \ldots 20.6\,°\mathrm{C}, \varphi = 59 \ldots 60\,\%$

Tabelle 5.1 Zuordnung der Messpositionen und Dokumentation der Luftmesswerte

Beschreibung	Hersteller	Typ
Aktiv-Lautsprecher	Genelec	8351 APM
Messmikrofonkapsel	Microtech Gefell	MK 250
Messmikrofonvorverstärker	Microtech Gefell	MV 220S P48
Kalibrator	Brüel & Kjaer	Typ 4231
USB Audio-Interface	RME	Babyface
Messsoftware	AMFG	EASERA 1.2.8

Tabelle 5.2 Verwendetes Equipment zur Messung des Reflexionsverhaltens

5.2.2 Messverfahren

Zur Bestimmung des Reflexionsverhaltens wurden für jedes der drei Testobjekte Messungen der Impulsantwort an allen Kombinationen der zwei Sende- und 37 Empfangspositionen nach Abbildung 5.3 durchgeführt, ein Messdurchgang wurde immer bei $\theta = 90°$ begonnen. Es erfolgte eine exakte Markierung der festgelegten Messpositionen zur Voraussetzung einer möglichst genauen Reproduktion im Bereich einer örtlichen Unsicherheit von maximal 10 mm in den Durchgängen der einzelnen Testobjekte. Bei dem vorliegenden Mittelpunktabstand r_H entspricht dies einer möglichen Abweichung der so gemessenen Schalldruckpegel von $\Delta L < 0.01\,\mathrm{dB}$. Eine Zuordnung der Einzelmessungen zu den Testobjekten mit den Bedingungen hinsichtlich Temperatur T und relativer Luftfeuchte φ ist in Tabelle 5.1 gegeben, für alle Messungen waren gleichmäßige Bedingungen hinsichtlich der Luftparameter gegeben. Die gesamte Messkette wurde zur Kompensation der Laufzeit und mit dem Ziel des Erhalts von absoluten Schalldruckpegeln kalibriert. Eine Hardware-Referenzmessung wurde durchgeführt, Tabelle 5.2 gibt eine Auflistung des verwendeten Messequipments. Das Messmikrofon erfüllt die Anforderung an Klasse 1 nach DIN EN (2014), zur Erweiterung des Frequenzbereiches mit linearem Frequenzgang erfolgte an jeder Messposition eine Ausrichtung des Mikrofons auf die Mitte des Testobjektes ($\theta_{Mikrofon} = 0°, \phi_{Mikrofon} = 0°$), gemäß den Datenblattinformationen von Microtech Gefell (2003) ist hierdurch auch der Frequenzgang für $f > 2\,\mathrm{kHz}$ mit $\Delta L < 1\,\mathrm{dB}$ nahezu linear. Als Messsignal wurde, durch Vergleich der resultierenden Impulsantworten und Frequenzgänge, ein logarithmischer Sinussweep der Länge $t = 2.7\,\mathrm{s}$ und einer Abtastrate

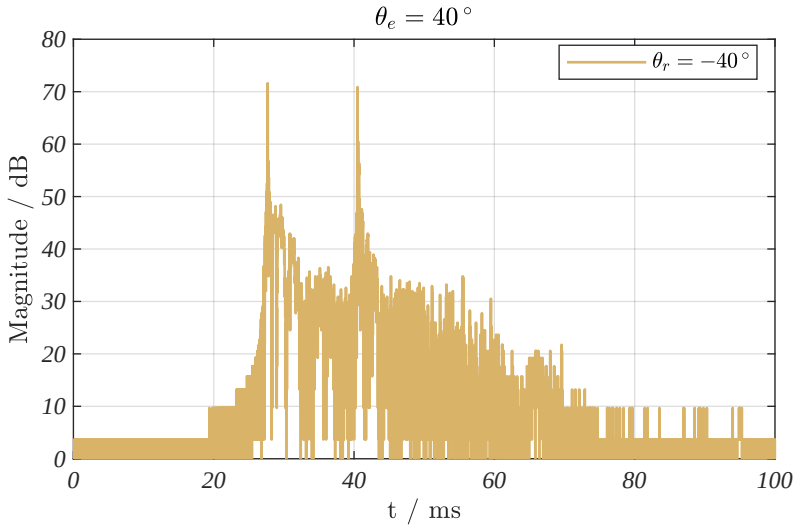

Abbildung 5.4 Energy Time Curve des Referenzobjektes bei $\theta_e = 40°$ und $\theta_r = -40°$

von $f_s = 96\,\text{kHz}$ gewählt, es erfolgte jeweils eine Mittlung über zwei Messungen. Es zeigten sich keine Abweichungen im Vergleich zu längeren Sweeps oder der Durchführung von mehr Mittlungen. Pro Messposition wurden mit dem beschriebenen Verfahren zwei separate Impulsantworten aufgezeichnet.

5.2.3 Digitale Signalverarbeitung

Zur Darstellung und Bewertung der Messergebnisse ist eine Trennung des Direktschalls von den Reflexionsanteilen des Testobjektes in den erhaltenen Impulsantworten erforderlich. Die digitale Signalverarbeitung wurde mit MATLAB unter Verwendung von Funktionen der AKtools von Brinkmann und Weinzierl (2017), sowie aus der ITA-Toolbox von Berzborn et al. (2017) realisiert.

Abbildung 5.4 zeigt beispielhaft die Energy Time Curve bei Anregung des Referenztestobjekts mit einer Punktschallquelle an der Position $L_1, \theta_{L_1} = 40°$. Es kann deutlich erkennbar zwischen dem Direktschall bei $t = 28\,\text{ms}$ und der Reflexion über das Testobjekt bei $t = 40\,\text{ms}$ unterschieden werden, diese Werte entsprechen den entfernungsbedingten Laufzeiten aus $r_{L_1} + r_H$ und $r_{D,40°,-40°}$.

Mit abnehmenden Winkeln θ liegen diese beiden Anteile nun, aufgrund der schwindenden Laufzeitunterschiede zwischen dem Direkt- und Reflexionsanteil, immer näher zusammen. Abbildung 5.5 zeigt eine Überlagerung der Energy Time Curves an allen 37 Messpositionen für das Referenzobjekts bei der Anregung von Position L_1. Zur Verdeutlichung zeigt Abbildung 5.6 einen vergrößerten Ausschnitt dieser Überlagerung, es sind die vier Direktschallanteile mit der längsten Laufzeit, also von $\theta = -75°$ bis $\theta = -90°$, sowie alle reflektierten Anteile um $t = 40\,\text{ms}$ zu erkennen. Es zeigt sich, dass innerhalb einer Zeit von

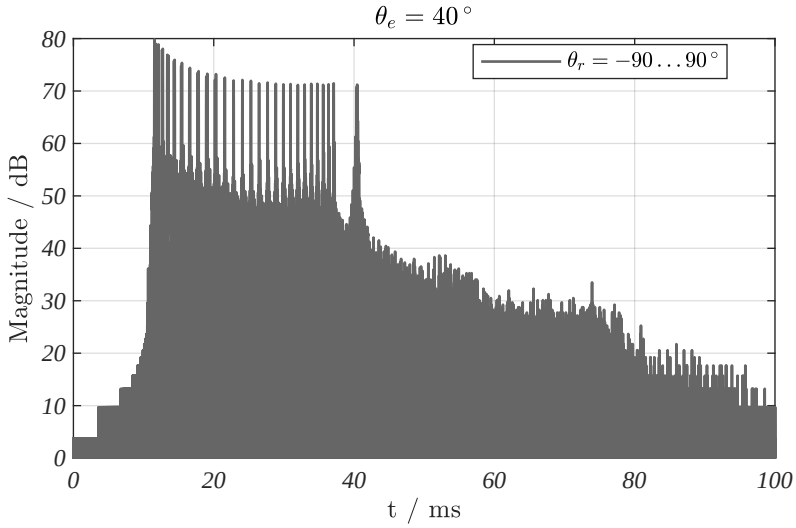

Abbildung 5.5 Energy Time Curve des Referenzobjektes bei $\theta_e = 40°$ und $\theta_r = -90 \ldots 90°$

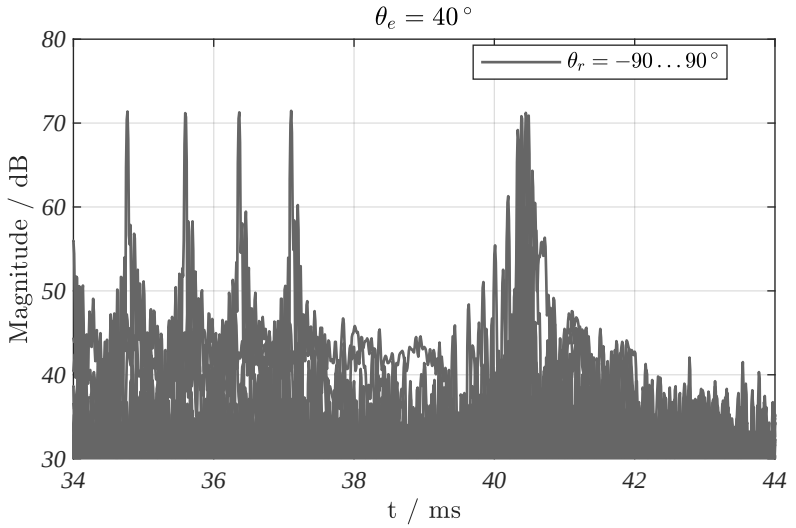

Abbildung 5.6 Vergrößerter Ausschnitt der Energy Time Curve des Referenzobjektes bei $\theta_e = 40°$ und $\theta_r = -90 \ldots 90°$

Abbildung 5.7 Hallraum mit zusätzlichen Reflektoren in der Prüfhalle des Fachgebiets Technische Akustik der TU Berlin

$t = 1\,\mathrm{ms}$ die Energie der einzelnen Impulse um $> 25\,\mathrm{dB}$ abfällt. Bei $t = 39\,\mathrm{ms}$ kann daher, mithilfe einer Fensterfunktion, die Trennung der Anteile durchgeführt werden.

Aufgrund der Geometrie der Anordnung sind die Laufzeitunterschiede bei der zweiten Sendeposition $L_2, \theta_{L_2} = 20°$ weniger kritisch und daher nicht gesondert dargestellt.

5.3 Versuchsaufbau Schallabsorptionsgrad

Die Messungen des Schallabsorptionsgrads wurden im Hallraum in der Prüfhalle des Fachgebiets Technische Akustik der TU Berlin durchgeführt. Der Hallraum hat ein Volumen von $200\,\mathrm{m}^3$, zur Steigerung der Diffusität sind, wie in Abbildung 5.7 ersichtlich, Reflektoren in den Raum eingebracht. Bei Anregung mit einer omnidirektionalen Schallquelle wurden für zwei Sendepositionen jeweils vier Empfangspositionen mit feststehenden Mikrofonen ausgewertet. Eine Auflistung des gesamten Messequipments gibt Tabelle 5.3, für die Mikrofone wurde jeweils eine Kompensation des Frequenzgangs durchgeführt. Die Referenzmessung des leeren Hallraums ohne Testobjekt ist in Abbildung 5.8 dargestellt, ab 250 Hz zeigt sich eine geringe Standardabweichung von $SD < 0.2\,\mathrm{s}$ der gemessenen Nachhallzeiten. Für den Frequenzbereich darunter ist die Qualität der Auswertung, bedingt durch die fehlende Diffusität und beginnende modale Bestimmung des Schallfeldes auch aufgrund des Raumvolumens und der daher stark schwankenden Einzelmesswerte, fraglich. Eine Einschränkung der Gültigkeit

Beschreibung	Hersteller	Typ
Lautsprecher	Outline	GSR
Verstärker	LAB.GRUPPEN	LUCIA 240/2M
Mikrofon 1	Behringer	ECM 800
Mikrofon 2	Behringer	ECM 800
Mikrofon 3	iSEMcon	EMX-7150
Mikrofon 4	NTi Audio	MA220, MC230
Audio-Interface	Merging Technologies	HAPI (ADA8)
Messsoftware	MathWorks	MATLAB R2018a
Messsoftware	Brinkmann und Weinzierl (2017)	AKtools

TABELLE 5.3 Verwendetes Equipment zur Messung des Schallabsorptionsgrads

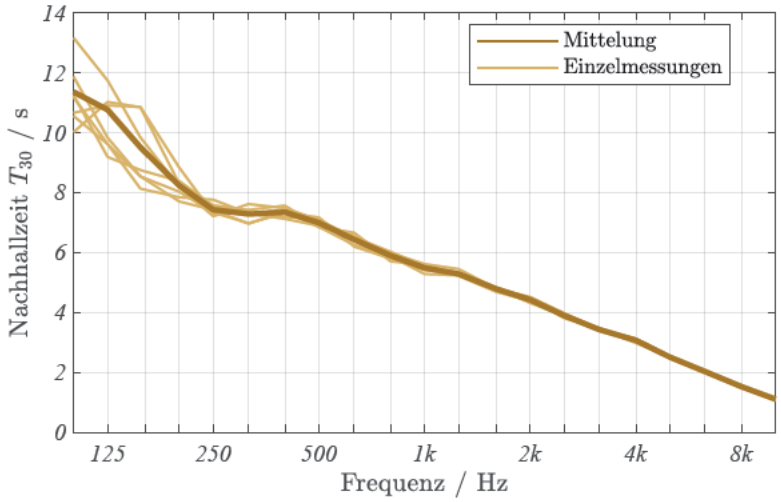

ABBILDUNG 5.8 Nachhallzeit T_{30} des leeren Hallraums in der Prüfhalle des Fachgebiets Technische Akustik der TU Berlin

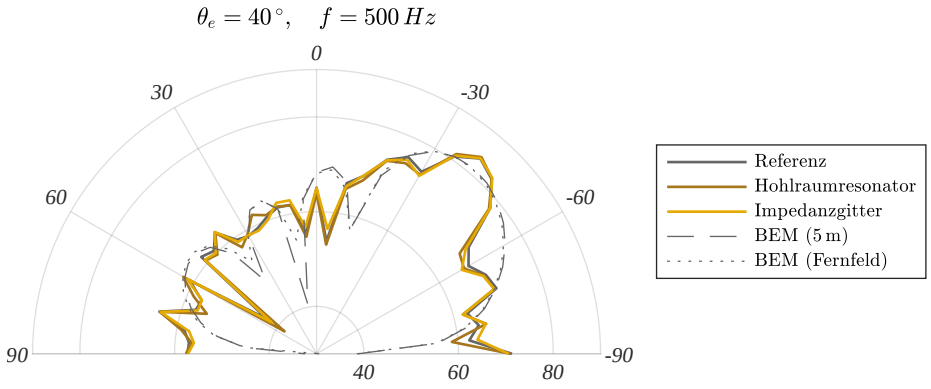

ABBILDUNG 5.9 Polarplot des Abstrahlverhaltens der Referenzanordnung bei $f = 500\,\text{Hz}$ und Anregung unter $\theta_e = 40°$

der gemessenen Absolutwerte des Schallabsorptionsgrades ist durch die geringe Fläche der Testobjekte von $A = 1.6\,\text{m}^2$ gegeben, nach DIN EN ISO (2003) ist eine Mindestfläche der Prüfobjekte von $A = 12\,\text{m}^2$ erforderlich. Allerdings sind, aufgrund der gleichen Abmessungen der Testobjekte, relative Bewertungen der Schallabsorptionsgrade möglich.

5.4 Messergebnisse

Eine Vergleich des in Abschnitt 4.2 berechneten Reflexionsverhaltens mit den Messergebnissen wird sowohl durch Darstellungen der Abstrahlcharakteristik anhand von Polarplots, als auch der Betragsspektren an den einzelnen Messpositionen versucht. Eine Beurteilung der Qualität der erweiterten Näherungslösung nach Abschnitt 3.3 wird anhand der durchgeführten Messungen des Schallabsorptionsgrades im Hallraum durchgeführt. Aufgrund der Anzahl der Messpositionen sind nur einzelne relevante Darstellungen der Betragsspektren oder Polarplots nachfolgend direkt angegeben, weitere Abbildungen sind im Anhang B zu finden.

5.4.1 Reflexionsverhalten

Zur Bewertung der Zuverlässigkeit der erhaltenen Messergebnisse des Abstrahlverhaltens der Testobjekte, erfolgt vor deren Darstellung und Bewertung zunächst ein Vergleich mit Ergebnissen aus einer BEM-Simulation der Testanordnung.

Bewertung der Qualität der Messergebnisse

Ein Vergleich der gemessenen Abstrahlcharakteristik mit berechneten Werten einer BEM-Simulation ist in den Abbildungen 5.9 und 5.10 gegeben. Die Berechnungen sind BEM-Simulationen eines Testobjektes der Abmessung der verwendeten Anordnung als schallharte Begrenzungsfläche vor einem schallweichen Schallschirm, vergleichbar mit dem Messaufbau der Referenzanordnung im reflexionsarmen Raum. Es sind Ergebnisse in einem Abstand von

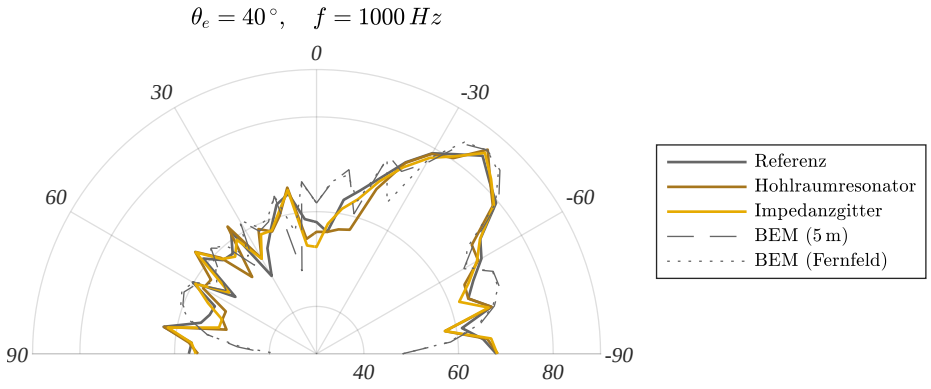

Abbildung 5.10 Polarplot des Abstrahlverhaltens der Referenzanordnung bei $f = 1000\,\text{Hz}$ und Anregung unter $\theta_e = 40°$

$r_H = 5\,\text{m}$ vor dem Testobjekt und im Fernfeld mit der Software BEM++ 3.0 von Śmigaj et al. (2015) berechnet. In den Berechnungen zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Werte in einem Abstand von 5 m und im Fernfeld von zumeist $\Delta L = \pm 1\,\text{dB}$. Dieses Ergebnis der BEM-Simulation stützt eine Annahme der Gültigkeit der Fernfeldnäherung hinsichtlich der gemessenen Werte im Betragsspektrum auch oberhalb der, aus der dritten Fernfeldbedingung (bezüglich des Phasenfehlers) resultierenden, Grenzfrequenz von 600 Hz. Es zeigen sich gute Übereinstimmungen der Ausprägung von Haupt- und Nebenkeulen zwischen den Messwerten und der Simulation bezüglich der Magnitude von $\Delta L = \pm 2\,\text{dB}$. Die exakten Positionen der richtungsabhängigen Einschnürungen stimmen nicht überein, allerdings sind diese auch sehr stark frequenzabhängig und verschieben sich sehr deutlich mit wenigen Hz Abweichung.

Beim Vergleich der verschiedenen Testobjekte und der Messdurchgänge untereinander, kann eine sehr gute Übereinstimmung der Magnituden von $\Delta L = \pm 0.5\,\text{dB}$ und der Positionen der Haupt- und Nebenkeulen festgestellt werden, dies ist ein Anzeichen der hohen Zuverlässigkeit der durchgeführten Messungen.

Darstellung des Reflexionsverhaltens

Aufgrund der stark frequenzabhängigen Ausbildung des Abstrahlverhaltens, wird nachfolgend der Vergleich der Testobjekte anhand von Polarplots der Terzbänder durchgeführt, auch für die Abbildungen der Betragsspektren erfolgt eine terzweise Glättung.

Im berechneten Frequenzbereich nach Abschnitt 4.2 ergibt sich eine Abweichung des Reflexionsverhaltens der untersuchten Testobjekte, Abbildung 5.11 zeigt die Messergebnisse als Betragsspektrum. Das Testobjekt des doppelwandigen Plattenresonators in Impedanzgitteranordnung weist im Bereich von 600 bis 700 Hz bei einer Anregung unter $\theta_e = 40°$ an der Messposition $\theta_r = 90°$ eine Überhöhung der Magnitude von 3 dB auf. Verglichen mit den absoluten Werten der Magnitude in Hauptreflexionsrichtung an der Messposition $\theta_r = -40°$, dargestellt in Abbildung 5.12, zeigt sich allerdings ein Unterschied von ca. $-25\,\text{dB}$. Die fest-

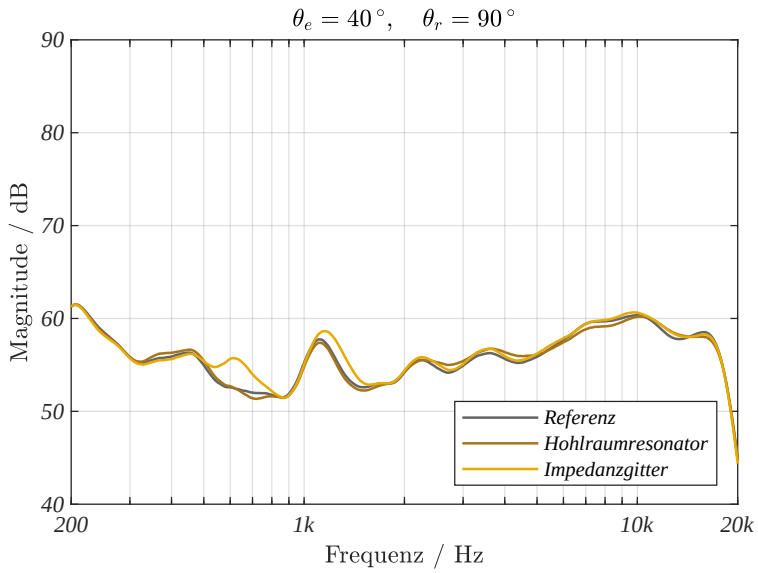

Abbildung 5.11 Betragsspektrum der Messergebnisse des reflektierten Anteils bei $\theta_e = 40°, \theta_r = 90°$

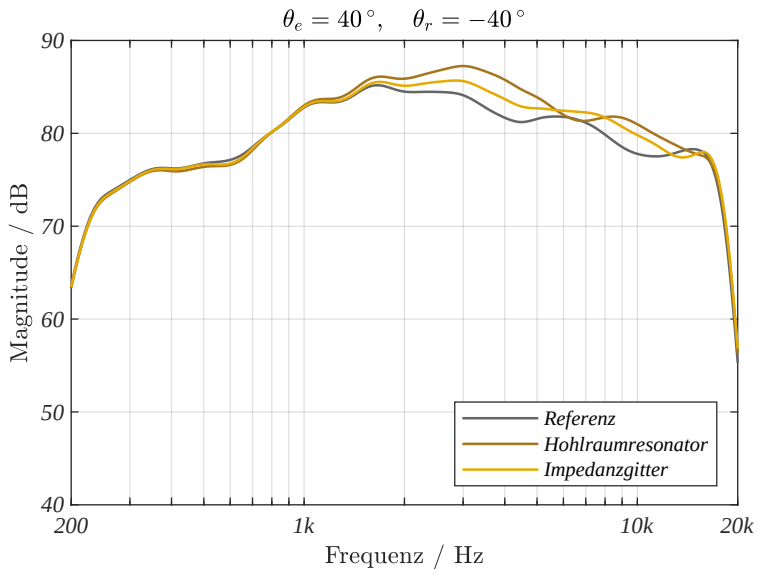

Abbildung 5.12 Betragsspektrum der Messergebnisse des reflektierten Anteils bei $\theta_e = 40°, \theta_r = -40°$

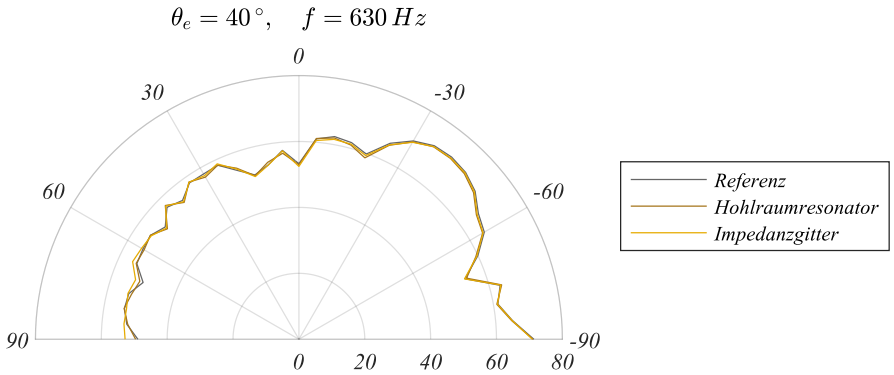

Abbildung 5.13 Polarplot der Messergebnisse des reflektierten Anteils im Terzband 630 Hz

gestellte Reflexion bei $\theta_r = 90°$ ist somit deutlich abgeschwächt gegenüber der Abstrahlung in Hauptrichtung.

Der terzweise Polarplot der Abstrahlcharakteristik bei einer Anregung unter $\theta_e = 40°$ in Abbildung 5.13, ergibt neben dieser Rückreflexion bei $\theta_r = -90°$ mit 3 dB weitere Abweichungen im Bereich von $\theta_e = 70°$ mit Erhöhungen der Magnitude um 2 dB bei Vergleich des Testobjekts Impedanzgitter mit den anderen beiden Vergleichsobjekten. Bei der Betrachtung der Polarplots einzelner Frequenzen in der FFT-Auflösung treten keine weiteren deutlichen Reflexionen außerhalb der Hauptabstrahlrichtung und den Nebenabstrahlungen, bedingt durch die endlichen Abmessungen, auf. In 5.13 können auch die beschriebenen Grenzen des Verfahrens der Trennung der Signalanteile in der digitalen Signalverarbeitung mittels Fensterung beobachtet werden: Der deutliche Anstieg der Magnitude für alle Testobjekte ab $\theta = -80°$ (anstelle einer Einschnürung) kann auf den zu geringen Unterschied der Laufzeiten von Direktanteil und Reflexion zurückgeführt werden, der als Reflexion bezeichnete Anteil enthält somit noch Teile des Direktschalls.

Nun fällt bei der Betrachtung von Abbildung 5.12 auf, dass für Frequenzen $f > 1.6$ kHz deutliche Unterschiede der Magnituden von bis zu 8 dB zwischen den Messergebnissen der einzelnen Testobjekte bestehen. Vergleicht man die Betragsspektren der Messpositionen $\theta_r = -20°$ bis $\theta_r = -60°$ (siehe Abbildungen B.60 bis B.68) ergibt sich, wie auch der beispielhaft ausgewählte Polarplot der Terz um $f = 4$ kHz in Abbildung 5.14 zeigt, vor allem für das Testobjekt Hohlraumresonator und in abgeschwächter Form für die Impedanzgitteranordnung, eine Fokussierung durch Verengung und Anhebung der Abstrahlung in Hauptreflexionsrichtung um $\theta_r = -40$ dB.

5.4.2 Schallabsorptionsgrad

Als Ergebnis der Messungen zeigt Abbildung 5.15 die Schallabsorptionsgrade in Terzbändern α_s der Testobjekte. Lediglich für den Bereich $f > 5$ kHz nimmt die Standardabweichung der einzelnen Messdurchgänge, aufgrund der hohen Luftabsorption und der vergleichsweise geringen äquivalenten Absorptionsfläche, Werte von $SD > 0.02$ s an. Somit wird im Bereich

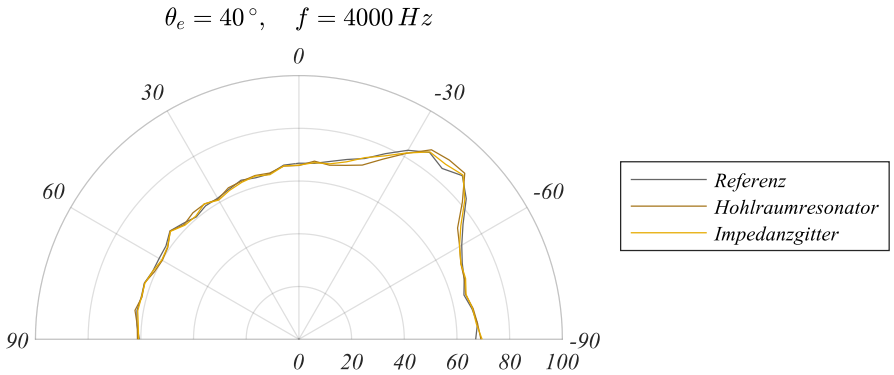

Abbildung 5.14 Polarplot der Messergebnisse des reflektierten Anteils im Terzband 4000 Hz

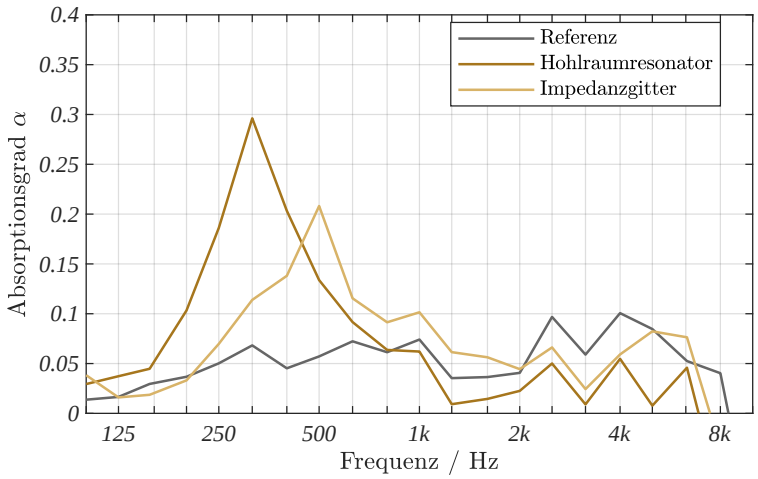

Abbildung 5.15 Messergebnisse des Schallabsorptionsgrades α_s in Terzbändern

von 250 Hz $< f <$ 5 kHz von einer hohen Zuverlässigkeit der relativen Absorptionsgrade der Testobjekte ausgegangen. Durch die innere Unterteilung des Testobjekts in Impedanzgitteranordnung verschiebt sich offensichtlich die Resonanzfrequenz von $f_{Hohlraumresonator} \approx 315$ Hz zu $f_{Impedanzgitter} \approx 500$ Hz, zudem nimmt der Maximalwert des Absorptionsgrades ab. Es kann für die Testobjekte Hohlraumresonator und Impedanzgitter für hohe Frequenzen ab $f \approx 1 \ldots 2$ kHz ein niedrigerer Absorptionsgrad im Vergleich zur schallharten Referenzanordnung beobachtet werden.

Zur Bewertung der erweiterten Näherungslösung mit effektiven Anpassungsparametern nach Abschnitt 3.3 zeigt Abbildung 5.16 als Vergleich die so berechneten Schallabsorptionsgrade. Grundlage der Berechnung sind die, schon in Abschnitt 3.4 vorgeschlagenen Startparameter für die erweiterte Näherungslösung anhand der Abmessungen. Als Berechnungsgrundlage ist hier, aufgrund des schallharten Abschlusses zur Nachbildung des Messaufbaus im Hallraum, die Luftschicht im Hohlraum als poröser Absorber formuliert, um überhaupt eine Absorption aus dem Verlustgrad berechnen zu können. Hierzu wurde

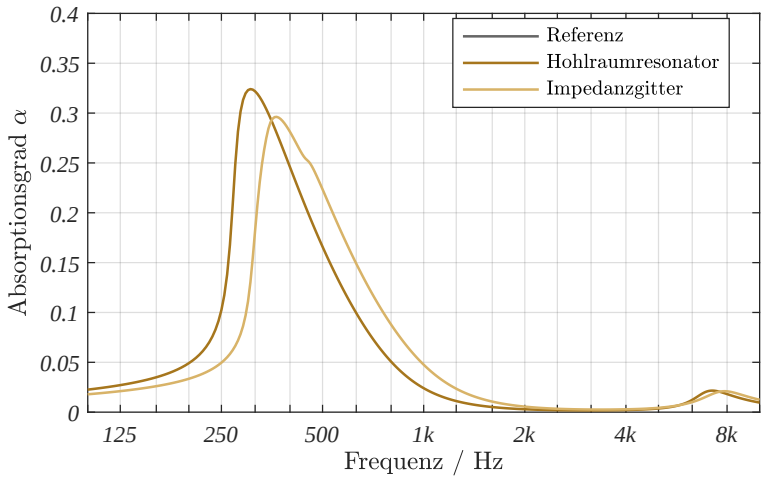

Abbildung 5.16 Berechnung des Schallabsorptionsgrades α_s nach der erweiterten Näherungslösung aus Kapitel 3

ein niedriger längenbezogener Strömungswiderstand von $\Xi = 200\,\frac{\mathrm{Pa\,s}}{\mathrm{m}^2}$ als Parameter der, die Luftschicht ersetzenden, porösen Absorberschicht gewählt.

Zwischen den Messwerten und den Berechnungen der erweiterten Näherungslösung zeigt sich eine qualitative Übereinstimmung der Veränderung des Absorptionsgrades hinsichtlich der Magnitude und der Verschiebung der Resonanzfrequenz, die absoluten Werte werden nur begrenzt wiedergegeben.

Kapitel 6

Diskussion und Zusammenfassung

Als Grundlage der Berechnung des Reflexionsverhaltens eines doppelwandigen Resonators in Impedanzgitteranordnung wird ein Ansatz über Trennimpedanzen und die Zweitordarstellung als elektro-akustische Analogie gewählt. Ein weitere Möglichkeit zur vollständigen Berechnung der beteiligten Schallfelder wird kurz vorgestellt, aufgrund einer fehlenden Beschreibung des Verhaltens einer allseitig begrenzten Anordnung aber nicht weiter verfolgt. Auch eine Simulation mit einem gekoppelten BEM-/FEM-Ansatz wird nicht durchgeführt, um Erkenntnisgewinne durch die analytische Beschreibung zu erhalten und im Anwendungsfall schnelle Berechnungsergebnisse bei Änderung von einzelnen Parametern erhalten zu können. Die Berechnung der Abstrahlung wird anhand einer periodisch fortgesetzten Anordnung mit einer örtlichen Wellenzahl-Zerlegung in der Methode der Fourier-Akustik durchgeführt. Als Ergebnis können die Reflexionsfaktoren der Teilstrahler verglichen werden und so auch, durch unterschiedliche Resonanzbereiche der Teilresonatoren und daher abweichende Gesamtimpedanzen, Reflexionen außerhalb des Reflexionsgesetzes bei einer glatten Oberfläche berechnet werden. Anhand der Messungen des Abstrahlverhaltens im reflexionsarmen Raum und der Schallabsorptionsgrade im Hallraum, kann eine Bewertung der Qualität der einzelnen Teilkomponenten, sowie der Gesamtlösung vorgenommen werden.

Die Näherungslösung für seitlich begrenzte Platten in einem Schallschirm nach Mechel (1995) ermöglicht die Berücksichtigung der endlichen Abmessungen durch die Anpassung der Schnelleverteilung in den Randbereichen, unter Vernachlässigung des entstehenden Nahfeldes, mittels der Strahlungsimpedanzen von Feld-erregten Rechteckstrahlern. Somit erfolgt eine Berücksichtigung der Abmessungen durch die verringerte Abstrahlung von Biegewellenanteilen großer Wellenlänge im Vergleich zu den Strahlerabmessungen, das Verhalten lässt sich daher auch als Hochpass beschreiben. Diese Näherungslösung unterdrückt jedoch, durch die vereinfachte Annahme hinsichtlich der Schnelleverteilung, den gestreuten Anteil, welcher durch die Anpassung der freien Biegewellen in den Randbereichen abgestrahlt wird. Vergleichbar ist dies mit dem unendlich ausgedehnten Fall, dort ist, aufgrund der fehlenden Notwendigkeit einer Anpassung an Randbereiche, kein gestreuter Anteil zu berücksichtigen.

Diese Vernachlässigung des gestreuten Anteils stellt eine mögliche Fehlerquelle bei den späteren Berechnungen dar.

Da die beschriebene Näherungslösung anhand der Feld-erregten Strahlungsimpedanzen nicht zu einer Änderung der Resonanzfrequenz der Gesamtanordnung führt, und auch nur geringfügig die Magnituden der Gesamtimpedanzen verändert, ist dieser Ansatz alleine nicht zielführend. Aus diesem Grund wird eine Erweiterung der Näherungslösung mit effektiven Parametern vorgeschlagen, durch eine qualitative Argumentation werden, basierend auf den Abmessungen, sowie den Bedingungen der Auflagerung und Begrenzung, Startparameter für eine Anpassung in Form von effektiven Parameter für Poissonzahl, Plattendicke, Luftschichtdicke und Luftschicht als effektive Absorberschicht abgeleitet. Dieser Vorschlag bietet die Möglichkeit, das Berechnungsmodell über eine empirische Kennwertrelation an durchgeführte Messungen anzupassen. Die Veränderungen des Resonanzverhaltens eines doppelwandigen Resonators, welche sich durch die Variation der effektiven Parameter ergeben, werden ausführlich in Kapitel 3 dargestellt. Zur Bestimmung von Berechnungsgrundlagen oder -vorschriften für die effektiven Parameter wären umfangreiche empirische Untersuchungen an unterschiedlichen Anordnungen erforderlich.

Eine Berechnung der resultierenden Gesamtimpedanzen erfolgt mithilfe einer elektroakustischen Analogie anhand von Ersatzschaltungen in Zweitordarstellung, bei der Formulierung des Übertragungsverhalten kann eine mehrlagige Struktur durch das Produkt der einzelnen Kettenmatrizen berechnet werden. Durch einen geeigneten Abschluss mit der angepassten Strahlungsimpedanz kann hierbei auch die Näherungslösung für endliche Abmessungen berücksichtigt werden. Zur Beschreibung des Reflexionsverhaltens in Kapitel 4 wird schließlich ein Verfahren vorgestellt, welches, ähnlich zur Berechnung der Schallabstrahlung bei Ebenen durch Teilstrahler, mit einer örtlichen Wellenlängen-Zerlegung als Methode der Fourier-Akustik, die Berechnung von Reflexionsfaktoren in Abhängigkeit einer periodischen Struktur unterschiedlicher Abmessungen und Impedanzen erlaubt. Die Grundlage für die Anwendung dieser Methode ist die Voraussetzung von Periodizität, diese Forderung ist in einer realen Anwendung selbstverständlich nicht zu erfüllen. Allerdings führt die Methode nach Fernández (2013) schon zu aussagekräftigen Ergebnissen, wenn die Gesamtabmessung der periodischen Anordnung größer als die vierfache Wellenlänge der einfallenden Luftschallwelle ist. Für den Fall der realisierten Anordnung im Messaufbau, folgt nach dieser Relation eine untere Grenzfrequenz von 800 Hz, diese liegt somit über dem Frequenzbereich mit einer berechneten Abweichung im Reflexionsverhalten von 630 bis 750 Hz. Es ist hierdurch bereits fraglich, ob das berechnete Verhalten durch Messung beobachtet werden kann. Eine Vergrößerung der Testobjekte hätte allerdings zu einer weiteren Absenkung der oberen Grenzfrequenz der Gültigkeit der Fernfeldnäherung geführt, die Abmessungen und Abstände sind daher durch einen Kompromiss bestimmt.

Es werden drei Testobjekte zur Bewertung der durchgeführten Berechnungen und der Vorschläge hinsichtlich der Erweiterung der Näherungslösung beschrieben. Das Referenzobjekt ist eine, als schallhart angenommene, Platte, diese dient zur Bewertung des Reflexions-

verhaltens einer Anordnung endlicher Abmessungen. Zur Bewertung der Näherungslösung nach Mechel (1995) wird ein Hohlraumresonator ohne innere Aufteilung verwendet. Das dritte Testobjekt ist, zur messtechnischen Überprüfung des berechneten Reflexionsverhaltens nach Kapitel 4 und der erweiterten Näherungslösung nach Kapitel 3, der doppelwandige Plattenresonator in Impedanzgitteranordnung. Bei der Messung der Abstrahlcharakteristik wurde der maximal mögliche Mittelpunktabstand gewählt, um eine ausreichende Erfüllung der Fernfeldbedingungen zu erreichen. Allerdings ist, aufgrund des begrenzten Raumes und der Größe der Anordnung, auch bedingt durch die notwendige periodische Fortsetzung, die Fernfeldnäherung nur in einem Bereich von $200\,\mathrm{Hz} < f < 600\,\mathrm{Hz}$ und bei Akzeptanz eines Phasenfehlers von $\pi/4$ sicher gültig. Die Zuverlässigkeit des Vergleichs der berechneten Reflexionsfaktoren mit der gemessenen Abstrahlcharakteristik ist daher schwach, da diese nun direkt zwischen dem Bereich der oberen Grenzfrequenz der Fernfeldnäherung und der unteren Grenzfrequenz der Voraussetzung von Periodizität liegen. Die Anregung erfolgte, zur näherungsweisen Voraussetzung einer einfallenden ebenen Welle, mit einem fest stehenden, als Punktschallquelle angenommenen, Lautsprecher. In der digitalen Signalverarbeitung kann eine Trennung des Direktschalls und der reflektierten Anteile durch Fensterung vorgenommen werden, nur für einige Positionen ab $\theta_r = 75°$ mit ähnlichen Ausbreitungswegen und daher zu eng liegenden Anteilen, kann nicht der gesamte Direktschall aus dem Signal entfernt werden, diese Positionen sind für die Überprüfung des berechneten Reflexionsverhaltens ohnehin irrelevant. Die allgemeine Zuverlässigkeit der durchgeführten Messungen der Impulsantworten ist sehr hoch, Abweichungen zu den durchgeführten Kontrollmessungen können nicht festgestellt werden.

In den Messungen der Abstrahlcharakteristik findet sich nur wenige, deutlich feststellbare, Abweichungen bei Vergleich des Testobjekts Impedanzgitter mit der Referenzanordnung im, anhand der berechneten Reflexionsfaktoren bestimmten, Frequenzbereich von $500\,\mathrm{Hz} < f < 800\,\mathrm{Hz}$. Der größte festgestellte Unterschied zeigt sich am Messpunkt $\theta_r = 90°$ mit einer Vergrößerung der Magnitude der Reflexion von 3 dB. Allerdings ist diese Reflexion mit $-25\,\mathrm{dB}$ deutlich schwächer als die Hauptreflexion bei $\theta_r = -40°$. Es kann keine Reflexion in der, nach Kapitel 4 berechneten, deutlichen Ausprägung festgestellt werden.

Die Übereinstimmung der Messergebnisse der drei Testobjekte ist im, für den Vergleich mit der Berechnung relevanten, Frequenzbereich bis 800 Hz mit $\pm 0.5\,\mathrm{dB}$ meist sehr gut, es treten keine starken Reflexionen, abgesehen von der in Hauptreflexionsrichtung, auf. Begründungen für die abweichenden Ergebnisse von Berechnung und Messung sind, wie bereits erwähnt, die nicht ausreichende periodische Fortsetzung in Relation zur Wellenlänge in Luft im betrachteten Frequenzbereich und die Fernfeldnäherung. Zudem sind die Reflexionsspitzen möglicherweise relativ schmal und die Messauflösung von 5° zu gering.

Eine Auffälligkeit zeigt sich bei der Betrachtung der Hauptreflexion der Testobjekte für Frequenzen ab 1.6 kHz. Hier kann, vor allem für den Hohlraumresonator, aber auch für die Impedanzgitteranordnung, eine Einschnürung der Abstrahlbreite bei gleichzeitigen Anstieg der Magnitude beobachtet werden. Eine mögliche Erklärung dieses Verhaltens ist

das Auftreten von Plattenresonanzen, welche durch die unterschiedlichen Materialstärken verschieden ausgeprägt sind.

Die Messungen des Schallabsorptionsgrads weisen eine gute Übereinstimmung mit der Berechnungen anhand der Näherungslösung für das Testobjekt Hohlraumresonator auf. Bei einem Vergleich mit der Impedanzgitteranordnung wird auch das Ergebnis der vorgeschlagene erweiterten Näherungslösung mit effektiven Parametern qualitativ abgebildet, durch die Verkleinerung der einzelnen Teilresonatoren ist ein Anstieg der Resonanzfrequenz begründet. Die Absorptionsgrade ab 2 kHz liegen für beide Resonatoren unterhalb der schallharten Referenz, eine Ursache ist die höhere Koinzidenzgrenzfrequenz der doppelwandigen Resonatoren mit geringerer Plattendicke, verglichen mit der Referenzanordnung, und die damit verbundene Reduktion der inneren Verlustfaktoren der Platten. Eine weitergehende, systematische Untersuchung zur Anpassung der effektiven Parameter an die Abmessungen einer Anordnung könnte, im Bezug auf das Absorptionsverhalten, zusätzliche Erkenntnisse bringen.

Wie stark das Verhalten der Anordnungen durch Eigenfrequenzen, auch durch die exakten Auflagerbedingungen, bestimmt ist und welchen Einfluss die Ableitung von Biegewellen über die Verbindung zu anderen Teilresonatoren hat, kann mit den gewählten Methoden nicht bestimmt werden. Auch das transiente Verhalten ist bei Resonanzsystemen prinzipiell von Interesse, allerdings zeigen sich hier keine relevanten Unterschiede zwischen den drei Testobjekten bei Auswertung der Energy Decay Curves, daher erfolgt diesbezüglich keine weitergehende Beschreibung.

Literaturverzeichnis

Berzborn, Marco; Ramona Bomhardt; Johannes Klein; Jan-Gerrit Richter und Michael Vorländer (2017): „The ITA-Toolbox: An Open Source MATLAB Toolbox for Acoustic Measurements and Signal Processing." In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2017*. Kiel, S. blank. URL `http://publications.rwth-aachen.de/record/687308`.

Bies, David A. und Colin H. Hansen (2003): *Engineering Noise Control: Theory and Practice*. London: Spon Press.

Blevins, Robert D. (1995): *Formulas for natural frequency and mode shape*. Malabar (Florida): Krieger.

Brinkmann, Fabian und Stefan Weinzierl (2017): „AKtools—An Open Software Toolbox for Signal Acquisition, Processing, and Inspection in Acoustics." In: *Convention eBrief*. Audio Engineering Society, S. blank. URL `http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=18685`.

COMSOL (2017): „Introduction to COMSOL Multiphysics." URL `https://cdn.comsol.com/documentation/5.3.1.275/IntroductionToCOMSOLMultiphysics.de_DE.pdf`.

Cremer, Lothar (1942): „Theorie der Schalldämmung dünner Wände bei schrägem Schalleinfall." In: *Akustische Zeitschrift*, H(7) S. 81–104.

Cremer, Lothar (1976): *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Band 2*. Stuttgart: Hirzel.

Cremer, Lothar; Michael Möser; Wolfgang Kropp und Manfred Heckl (2009): *Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

DIN EN (2014): „Elektroakustik - Schallpegelmesser - Teil 1: Anforderungen (IEC 61672-1:2013); Deutsche Fassung EN 61672-1:2013."

DIN EN ISO (2003): „Akustik - Messung der Schallabsorption in Hallräumen (ISO 354:2003); Deutsche Fassung EN ISO 354:2003."

DIN EN ISO (2016): „Akustik - Messung der Schalldämmung von Bauteilen im Prüfstand - Teil 2: Messung der Luftschalldämmung (ISO 10140-2:2010); Deutsche Fassung EN ISO 10140-2:2010."

Fasold, Wolfgang; Ernst Sonntag und Helgo Winkler (1987): *Bauakustik und Raumakustik.* Berlin: VEB Verlag für Bauwesen.

Fasold, Wolfgang und Eva Veres (2003): *Schallschutz und Raumakustik in der Praxis: Planungsbeispiele und konstruktive Lösungen.* Berlin: Huss-Medien.

Fernández, Alfio Yori (2013): *Sound Absorption of Periodical Surfaces.* PhD Thesis, Technische Universität Berlin, Berlin.

Ford, R. D. und M. A. McCormick (1969): „Panel sound absorbers." In: *Journal of Sound and Vibration*, 10(3) S. 411–423. doi:10.1016/0022-460X(69)90219-3.

Fuchs, H. V. und X. Zha (1996): „Wirkungsweise und Auslegungshinweise für Verbund-Platten-Resonatoren." In: *Zeitschrift fur Larmbekampfung*, 43(1) S. 1–8.

Fuchs, Helmut V. (2017): „Schallabsorber." In: Gerhard Müller und Michael Möser (Hrgs.) *Fachwissen Technische Akustik.* Springer Vieweg, S. 328–396.

Gilford, C. L. S. (1952): „Membrane sound absorbers and their application to broadcasting studios." In: *BBC Quarterly*, 53(7) S. 246 ff.

Hake, Erwin und Konstantin Meskouris (2007): *Statik der Flächentragwerke: Einführung mit vielen durchgerechneten Beispielen.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Heckl, M. (1977): „Radiation from Plane Sound Sources." In: *Acta Acustica united with Acustica*, 37(3) S. 155–166.

Hurlebaus, S.; L. Gaul und J. T. S. Wang (2001): „An exact series solution for calculating the eigenfrequencies of orthotropic plates with completely free boundary." In: *Journal of Sound and Vibration*, 244(5) S. 747–759. doi:10.1006/jsvi.2000.3541.

Ingard, Karl Uno (1994): *Notes on Sound Absorption Technology.* Noise Control Foundation.

ISO (2004): „Acoustics - Sound-scattering properties of surfaces - Part 1: Measurement of the random-incidence scattering coefficient in a reverberation room."

ISO (2012): „Acoustics - Sound-scattering properties of surfaces - Part 2: Measurement of the directional diffusion coefficient in a free field."

Kollmann, Franz G. (2006): *Praktische Maschinenakustik.* VDI-Buch. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Leissa, Arthur W. (1969): *Vibration of plates.* Washington D.C.: U.S. Government Printing Office.

Lerch, Reinhard (2009): *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Liu, Zhaowei; Musabbir Majeed; Fehmi Cirak und Robert N. Simpson (2018): „Isogeometric FEM-BEM coupled structural-acoustic analysis of shells using subdivision surfaces." In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113(9) S. 1507–1530. doi: 10.1002/nme.5708.

Lotze, Eberhard (1980): *Gerichtete Schallabstrahlung von Außenwänden des Industriebaus bei und oberhalb der Grenzfrequenz.* PhD Thesis, Technische Universität Dresden, Dresden.

Lu, Tian Jian und Fengxian Xin (2014): *Vibro-acoustics of lightweight sandwich structures.* Springer Tracts in Mechanical Engineering. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Mechel, Fridolin P. (1989): *Schallabsorber Band I: Äußere Schallfelder, Wechselwirkungen.* Stuttgart: Hirzel.

Mechel, Fridolin P. (1995): *Schallabsorber Band II: Innere Schallfelder, Strukturen.* Stuttgart: Hirzel.

Mechel, Fridolin P. (1998): *Schallabsorber Band III: Anwendungen.* Stuttgart: Hirzel.

Mechel, Fridolin P. (2001): „Panel Absorber." In: *Journal of Sound and Vibration*, 248(1) S. 43–70. doi:10.1006/jsvi.2001.3696.

Mechel, Fridolin P. (2008): *Formulas of acoustics.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Mechel, Fridolin P. (2013): *Room Acoustical Fields.* Berlin Heidelberg: Springer Verlag.

Microtech Gefell (2003): „Kondensator-Messmikrofonkapsel MK 250 mit Dauerpolarisation." URL `http://www.microtechgefell.de/dmdocuments/MK250_S1+2.pdf`.

Möser, Michael (2015): *Technische Akustik.* Springer Vieweg.

Niemz, Peter und Walter Sonderegger (2017): *Holzphysik: Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe.* München: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag.

Schirmer, Werner (2006): *Technischer Lärmschutz: Grundlagen und praktische Massnahmen zum Schutz vor Lärm und Schwingungen von Maschinen.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Schroeder, M. R. (1975): „Diffuse sound reflection by maximum-length sequences." In: *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(1) S. 149–150. doi:10.1121/1.380425.

Schultz, T. J. (1962): „Design procedure for the sound absorption of resonant plywood panels." In: *BBN Technical Report 925*. Bolt Beranek and Newman Cambridge, Massachusetts, S. blank.

Terhardt (1993): „Zur Anwendung der elekto-mechnischen beziehungsweise - akustischen Analogien auf elektroakustische Wandler." In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 1993*. S. 494–497.

Thomas, Christian (2005): *Beeinflussung des akustischen Verhaltens von Doppelwandsystemen durch den Einsatz mikroperforierter Absorber*. PhD Thesis, Technische Universität Hamburg-Harburg, Norderstedt.

Vigran, Tor Erik (2008): *Building acoustics*. London: CRC Press.

Zhao, Wenchang; Changjun Zheng; Cheng Liu und Haibo Chen (2017): „Minimization of sound radiation in fully coupled structural-acoustic systems using FEM-BEM based topology optimization." In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* S. 1–14. doi: 10.1007/s00158-017-1881-3.

Zhou, Xiarou; Renate Heinz und Helmut V. Fuchs (1998): „Zur Berechnung geschichteter Platten-und Lochplatten-Resonatoren." In: *Bauphysik*, 20(3) S. 87–94.

Śmigaj, Wojciech; Timo Betcke; Simon Arridge; Joel Phillips und Martin Schweiger (2015): „Solving Boundary Integral Problems with BEM++." In: *ACM Trans. Math. Softw.*, 41(2) S. 6:1–6:40. doi:10.1145/2590830.

Anhang A

Elektro-Akustische Zweitordarstellung

Eine Möglichkeit der Berechnung des Verhaltens einer mehrlagigen Anordnung ist das, in Kapitel 3 beschriebene, Verfahren anhand einer elektro-akustischen Ersatzschaltung. Die verwendeten Impedanzen Z, Admittanzen Y und die daraus resultierenden Kettenmatrizen $\mathbf{A}$ sind nachfolgend, mit Verweis auf Terhardt (1993), Ingard (1994), Thomas (2005), Mechel (1995), Bies und Hansen (2003), sowie Mechel (1998), angegeben.

Massenbelag

Ein Massenbelag kann alleine durch seine Trennimpedanz Z_T beschrieben werden.

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} 1 & Z_T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

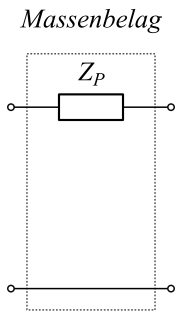

Abbildung A.1 Zweitorersatzdarstellung eines Massenbelags als Längsimpedanz

Luftschicht

Bei schrägem Schalleinfall unter einem Einfallswinkel θ, ergibt sich die Ersatzdarstellung als π-Schaltung einer lateral wirksamen Luftschicht.

$$\begin{aligned} Z_L &= Z_0 \sinh\left(-jk_0 d_L\right) \\ A_L &= \frac{\cosh\left(-jk_0 d_L\right) - 1}{Z_0 \sinh\left(-jk_0 d_L\right)} \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} \cos\left(k_0 d_L \cos\theta\right) & j\frac{Z_0}{\cos\theta} \sin\left(k_0 d_L \cos\theta\right) \\ j\frac{\cos\theta}{Z_0} \sin\left(k_0 d_L \cos\theta\right) & \cos\left(k_0 d_L \cos\theta\right) \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

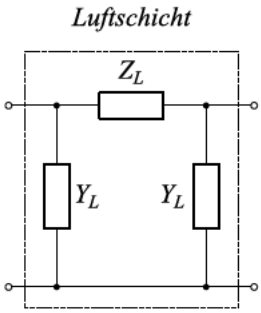

ABBILDUNG A.2 Zweitorersatzdarstellung einer lateral wirksamen Luftschicht als π-Netzwerk

Absorberschicht

Als allgemeiner Fall der Luftschicht kann auch eine Schicht eines porösen Absorbermaterials beschrieben werden. Mit Werten aus einem Modell für poröse Absorber für die Ausbreitungskonstante Γ_a und dem Wellenwiderstand Z_a folgt, wieder bei schrägem Schalleinfall mit einem Einfallswinkel θ, erneut eine Ersatzdarstellung als π-Schaltung einer lateral wirksamen Absorberschicht.

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_a \sinh\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right) \\ A_A &= \frac{\cosh\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right) - 1}{Z_a \sinh\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right)} \\ \cos\theta_a &= \sqrt{1 + \frac{k_0}{\Gamma_a}^2 \left(1 - \cos^2\theta\right)} \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\mathbf{A}_A = \begin{bmatrix} \cosh\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right) & \frac{Z_a}{\cos\theta_a} \sinh\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right) \\ \frac{\cos\theta_a}{Z_a} \sin\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right) & \cosh\left(\Gamma_a d_A \cos\theta_a\right) \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

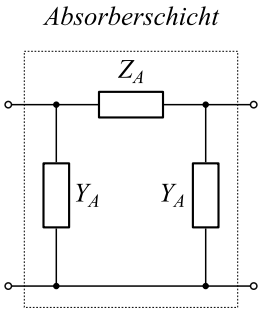

Abbildung A.3 Zweitorersatzdarstellung einer lateral wirksamen Absorberschicht als π-Netzwerk

Strahler

Erfolgt ein nicht-schallharter Abschluss als freies Ende oder eine Anpassung aufgrund von endlichen Abmessungen, ist dies mittels einer Strahlungsadmittanz zu berücksichtigen.

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_S & 1 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

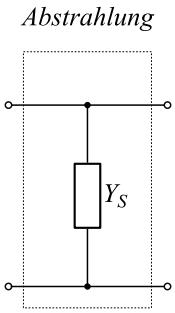

Abbildung A.4 Zweitorersatzdarstellung eines Strahlungsadmittanz

Anhang B

Messergebnisse

B.1 Spektren

B.1.1 $\theta_e = 20\,^\circ$

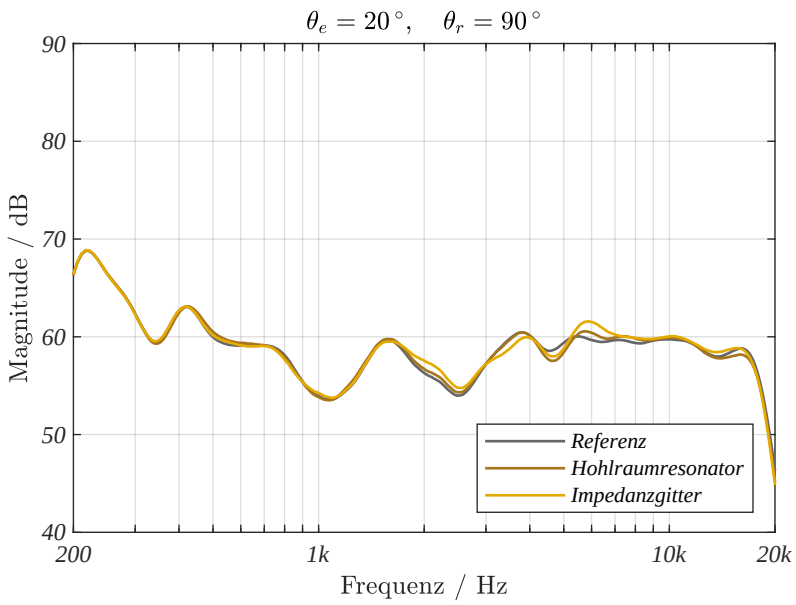

Abbildung B.1 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 90°$

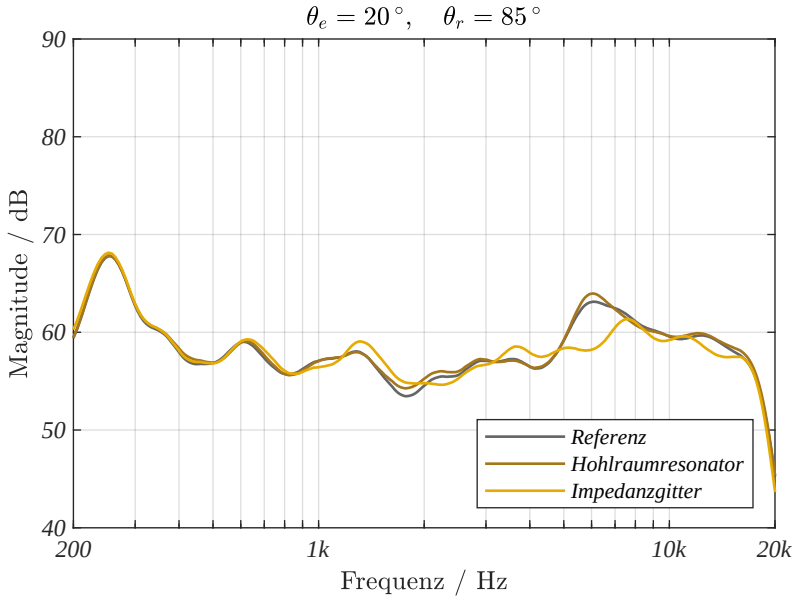

Abbildung B.2 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 85°$

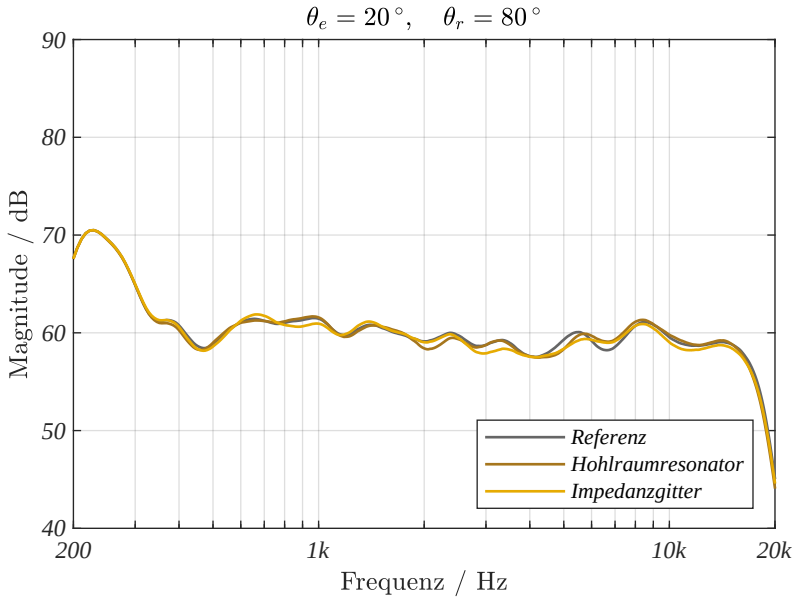

Abbildung B.3 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 80°$

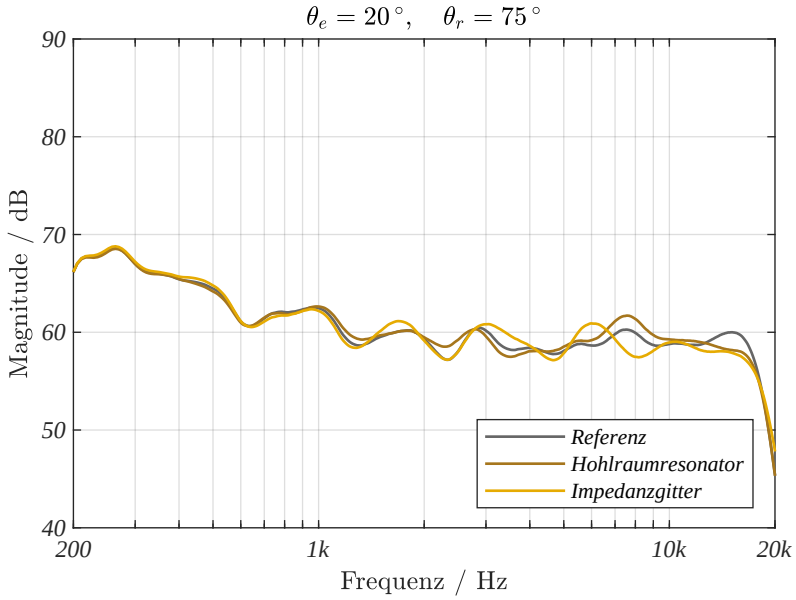

Abbildung B.4 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 75°$

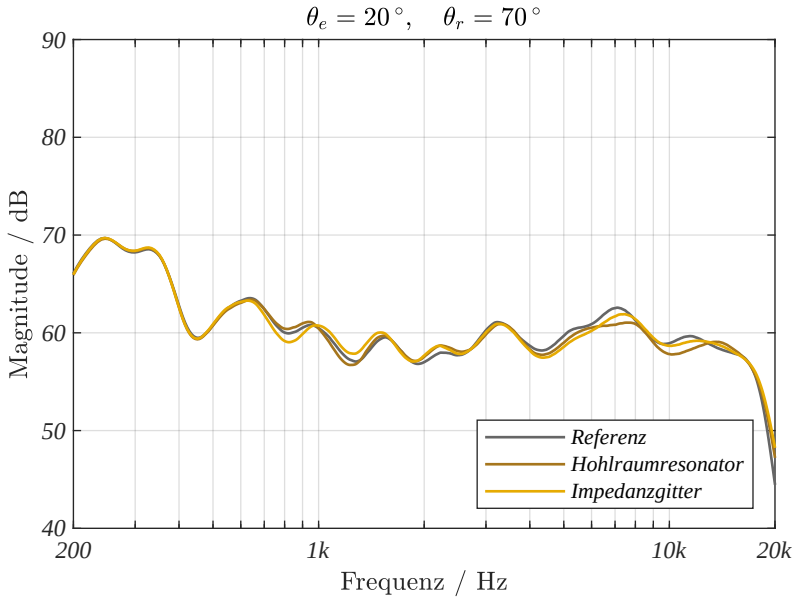

Abbildung B.5 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 70°$

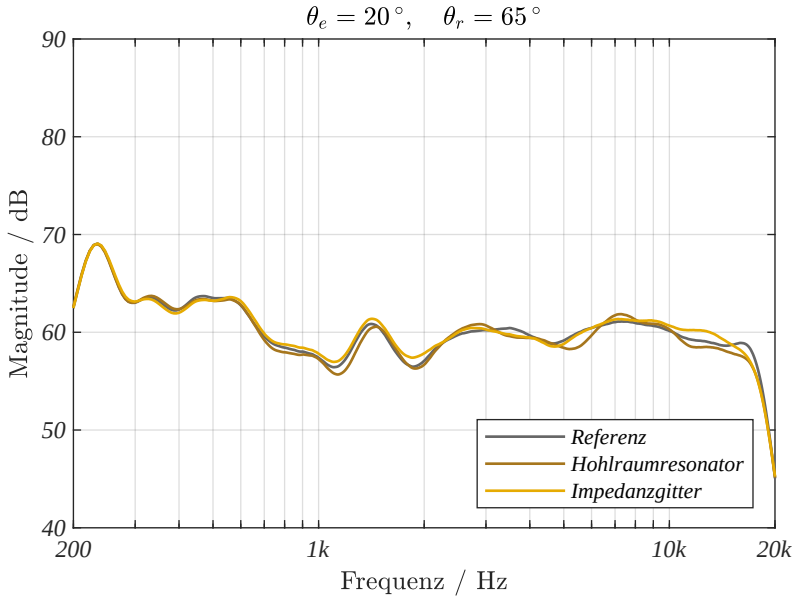

Abbildung B.6 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 65°$

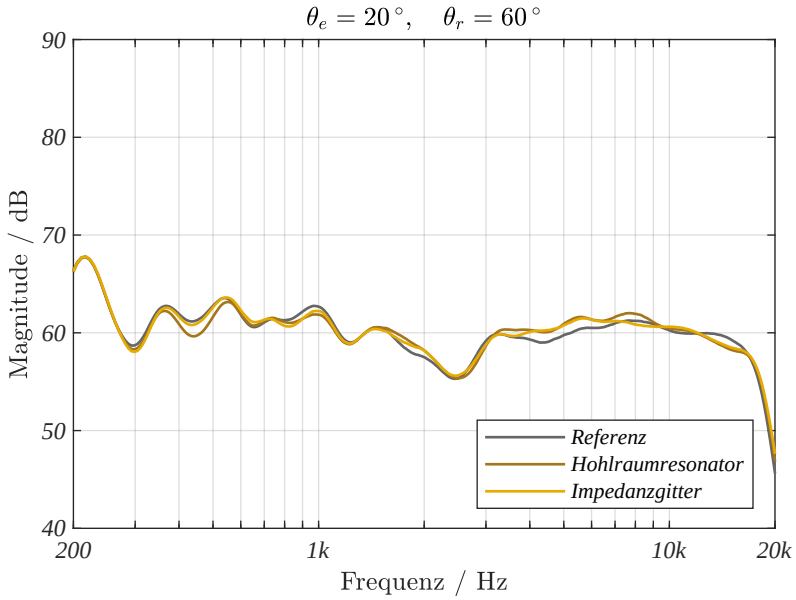

Abbildung B.7 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 60°$

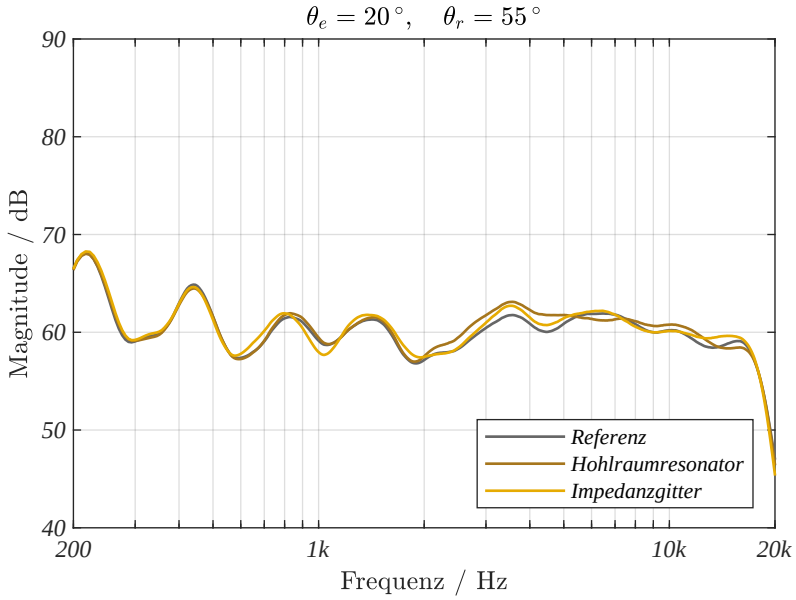

Abbildung B.8 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 55°$

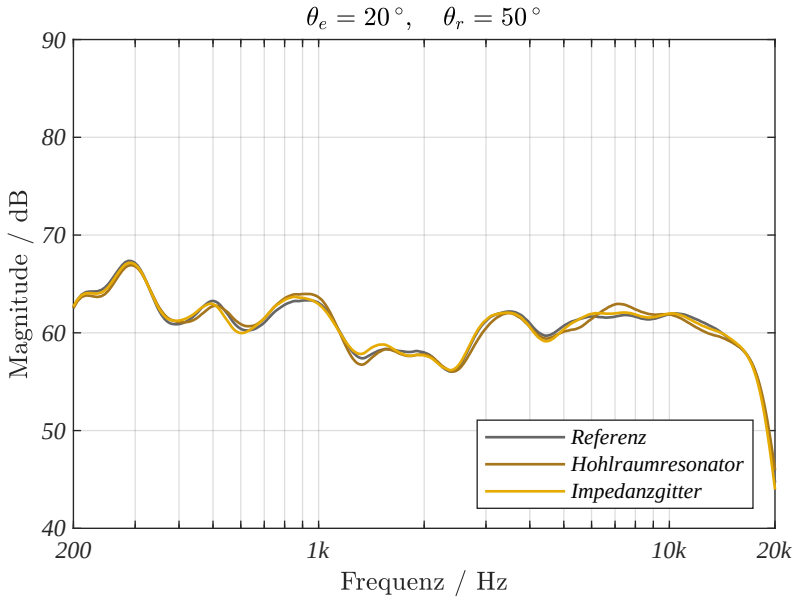

Abbildung B.9 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 50°$

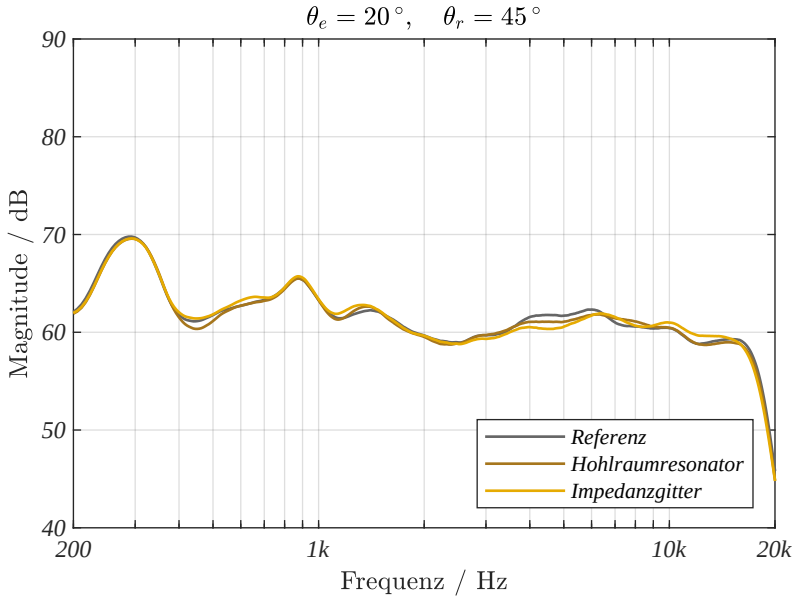

Abbildung B.10 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 45°$

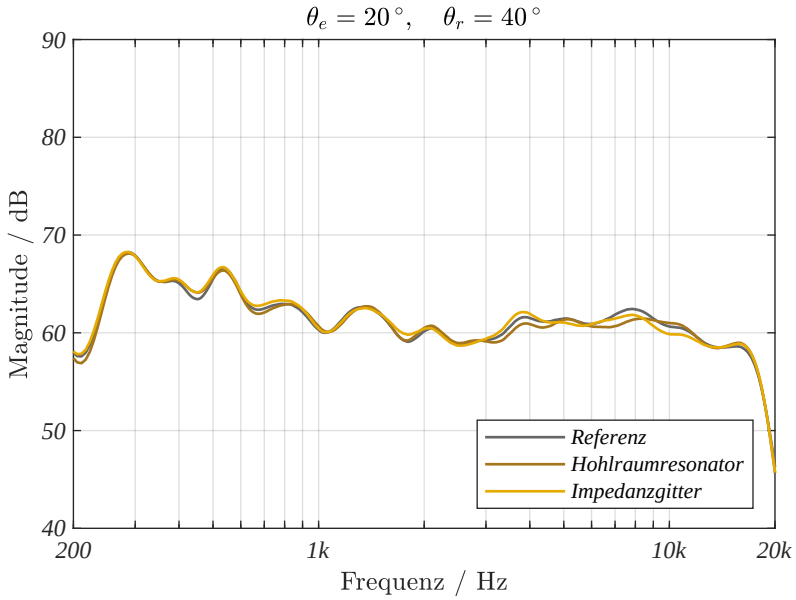

Abbildung B.11 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 40°$

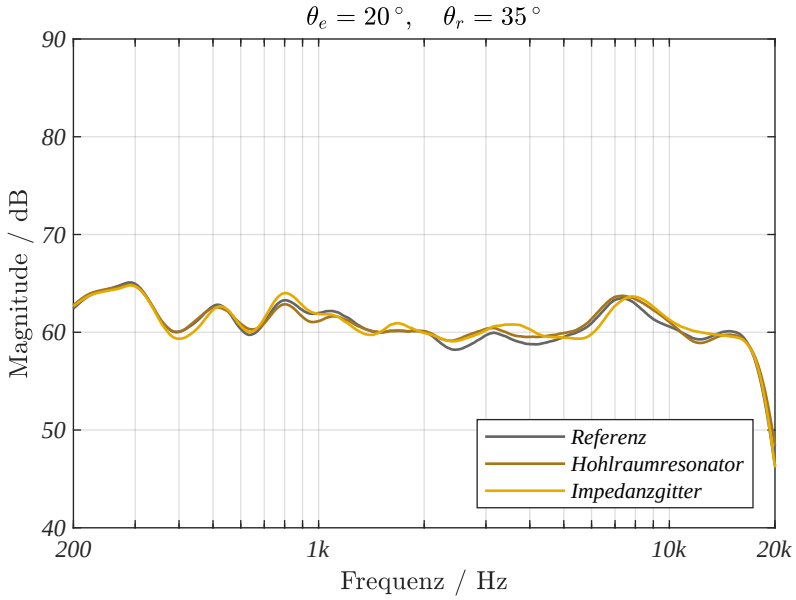

Abbildung B.12 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 35°$

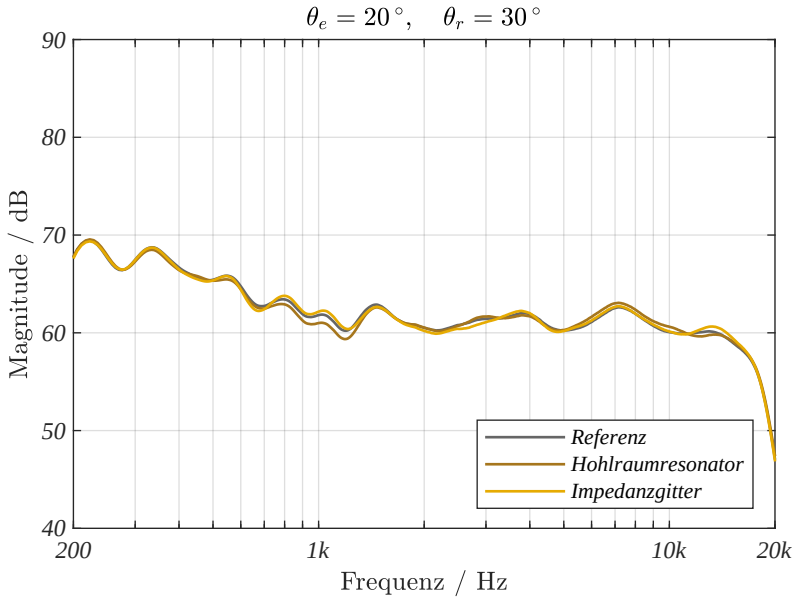

Abbildung B.13 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 30°$

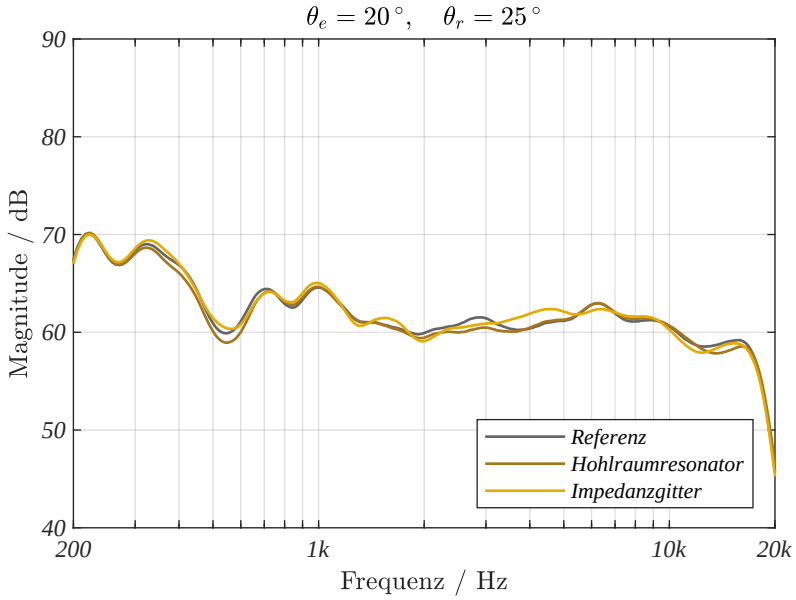

Abbildung B.14 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 25°$

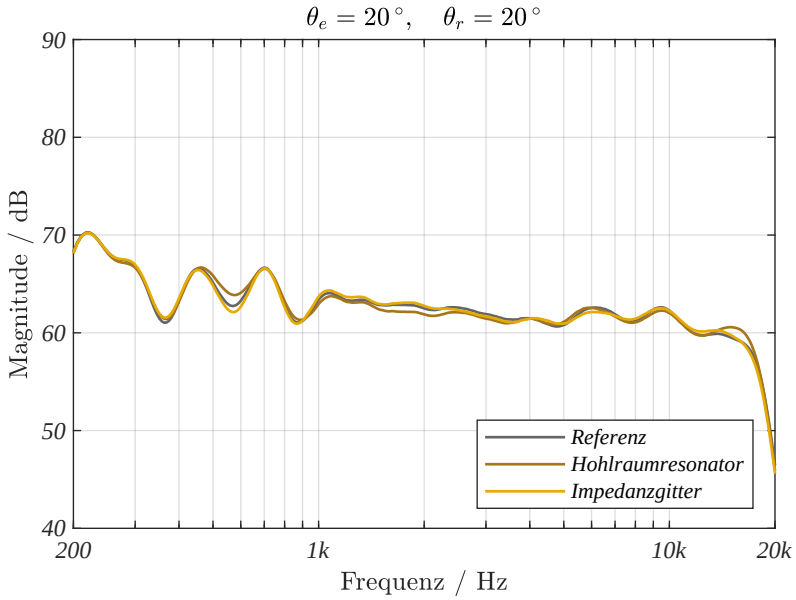

Abbildung B.15 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 20°$

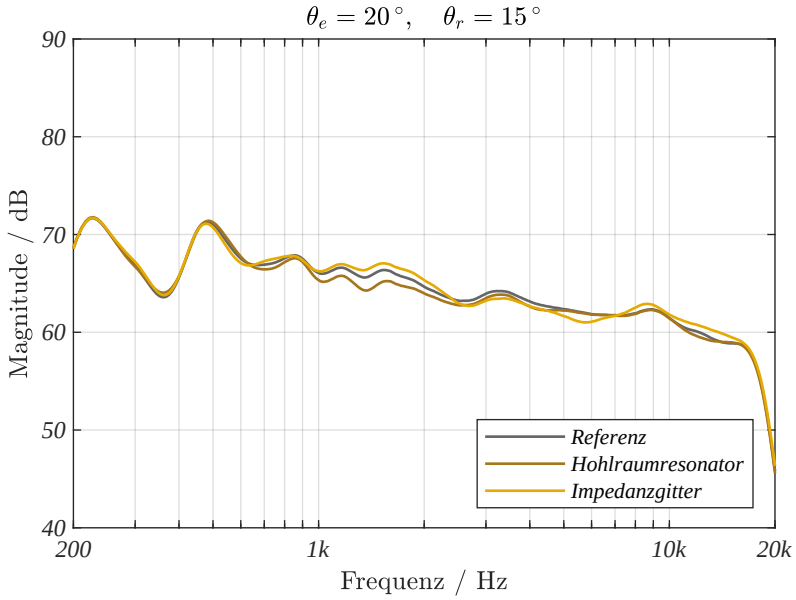

Abbildung B.16 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 15°$

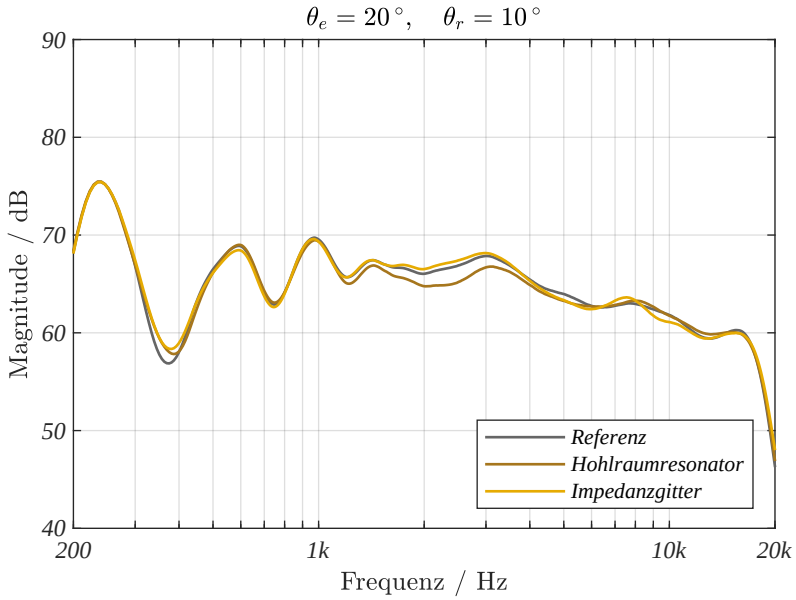

Abbildung B.17 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 10°$

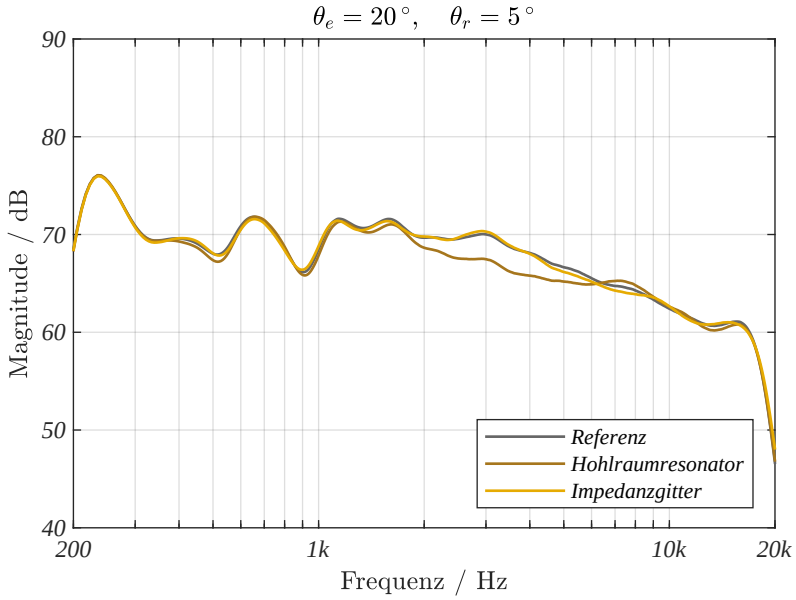

Abbildung B.18 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 5°$

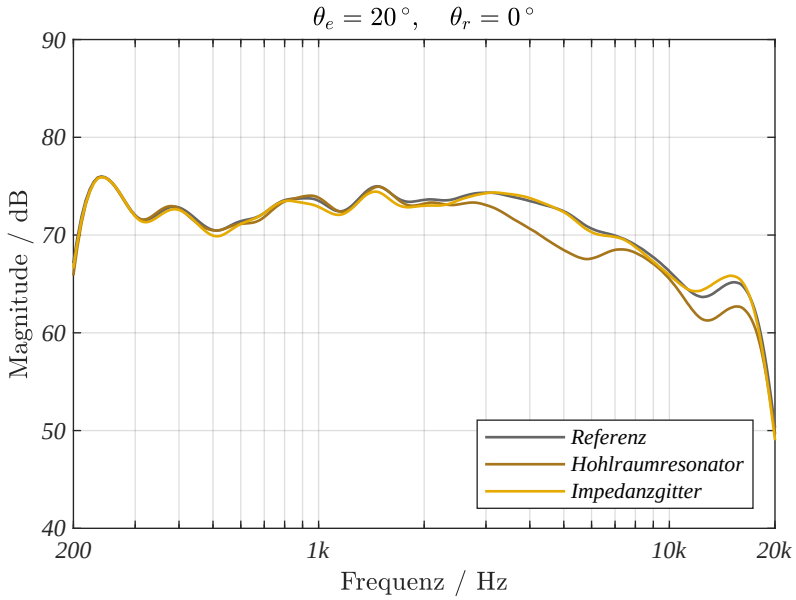

Abbildung B.19 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = 0°$

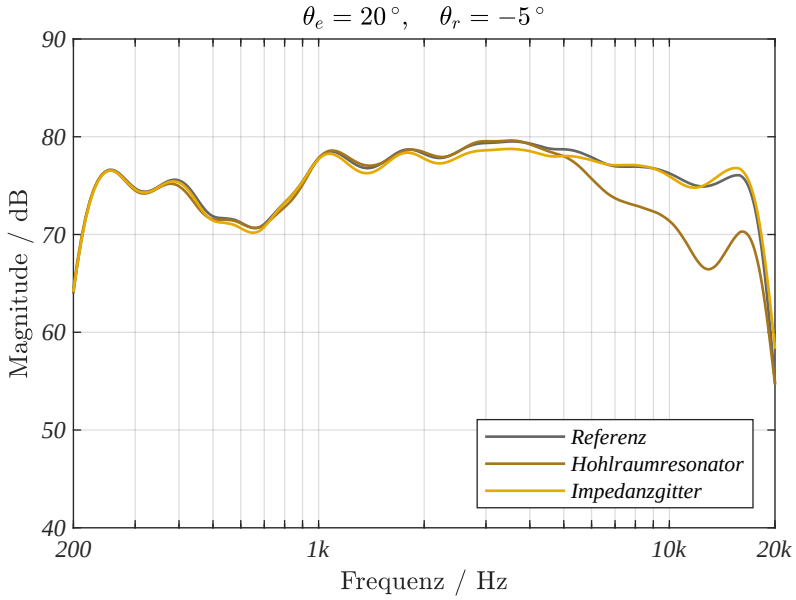

Abbildung B.20 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -5°$

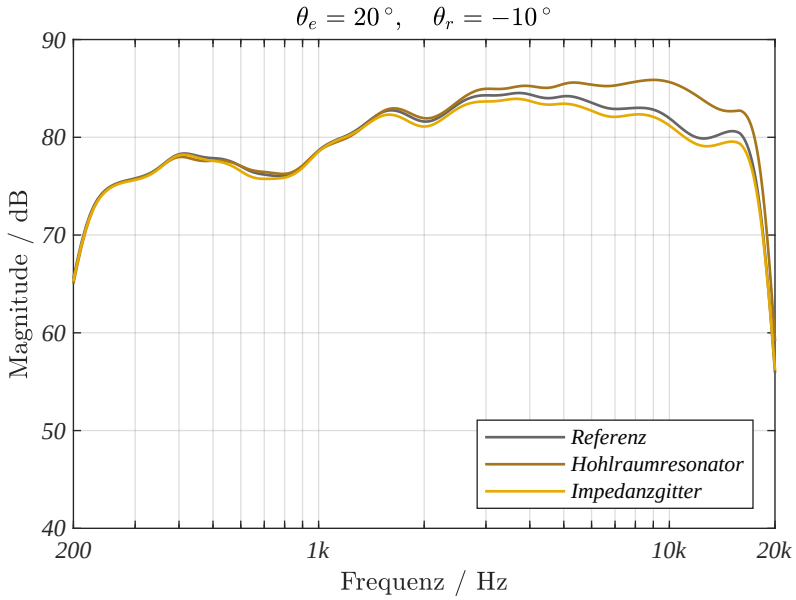

Abbildung B.21 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -10°$

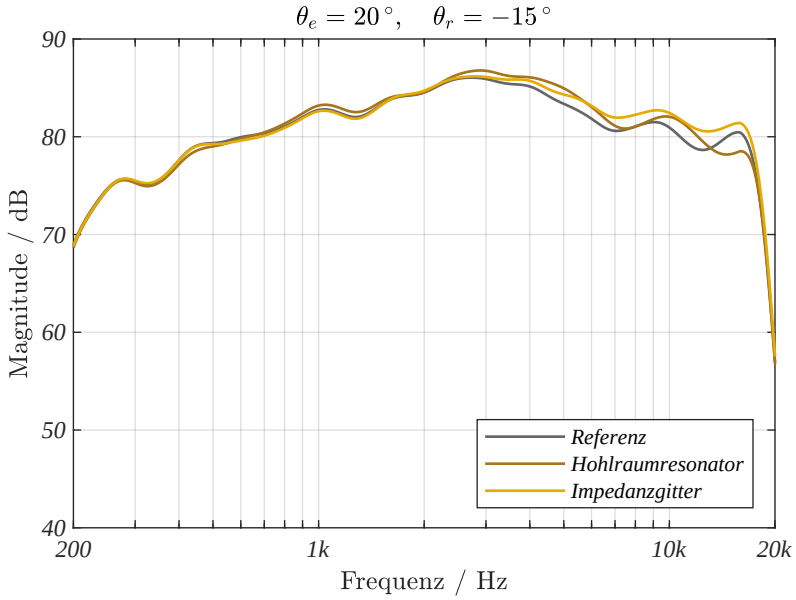

Abbildung B.22 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -15°$

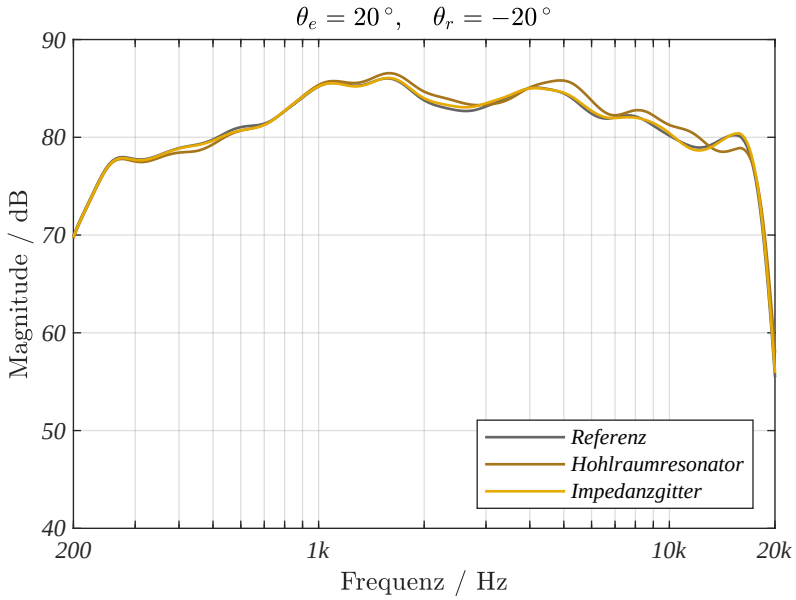

Abbildung B.23 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -20°$

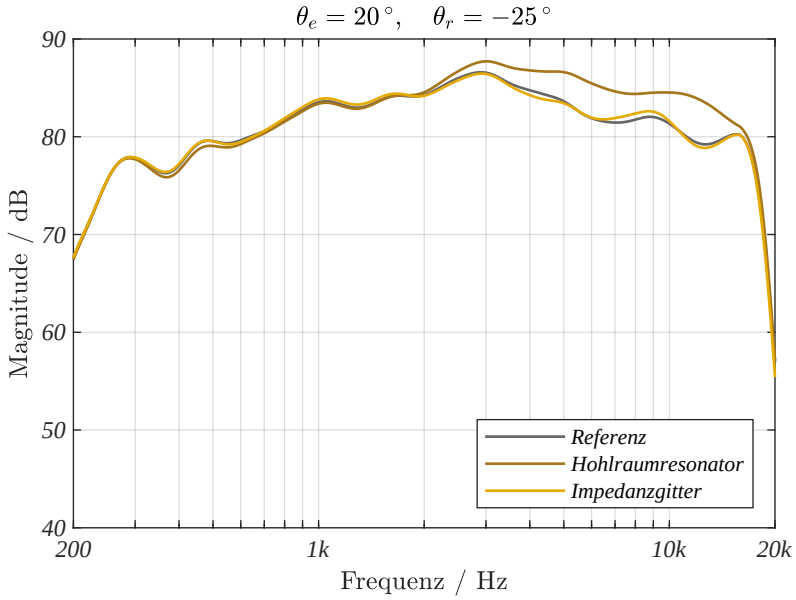

Abbildung B.24 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -25°$

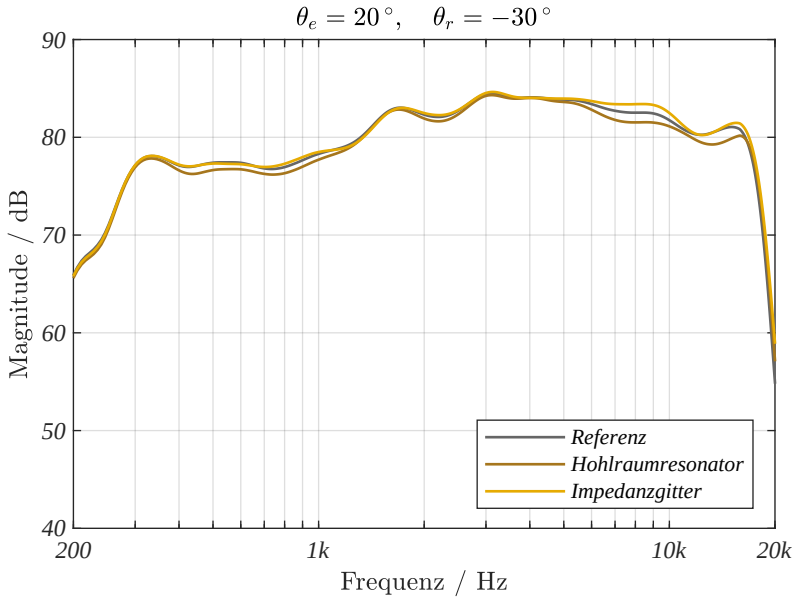

Abbildung B.25 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -30°$

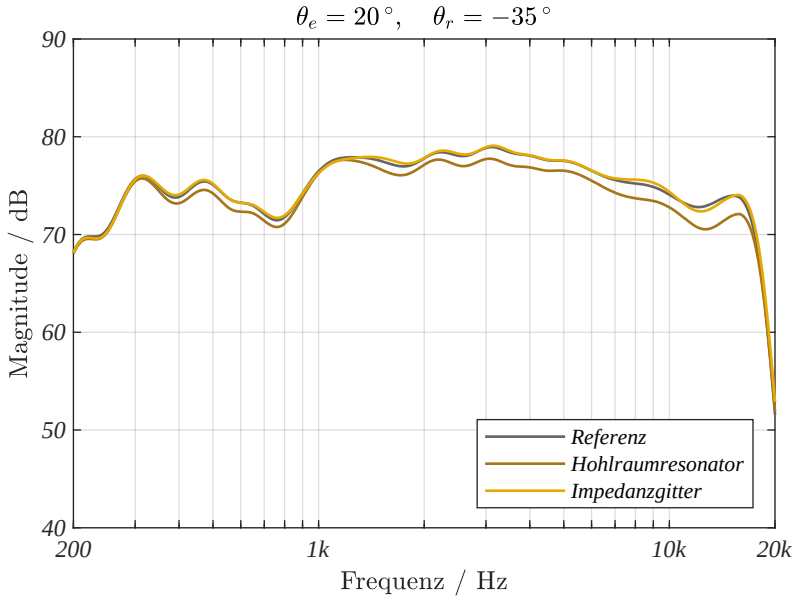

Abbildung B.26 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -35°$

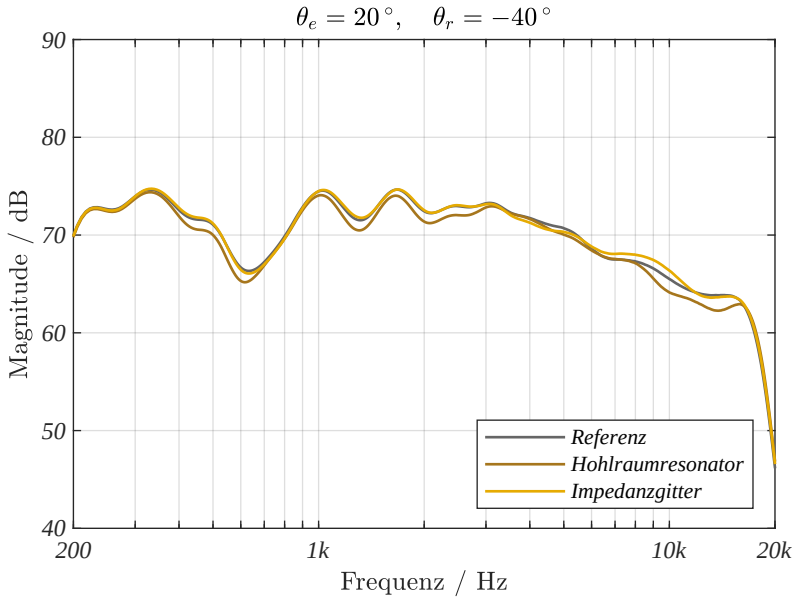

Abbildung B.27 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -40°$

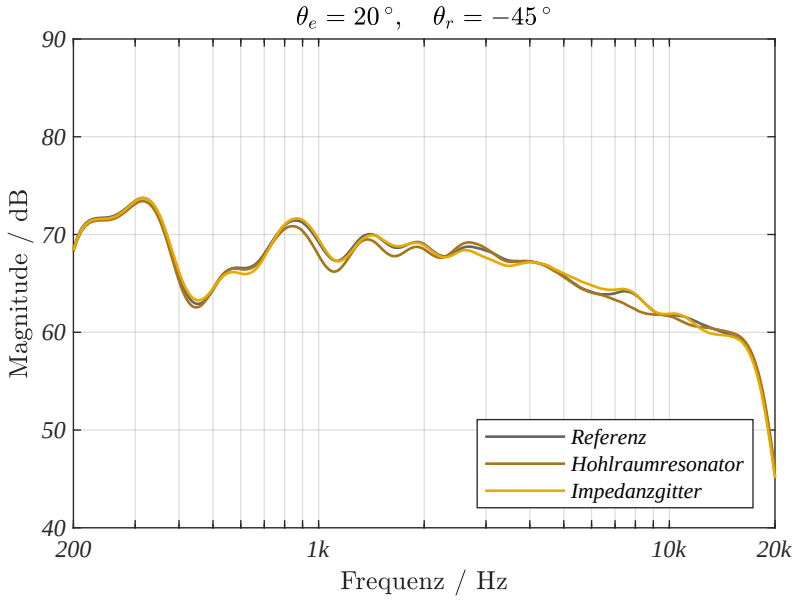

Abbildung B.28 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -45°$

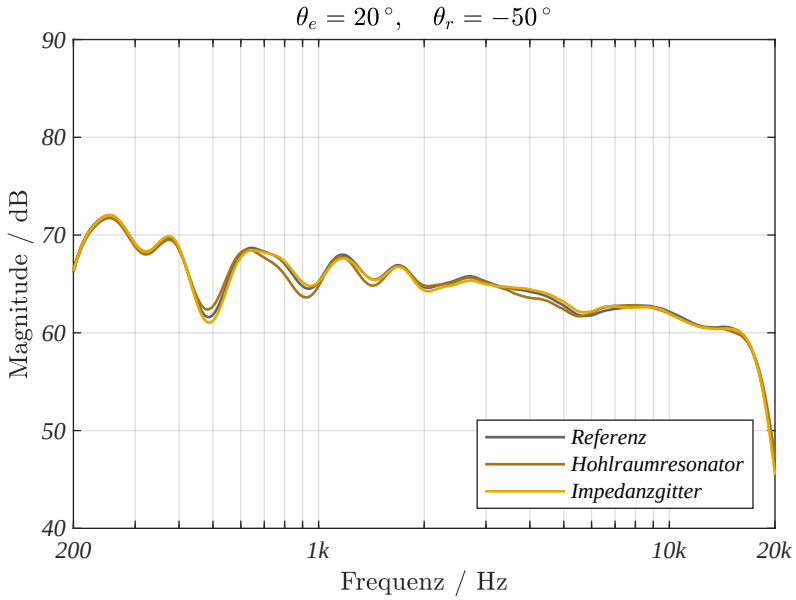

Abbildung B.29 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -50°$

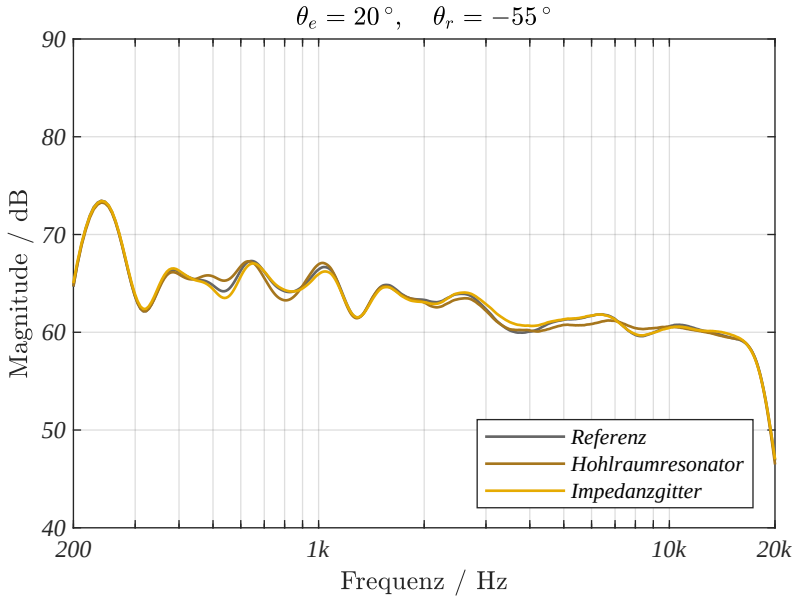

Abbildung B.30 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -55°$

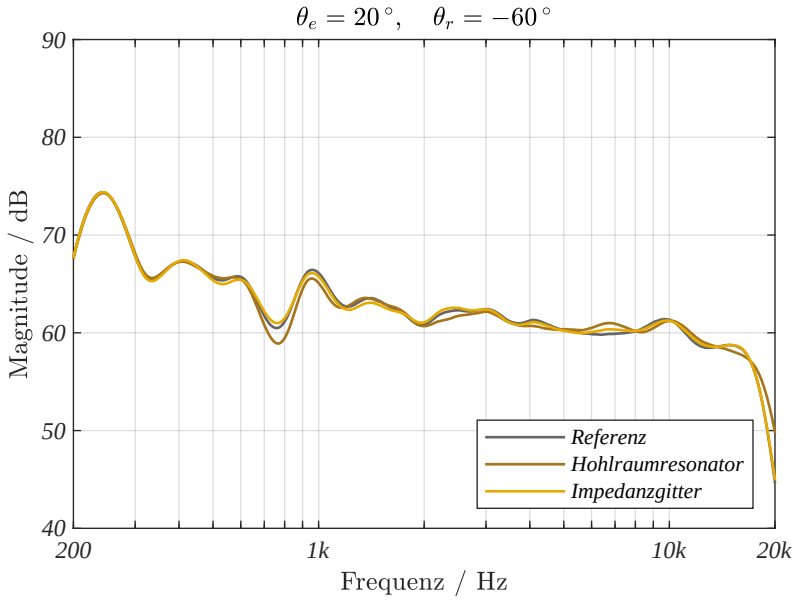

Abbildung B.31 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -60°$

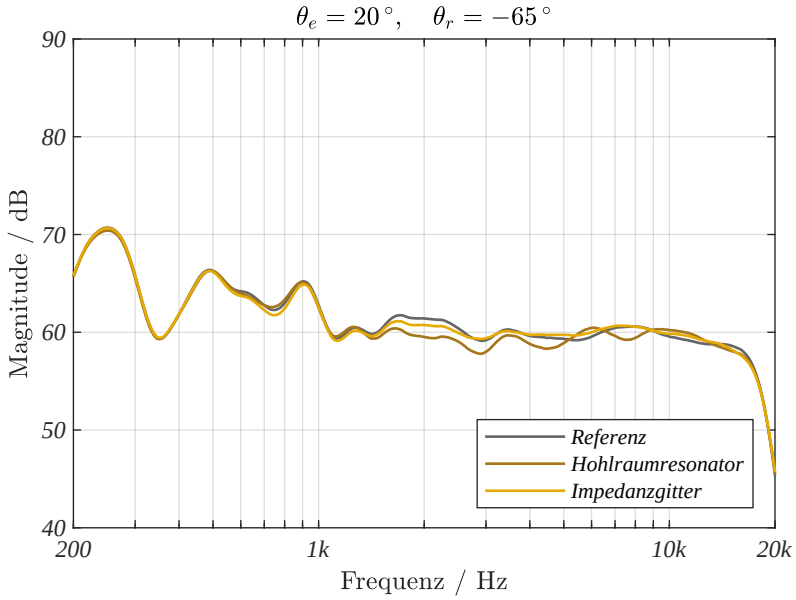

Abbildung B.32 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -65°$

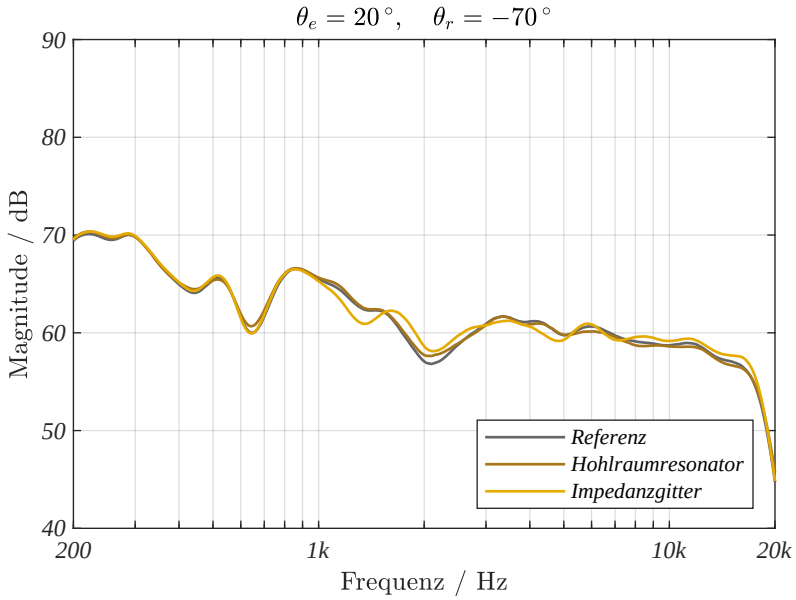

Abbildung B.33 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -70°$

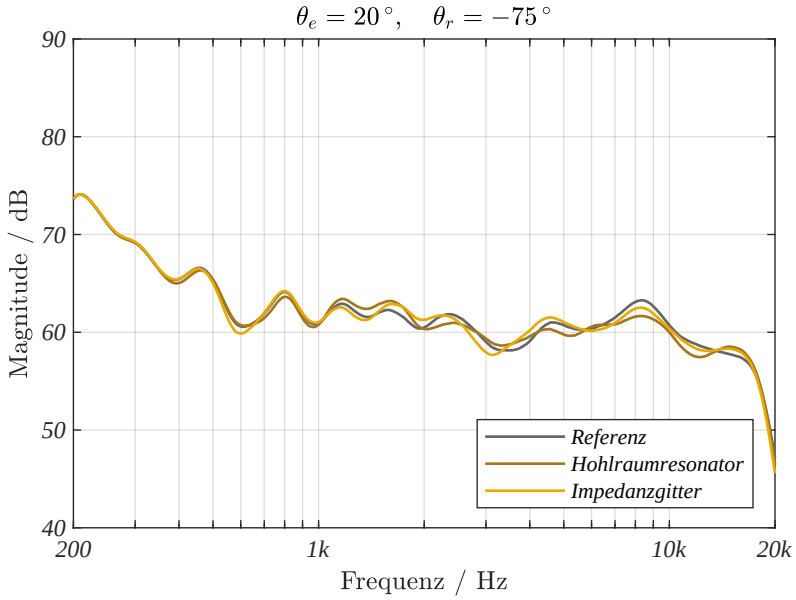

Abbildung B.34 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -75°$

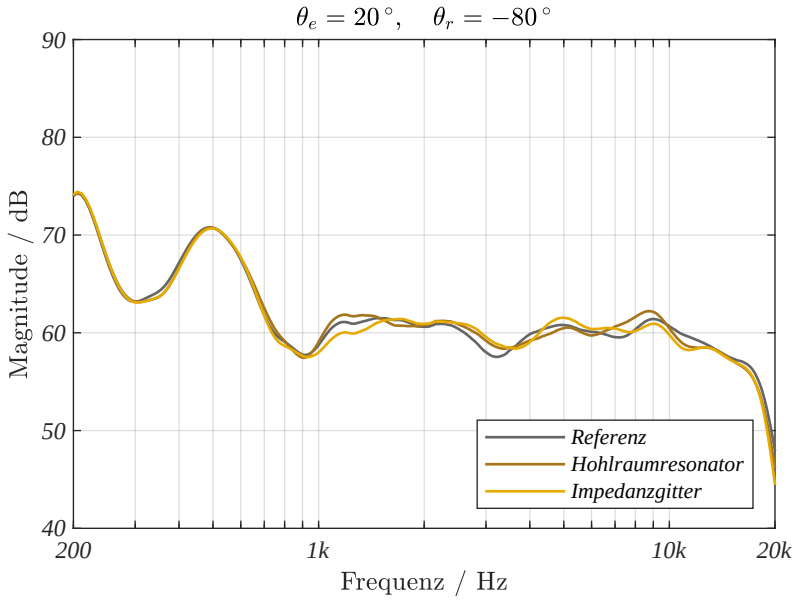

Abbildung B.35 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -80°$

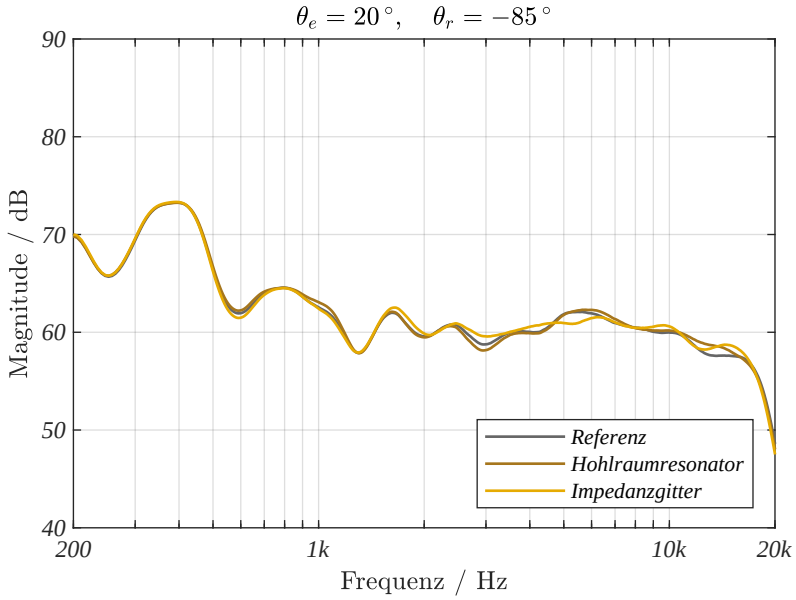

Abbildung B.36 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -85°$

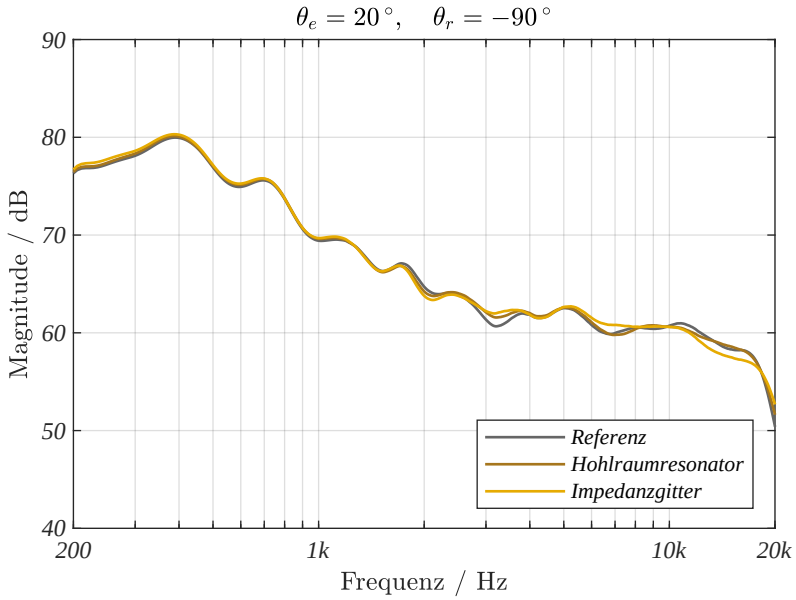

Abbildung B.37 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 20°, \theta_r = -90°$

B.1.2 $\theta_e = 40\,^\circ$

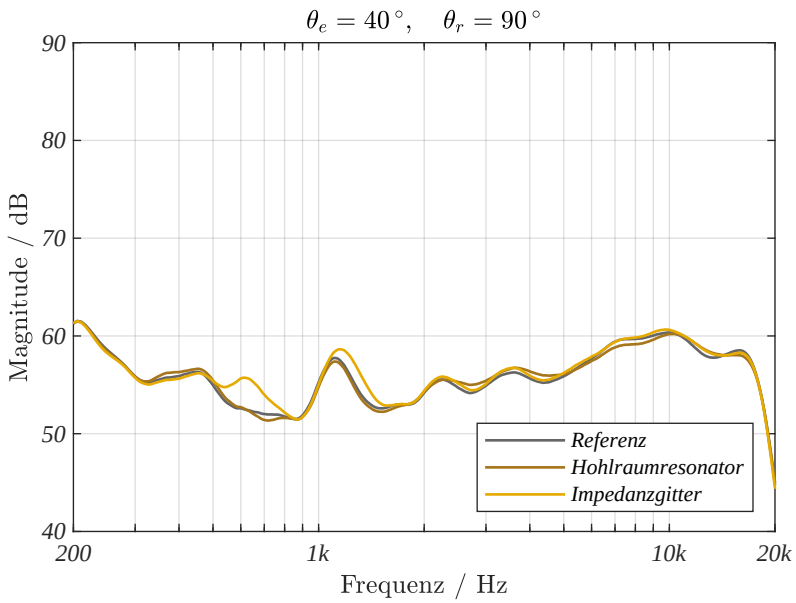

Abbildung B.38 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 90°$

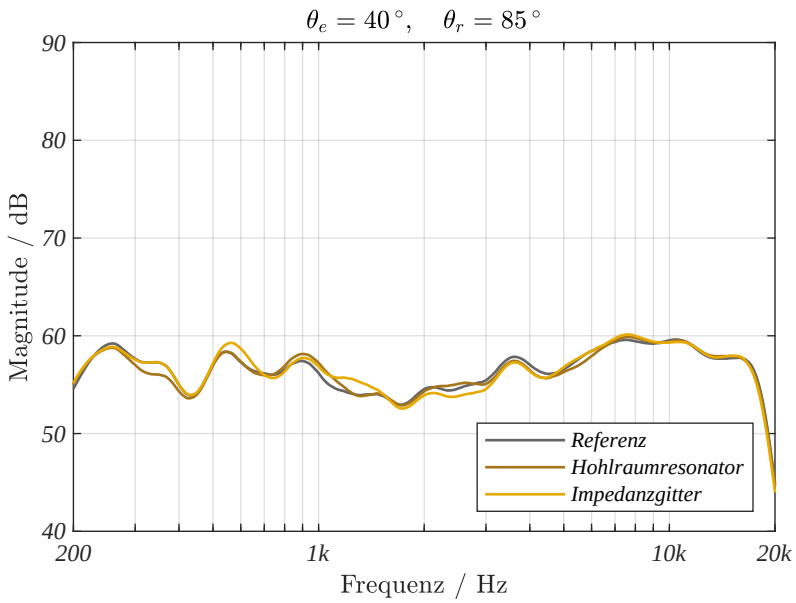

Abbildung B.39 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 85°$

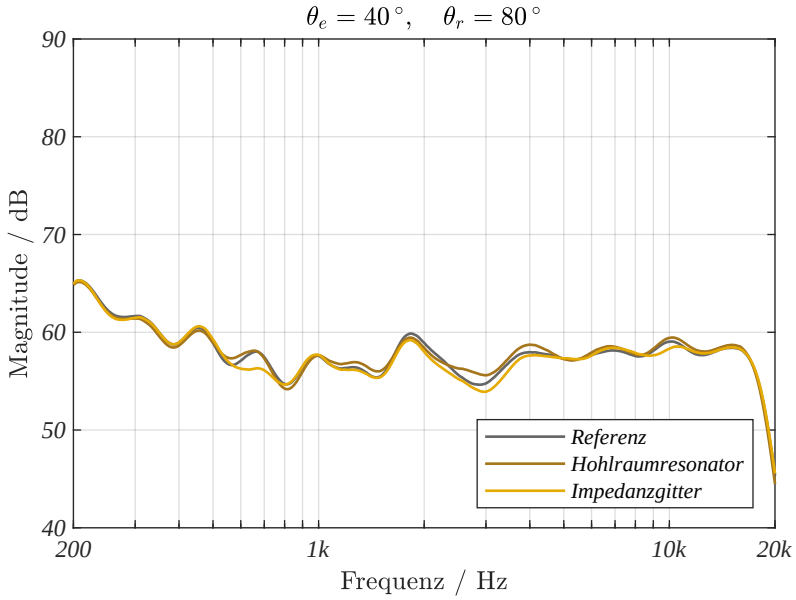

Abbildung B.40 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 80°$

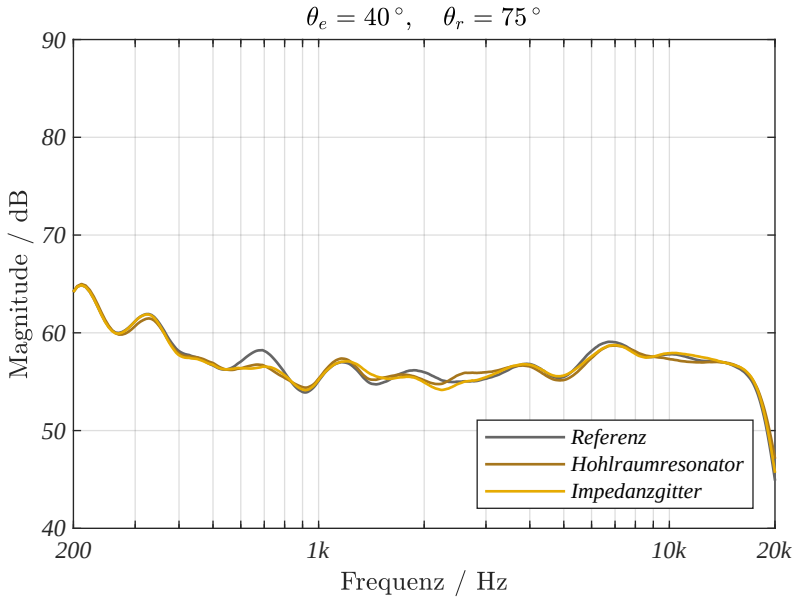

Abbildung B.41 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 75°$

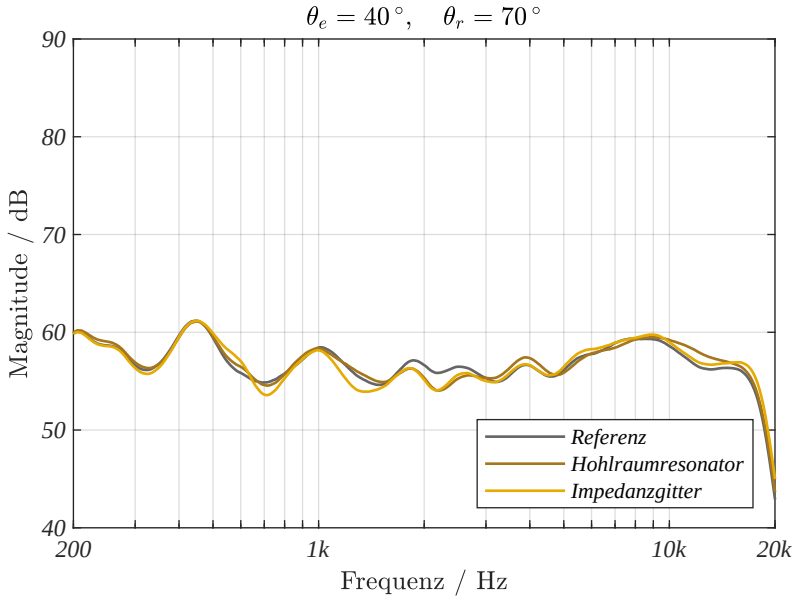

Abbildung B.42 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 70°$

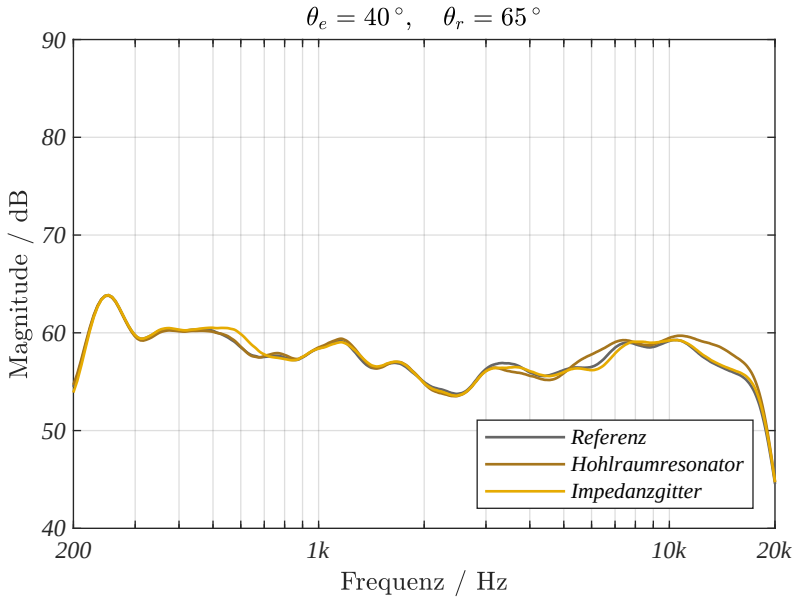

Abbildung B.43 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 65°$

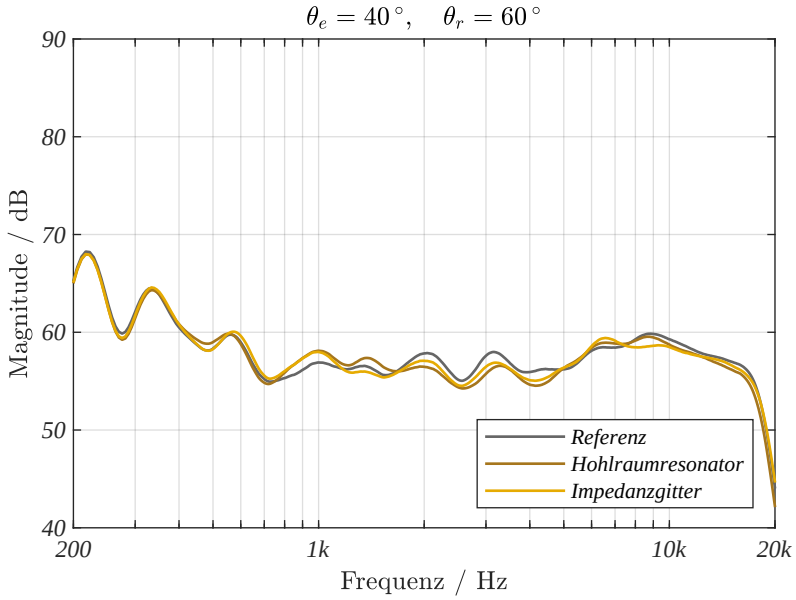

Abbildung B.44 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 60°$

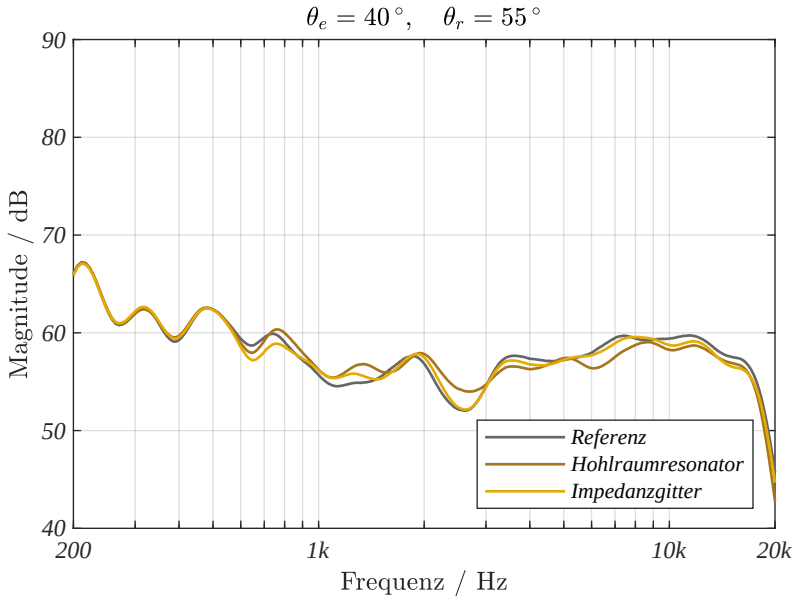

Abbildung B.45 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 55°$

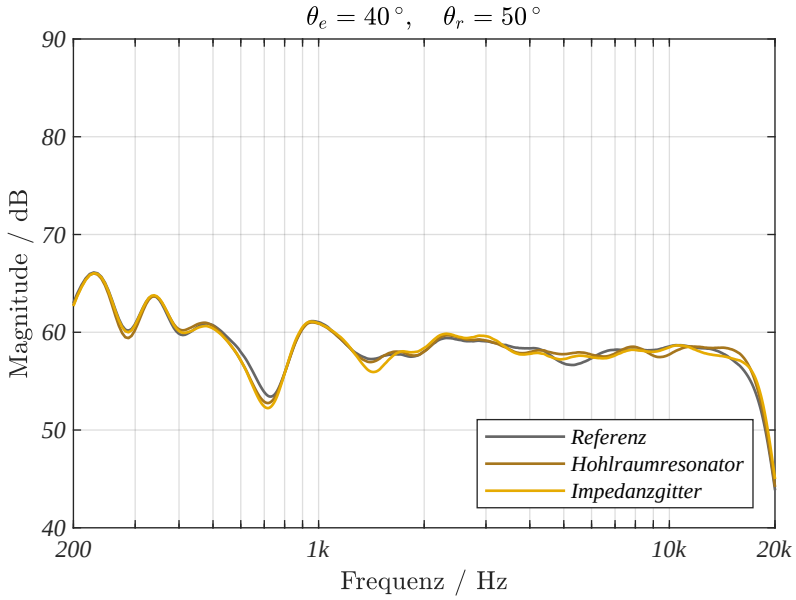

Abbildung B.46 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 50°$

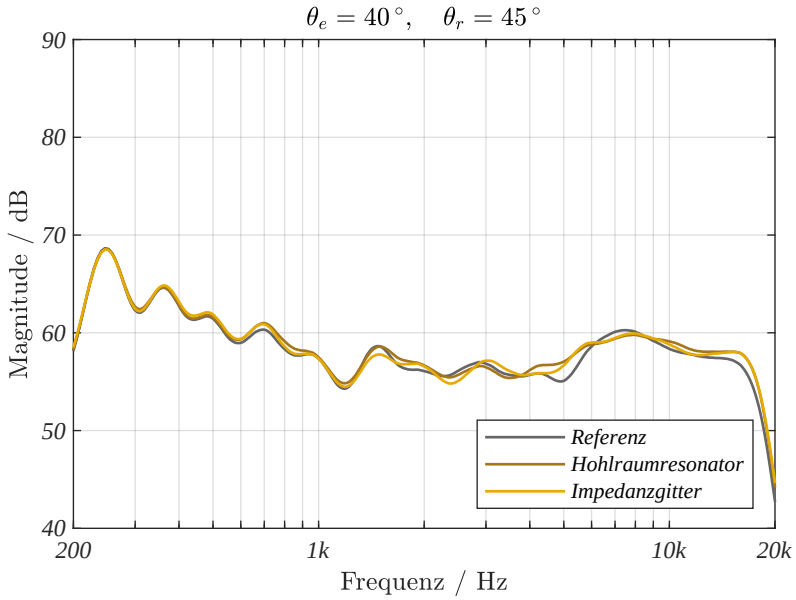

Abbildung B.47 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 45°$

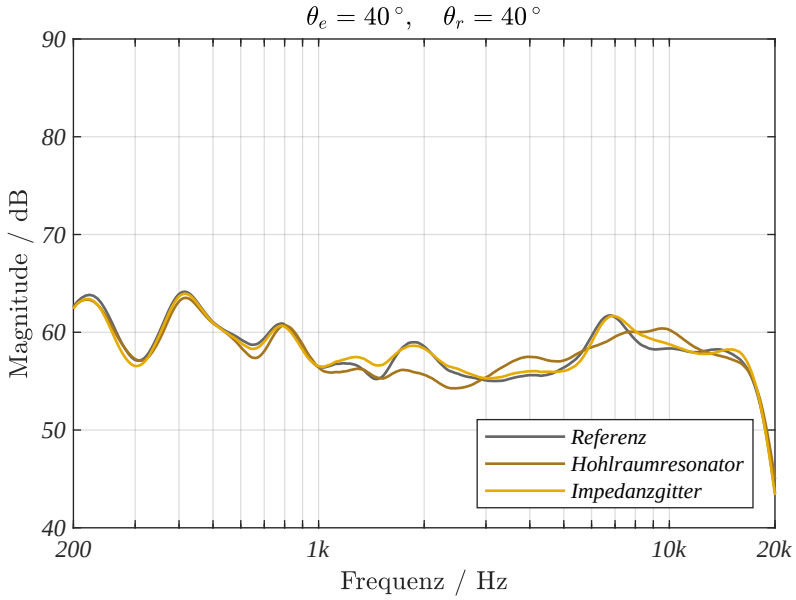

Abbildung B.48 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 40°$

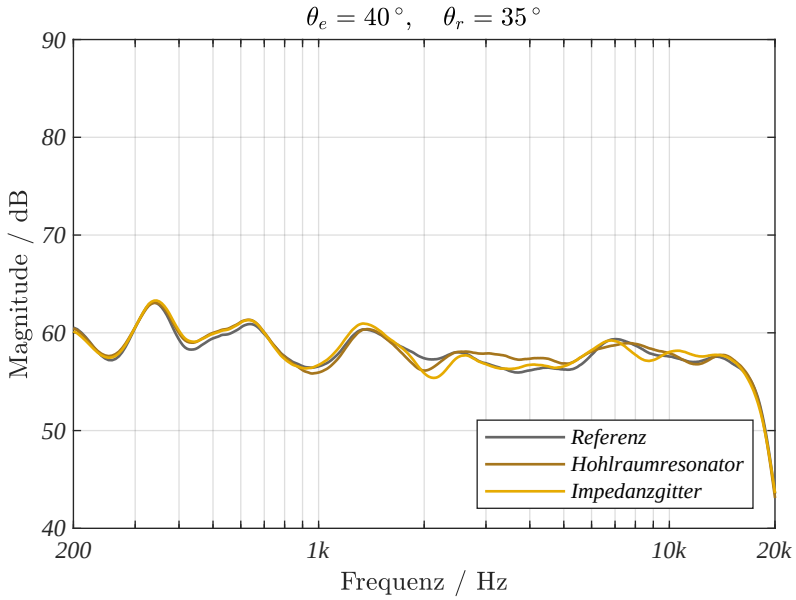

Abbildung B.49 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 35°$

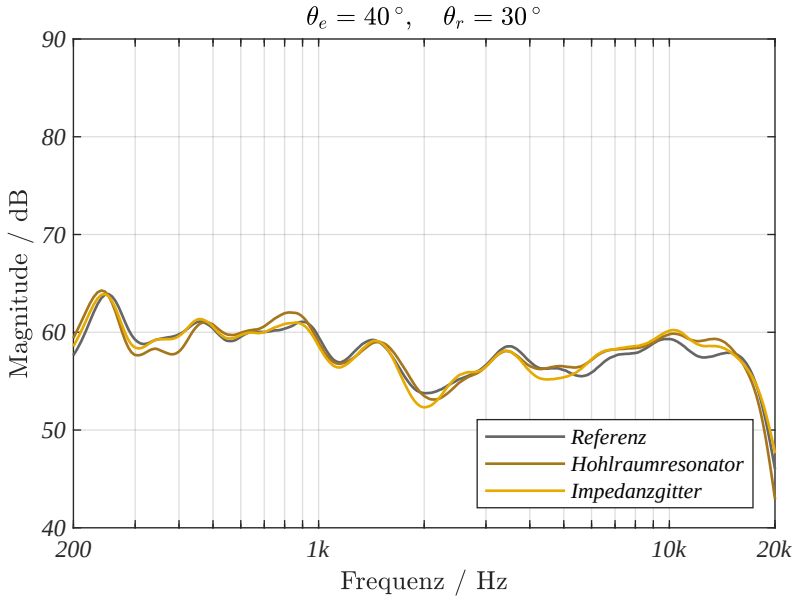

Abbildung B.50 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 30°$

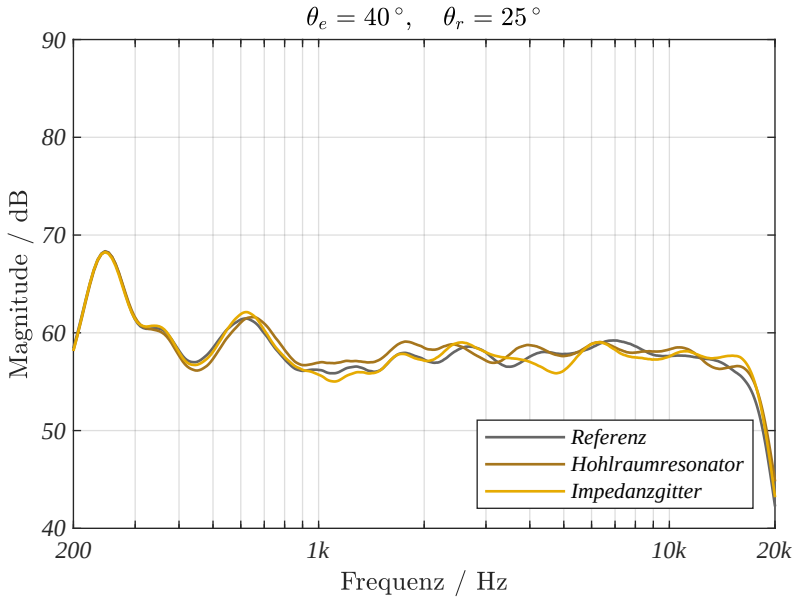

Abbildung B.51 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 25°$

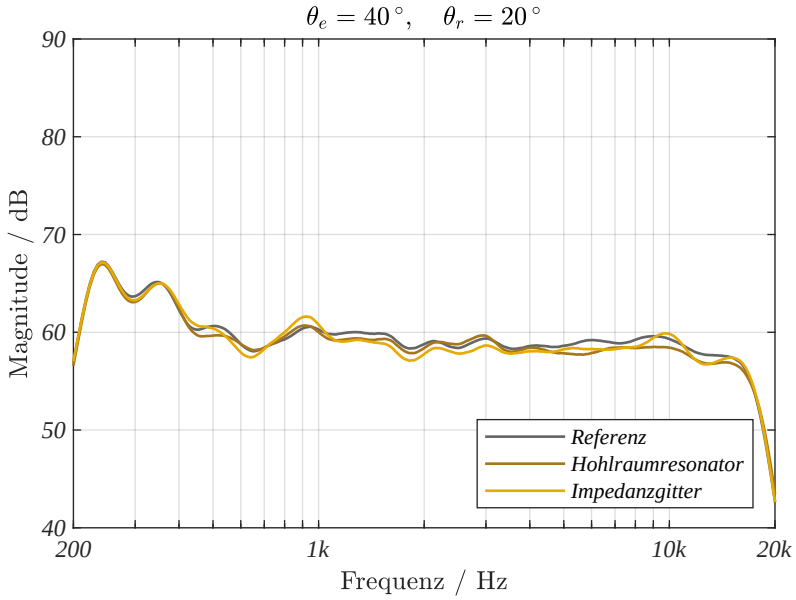

Abbildung B.52 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 20°$

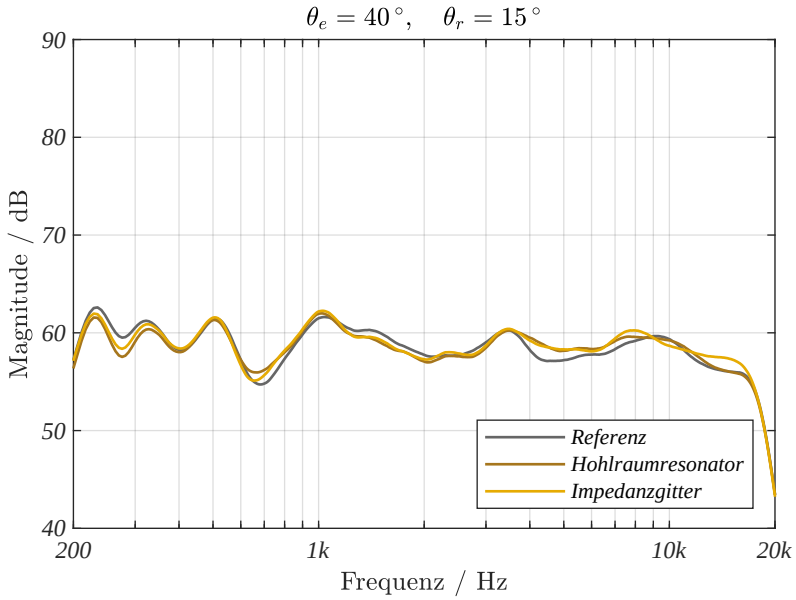

Abbildung B.53 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 15°$

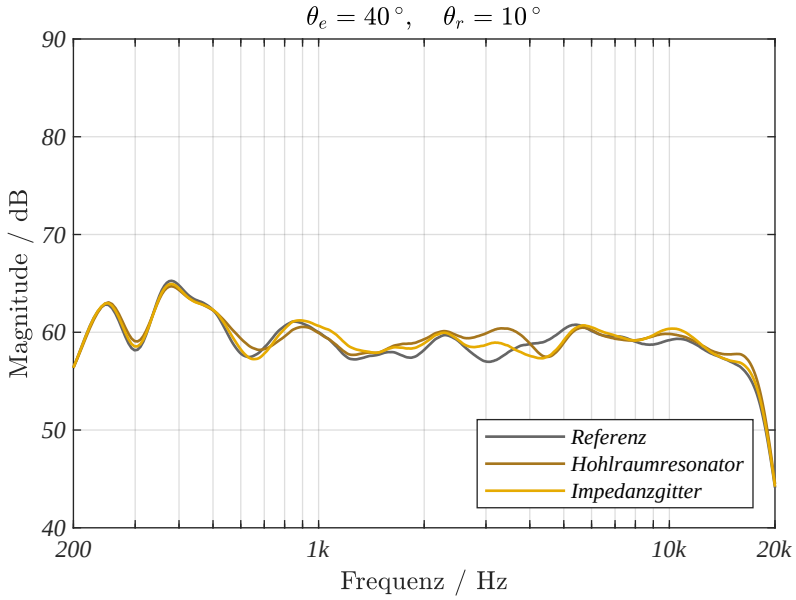

Abbildung B.54 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 10°$

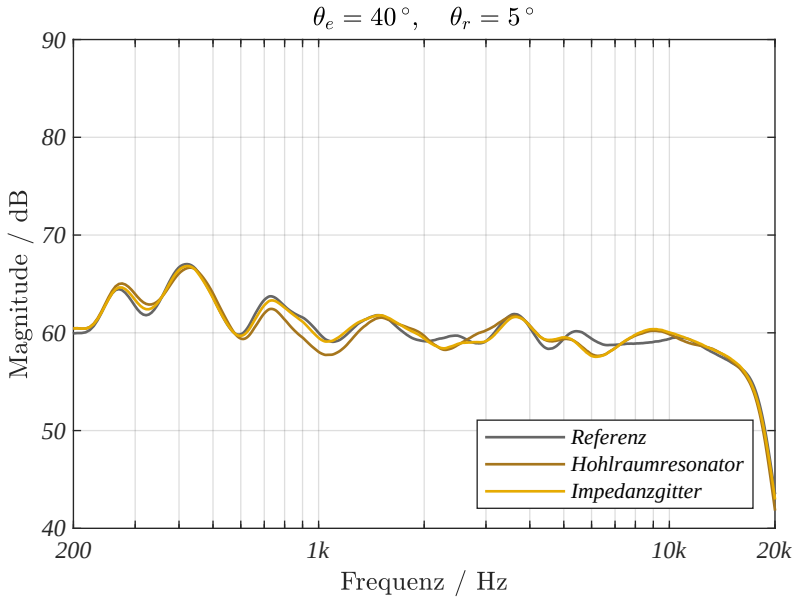

Abbildung B.55 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 5°$

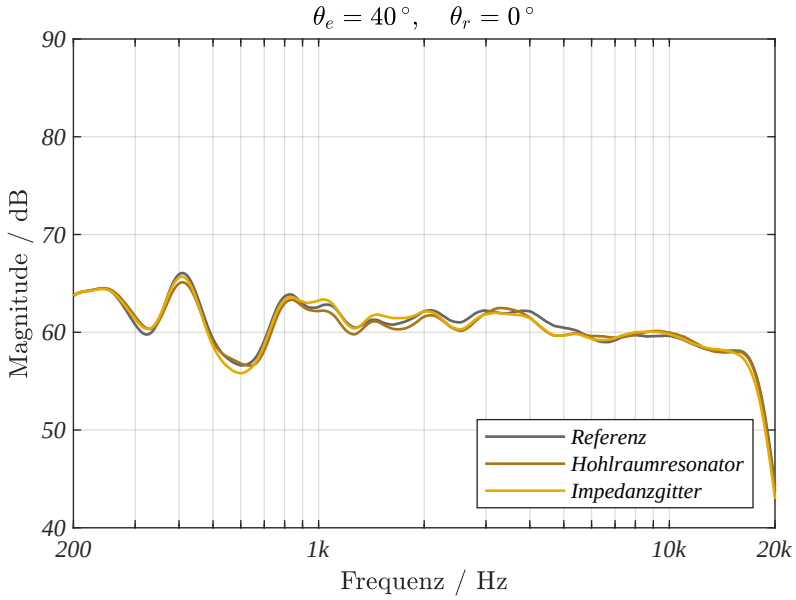

Abbildung B.56 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = 0°$

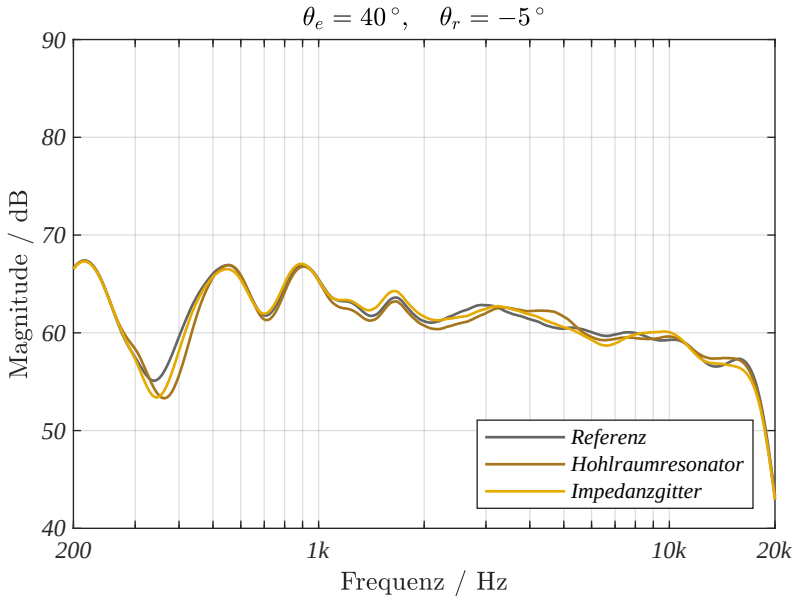

Abbildung B.57 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -5°$

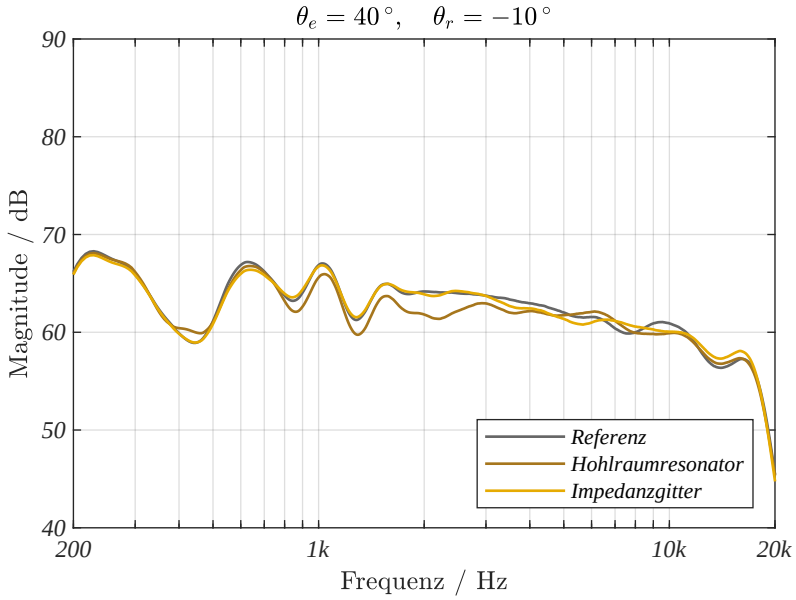

Abbildung B.58 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -10°$

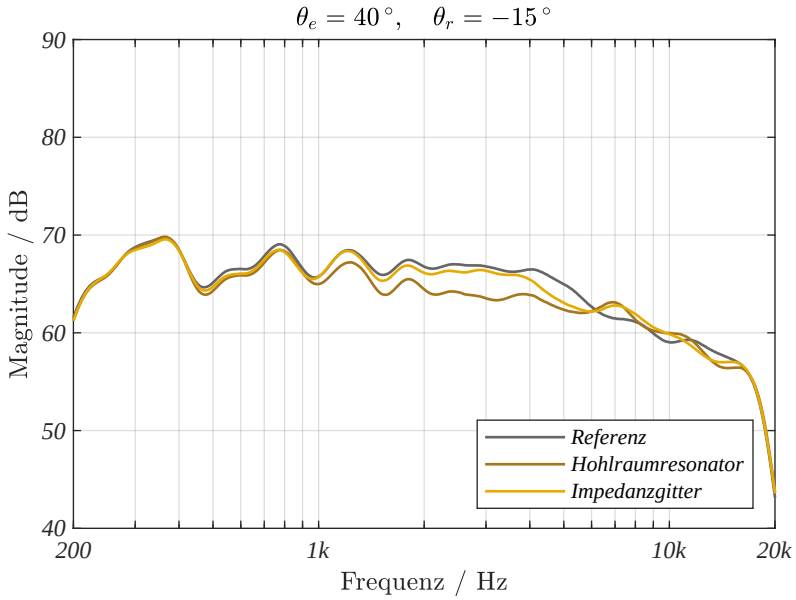

Abbildung B.59 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -15°$

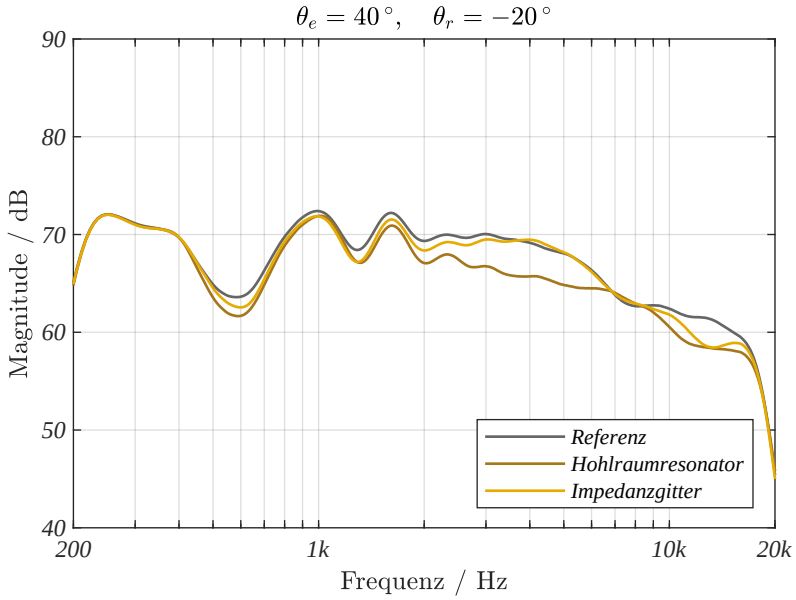

Abbildung B.60 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -20°$

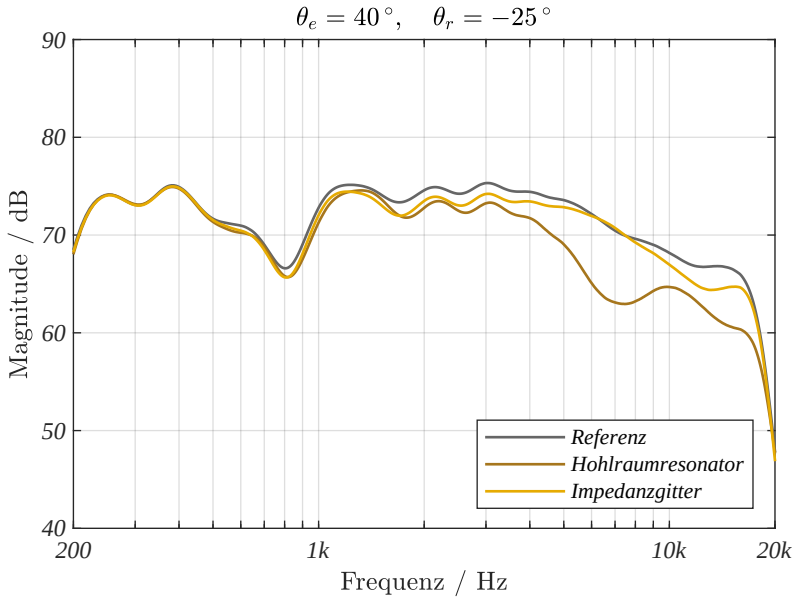

Abbildung B.61 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -25°$

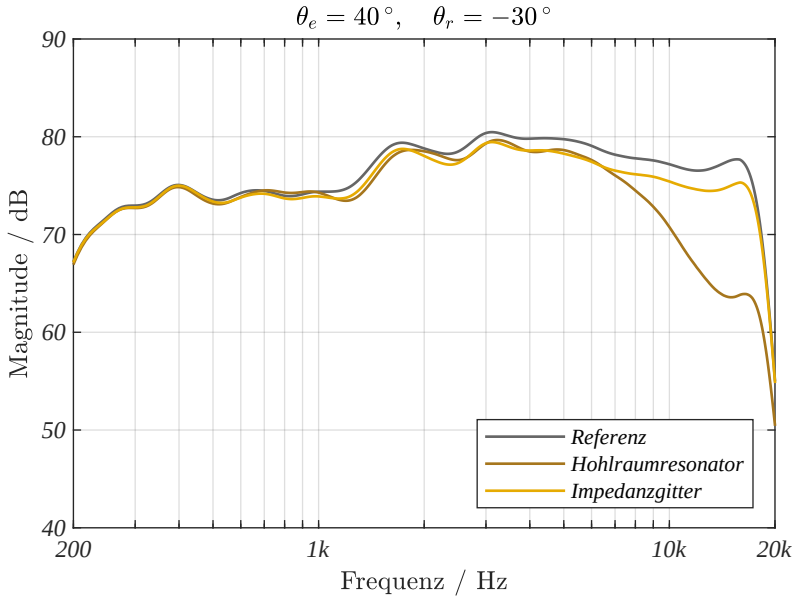

Abbildung B.62 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -30°$

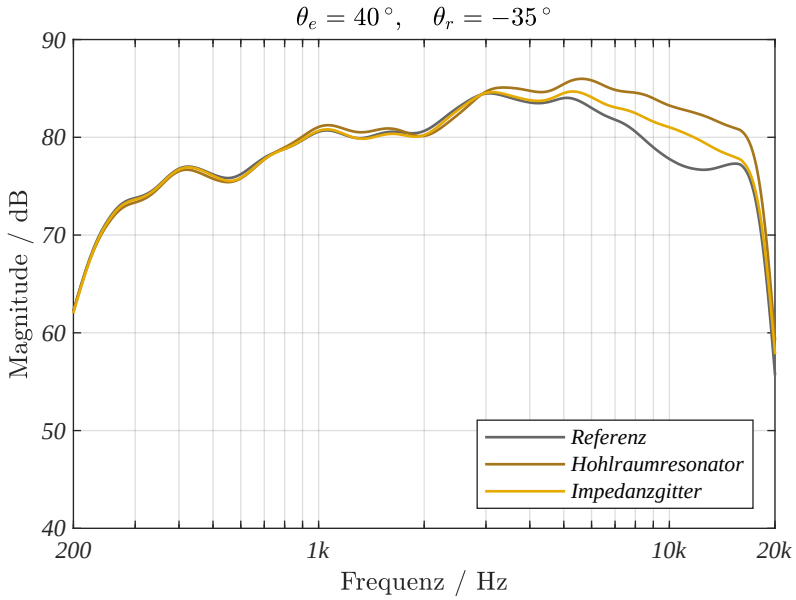

Abbildung B.63 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -35°$

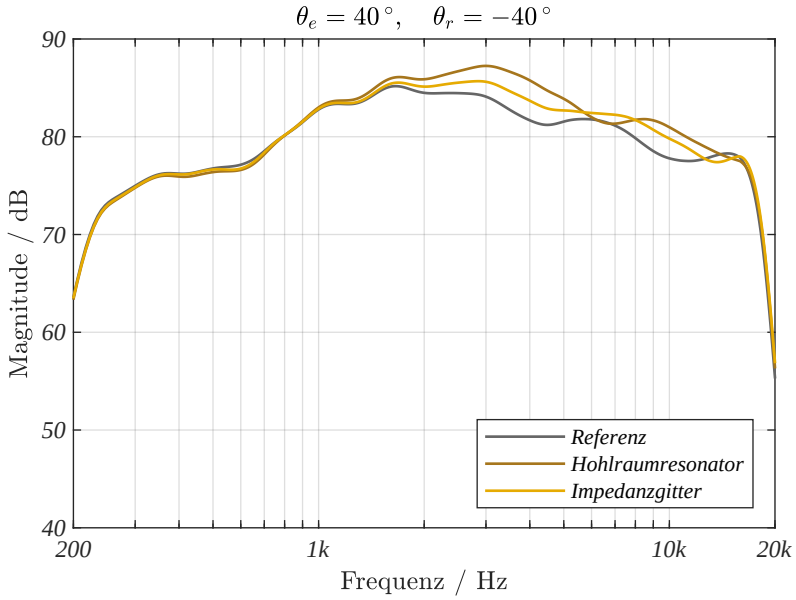

Abbildung B.64 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -40°$

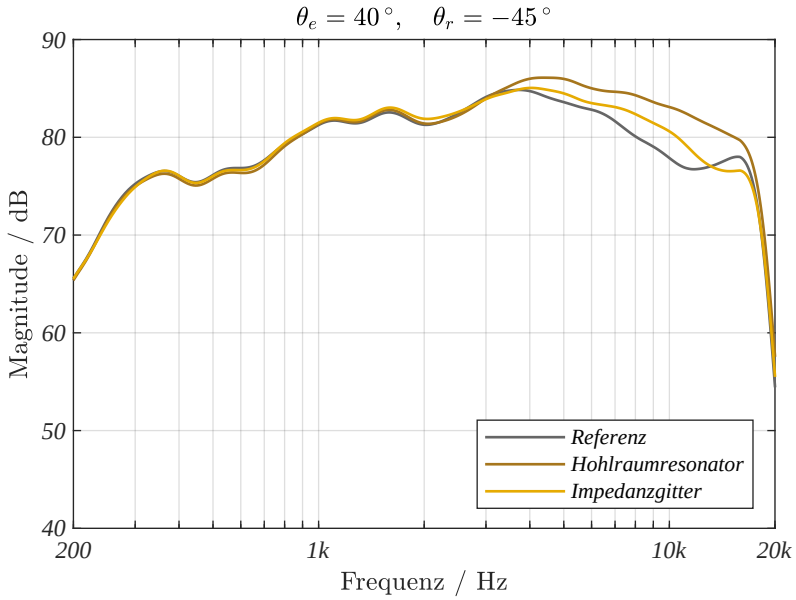

Abbildung B.65 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -45°$

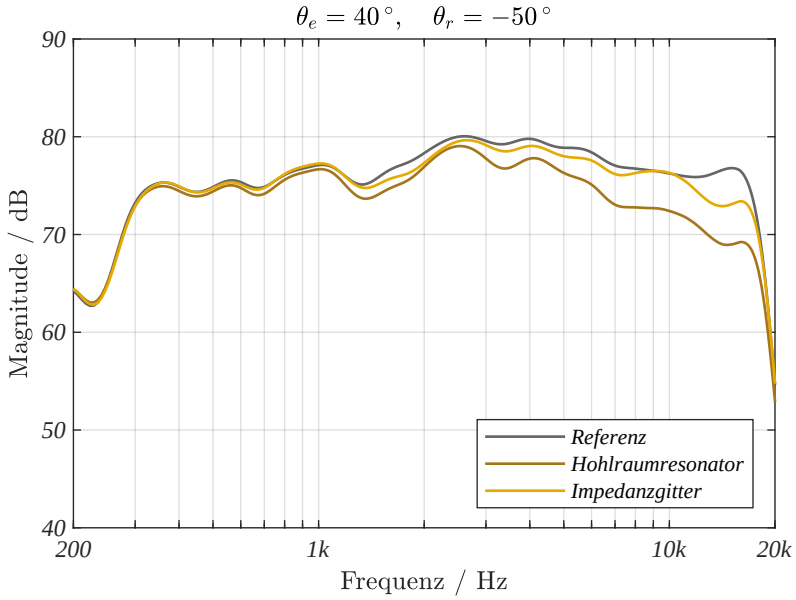

Abbildung B.66 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -50°$

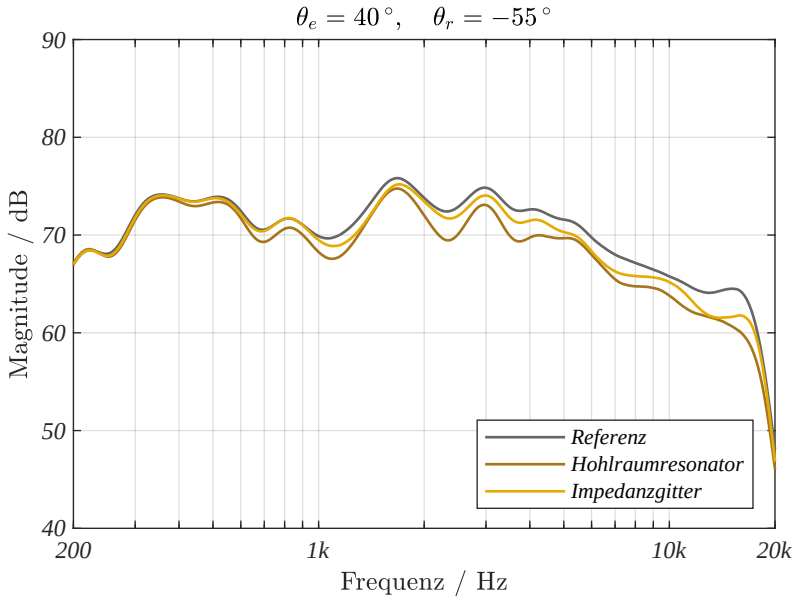

Abbildung B.67 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -55°$

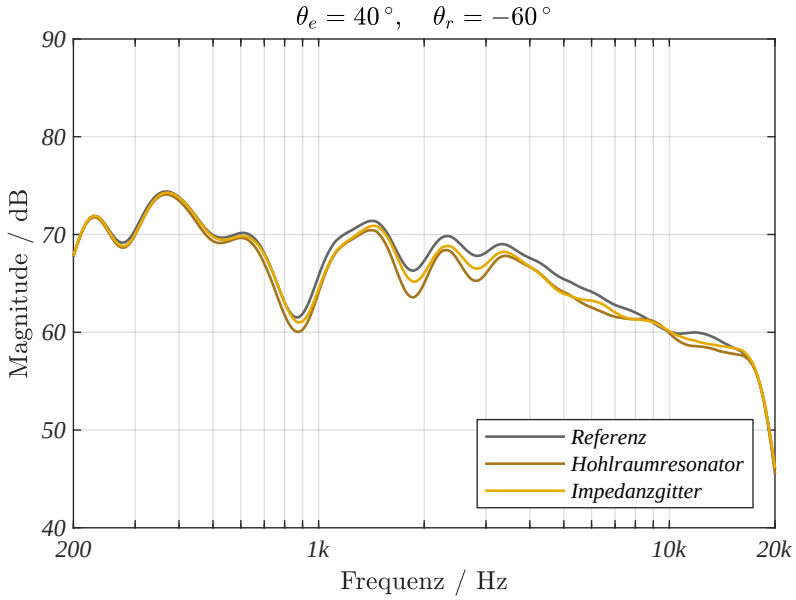

Abbildung B.68 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -60°$

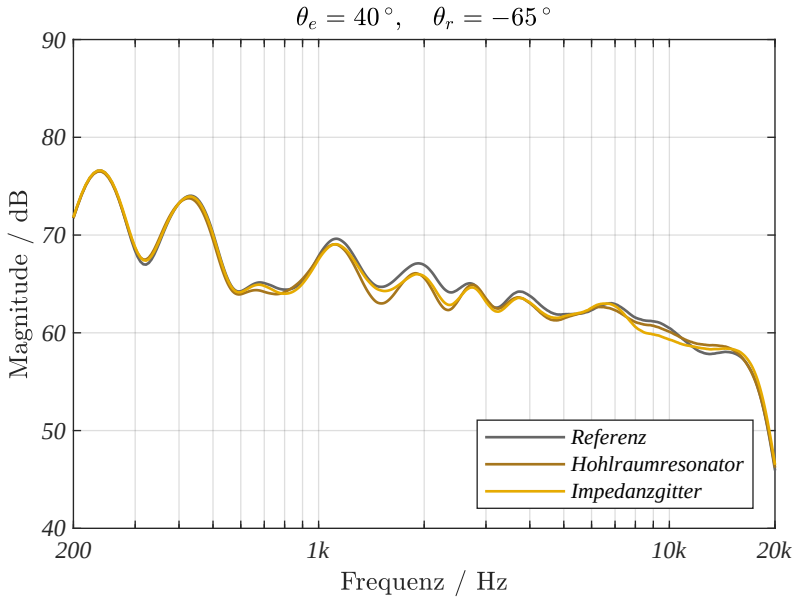

Abbildung B.69 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -65°$

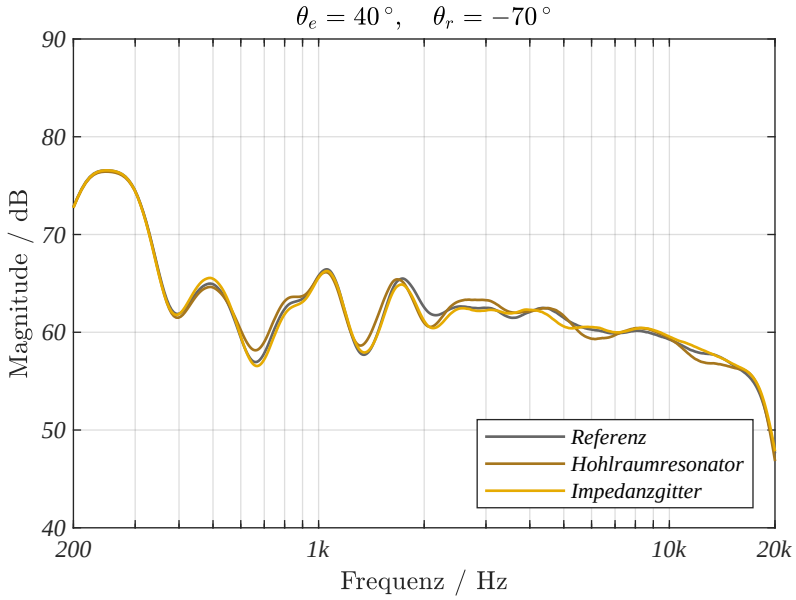

Abbildung B.70 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -70°$

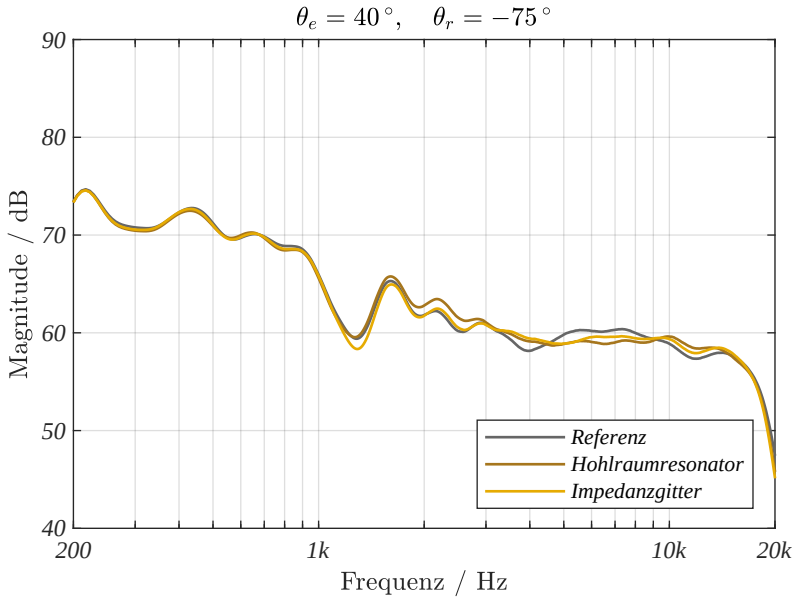

Abbildung B.71 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -75°$

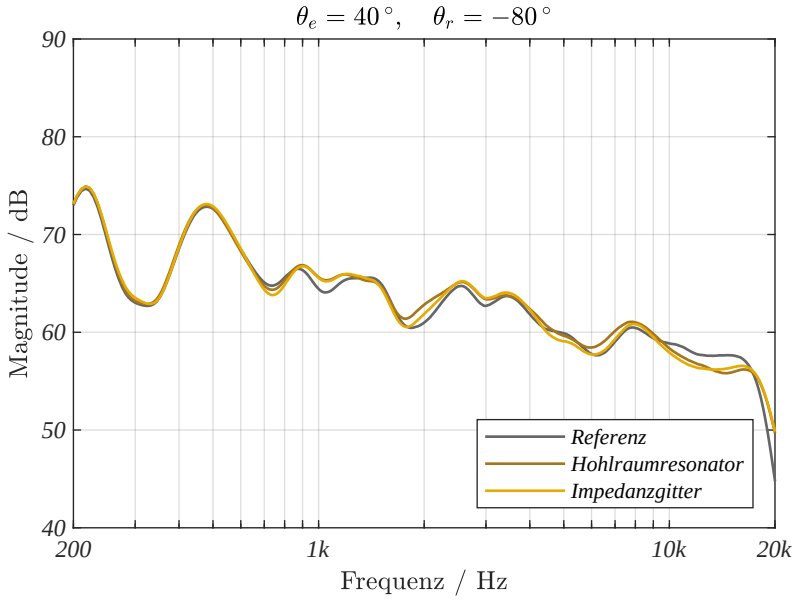

Abbildung B.72 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -80°$

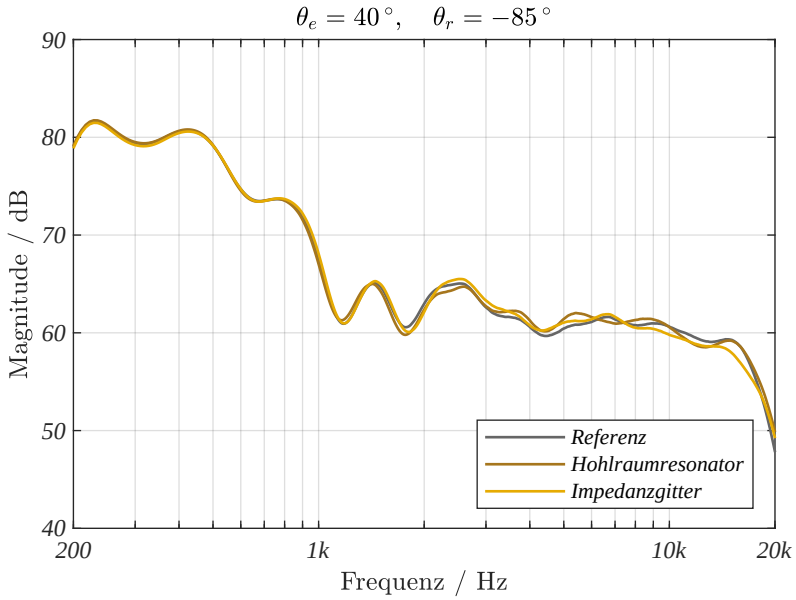

Abbildung B.73 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -85°$

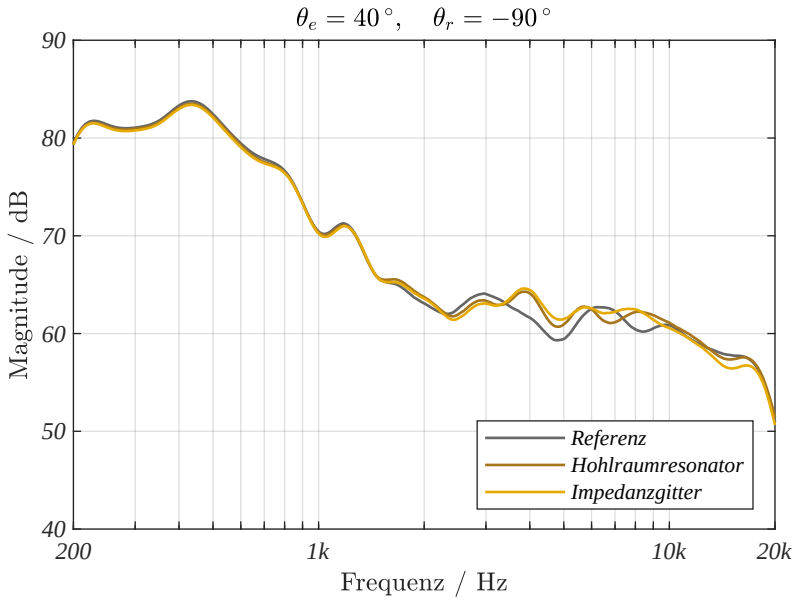

Abbildung B.74 Betragsspektrum der Messergebnisse der Reflexion $\theta_e = 40°, \theta_r = -90°$

B.2 Polarplots

B.2.1 $\theta_e = 20\,°$

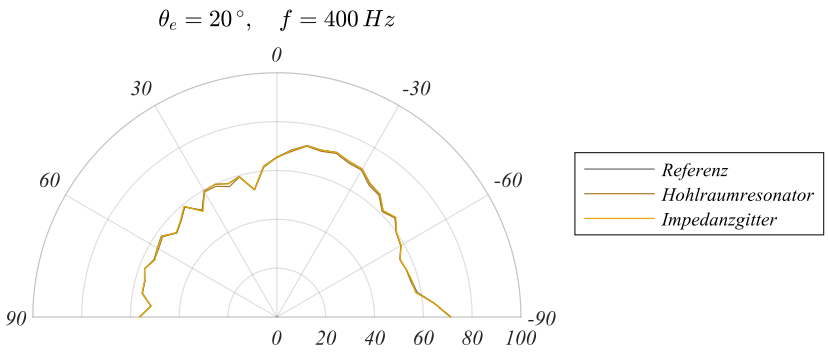

Abbildung B.75 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 400 Hz

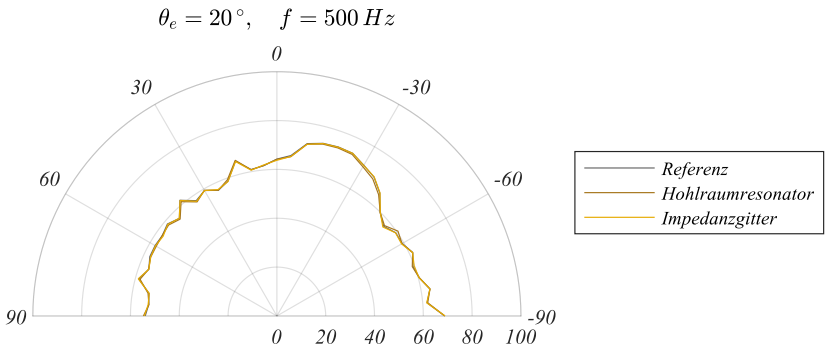

Abbildung B.76 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 500 Hz

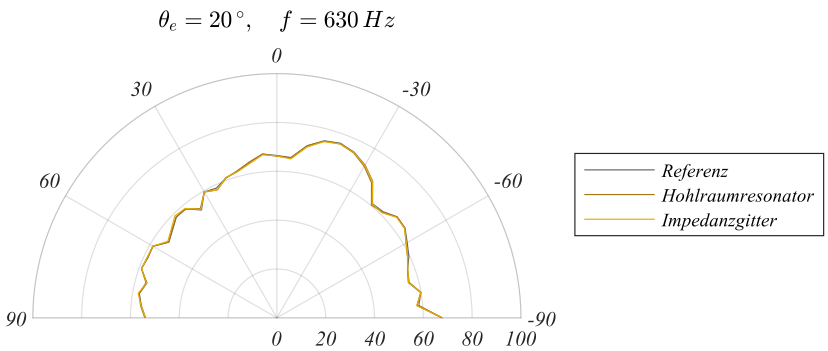

Abbildung B.77 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 630 Hz

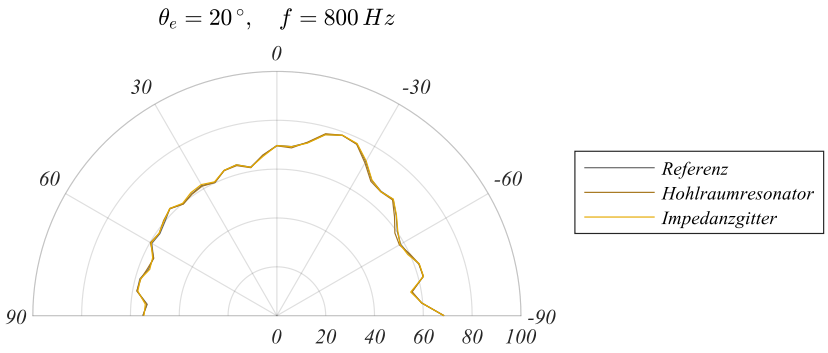

Abbildung B.78 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 800 Hz

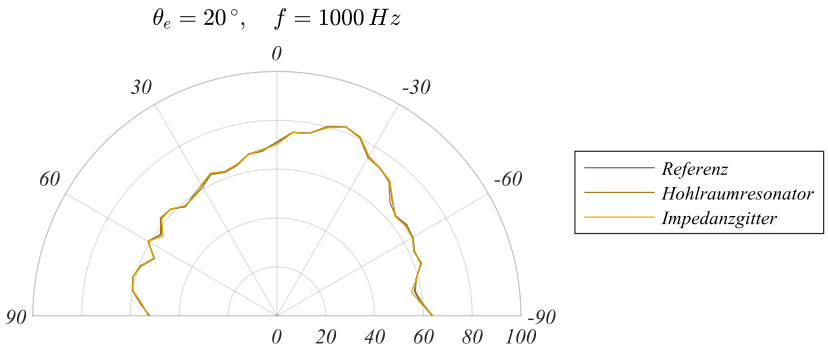

Abbildung B.79 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 1000 Hz

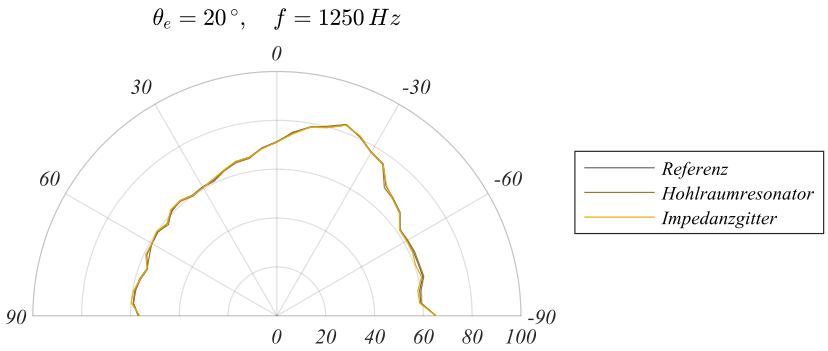

Abbildung B.80 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 1250 Hz

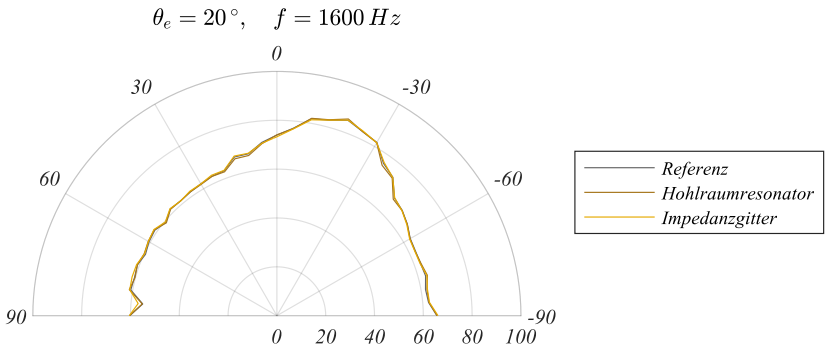

Abbildung B.81 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 1600 Hz

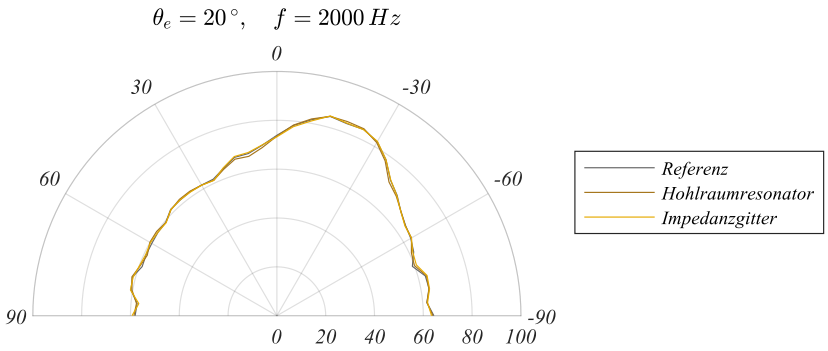

Abbildung B.82 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 2000 Hz

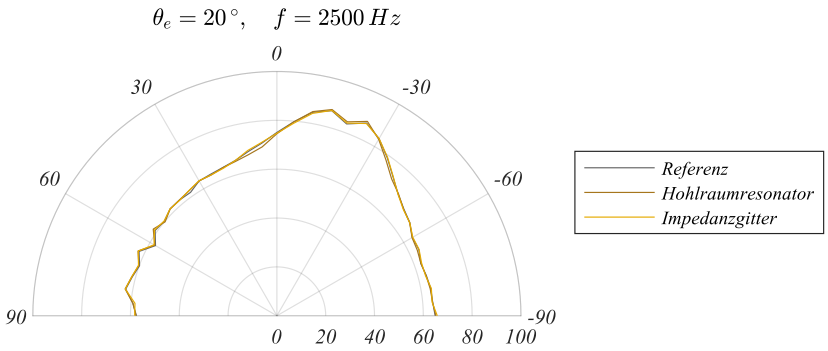

Abbildung B.83 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 2500 Hz

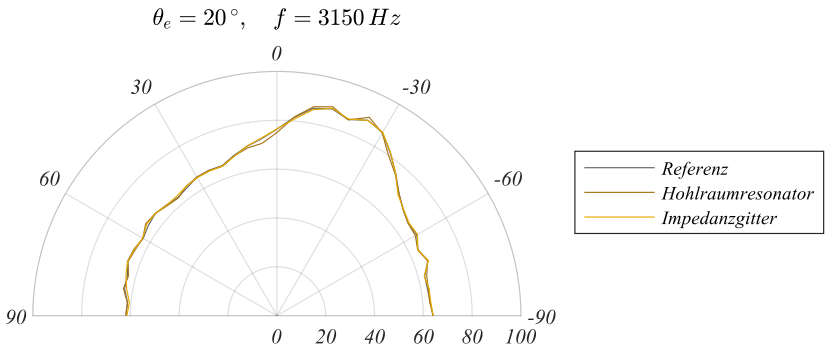

Abbildung B.84 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 3150 Hz

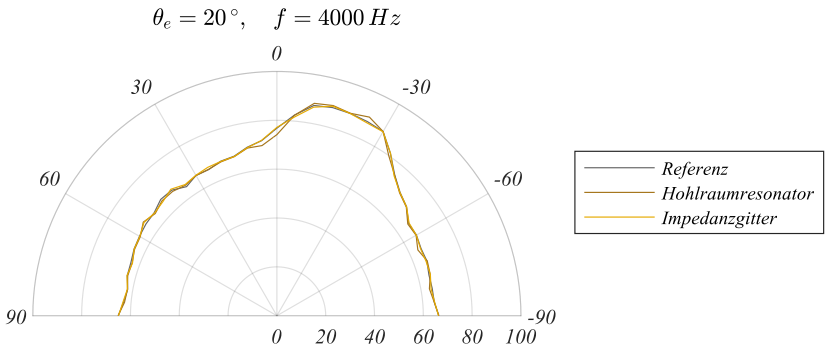

Abbildung B.85 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 4000 Hz

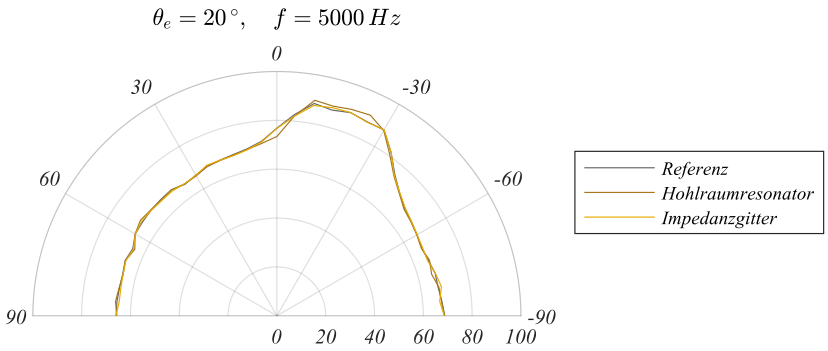

Abbildung B.86 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 5000 Hz

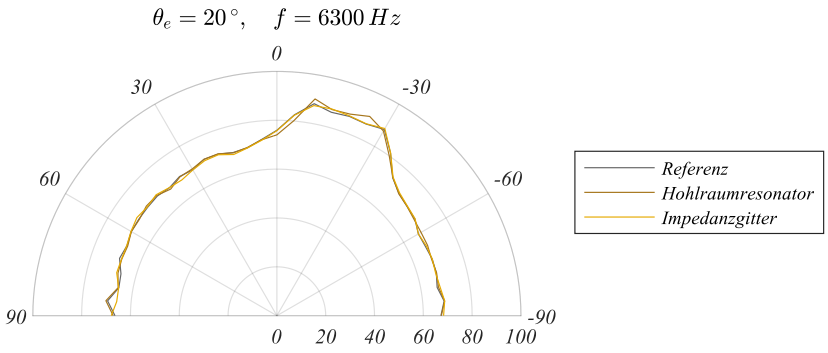

Abbildung B.87 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 6300 Hz

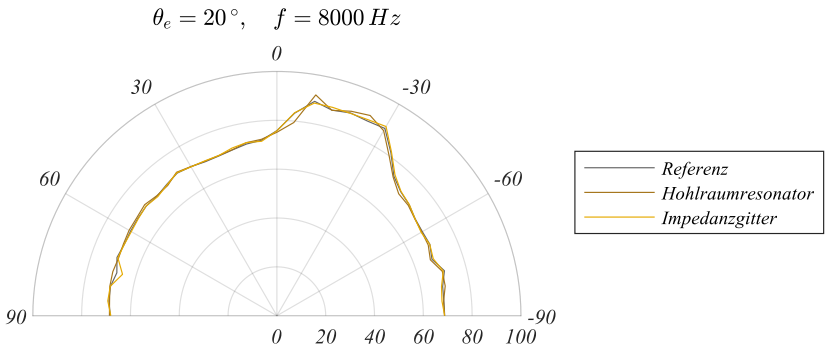

Abbildung B.88 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 8000 Hz

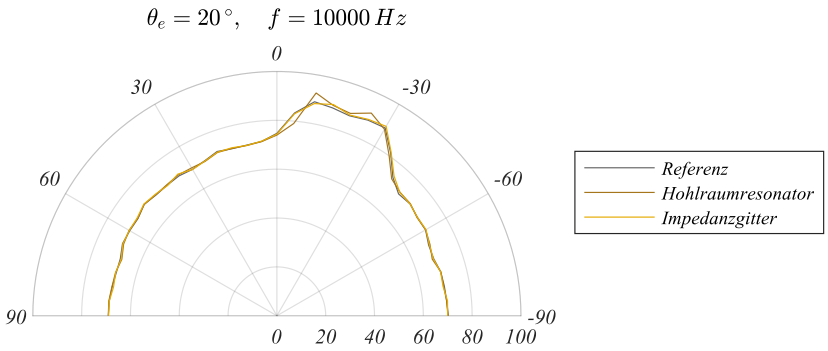

Abbildung B.89 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 10 000 Hz

B.2.2 $\theta_e = 40\,°$

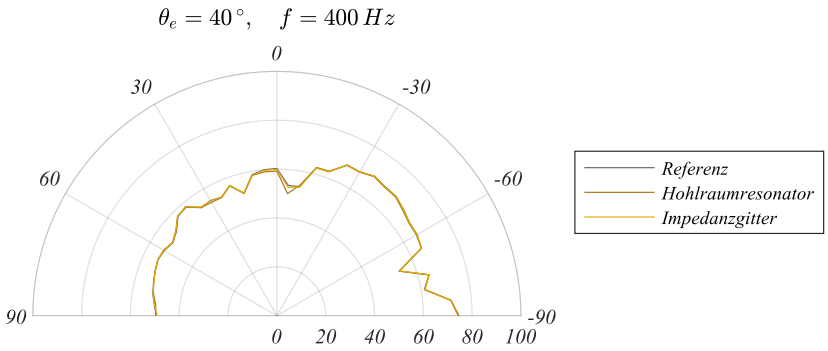

Abbildung B.90 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 400 Hz

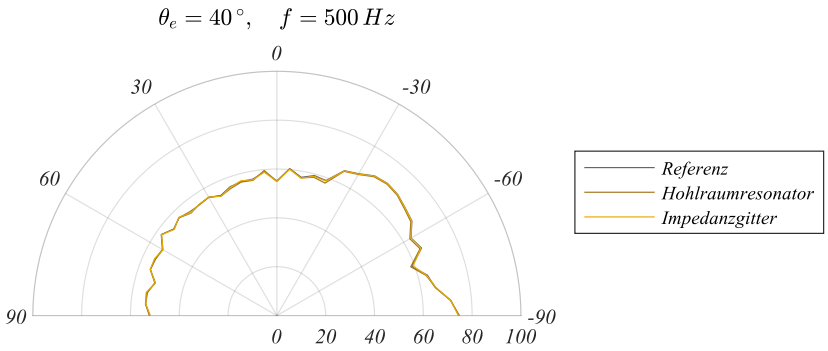

Abbildung B.91 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 500 Hz

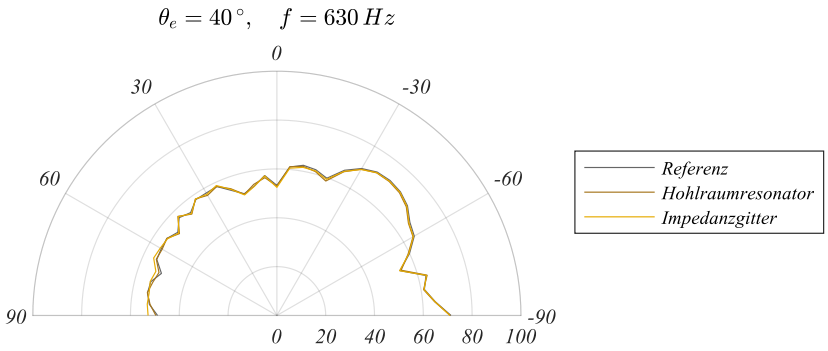

Abbildung B.92 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 630 Hz

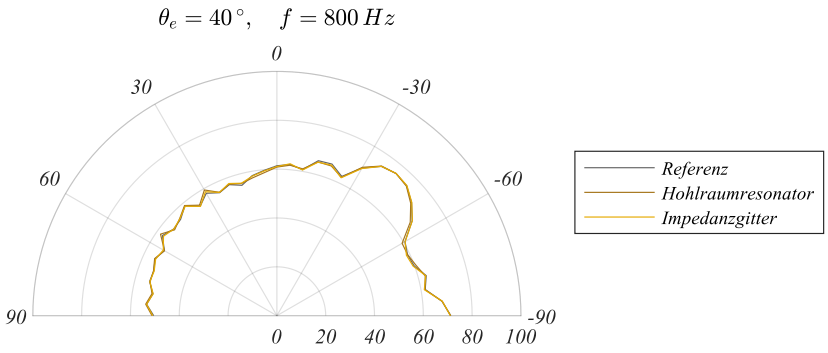

Abbildung B.93 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 800 Hz

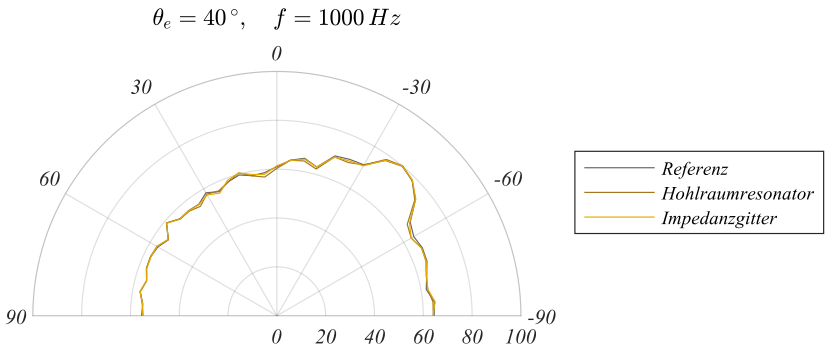

Abbildung B.94 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 1000 Hz

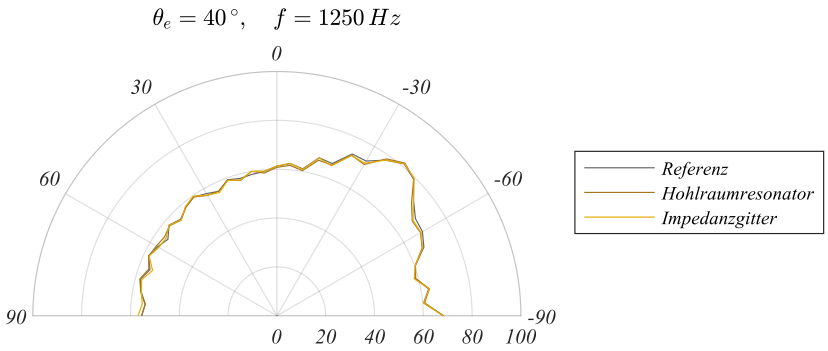

Abbildung B.95 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 1250 Hz

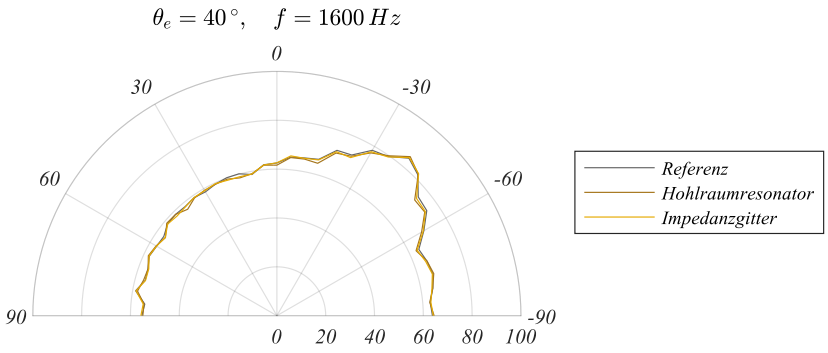

Abbildung B.96 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 1600 Hz

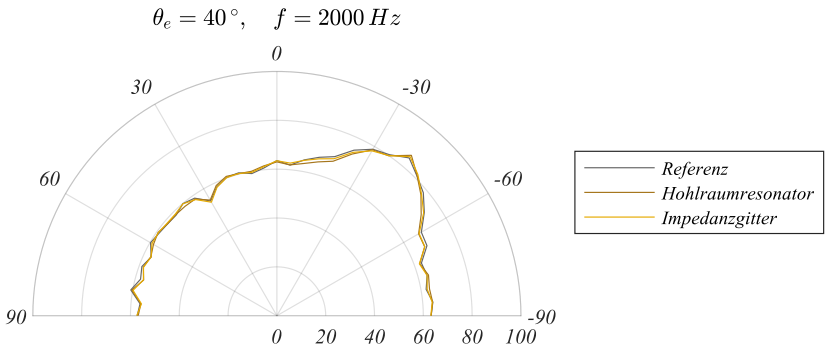

Abbildung B.97 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 2000 Hz

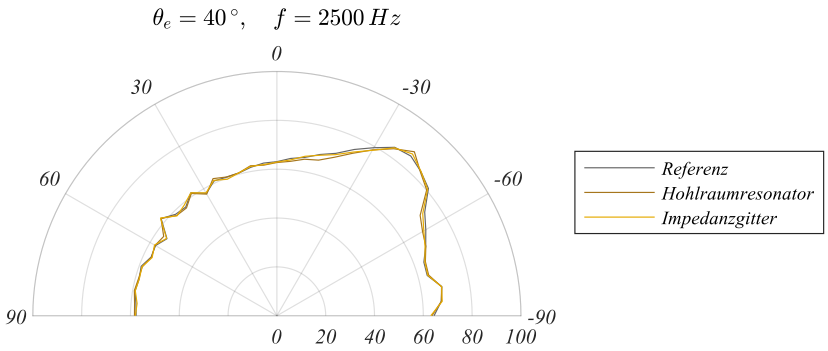

Abbildung B.98 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 2500 Hz

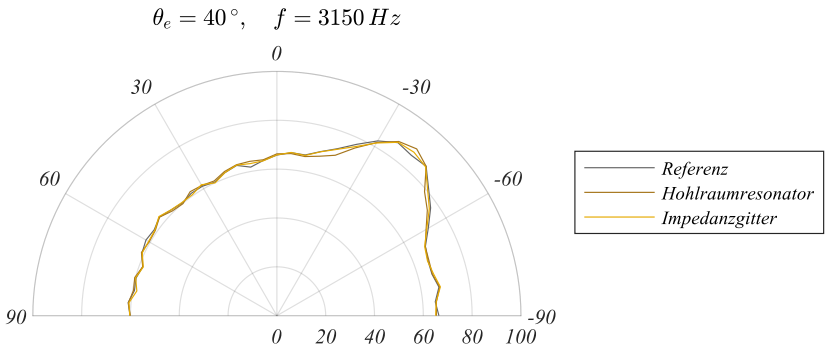

Abbildung B.99 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 3150 Hz

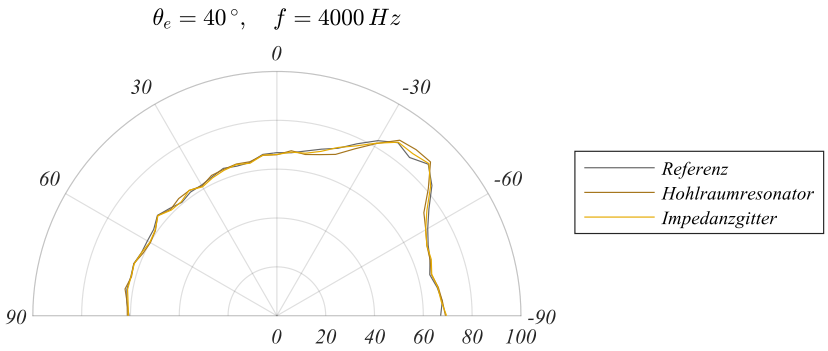

Abbildung B.100 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 4000 Hz

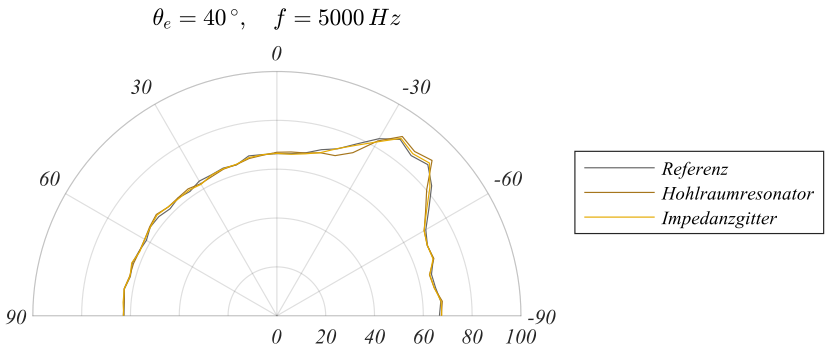

Abbildung B.101 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 5000 Hz

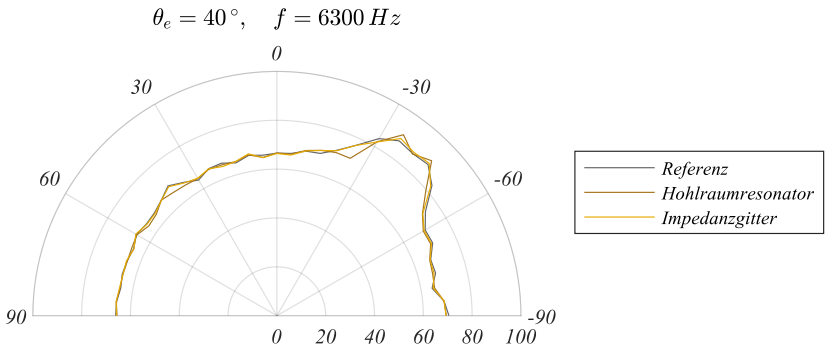

Abbildung B.102 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 6300 Hz

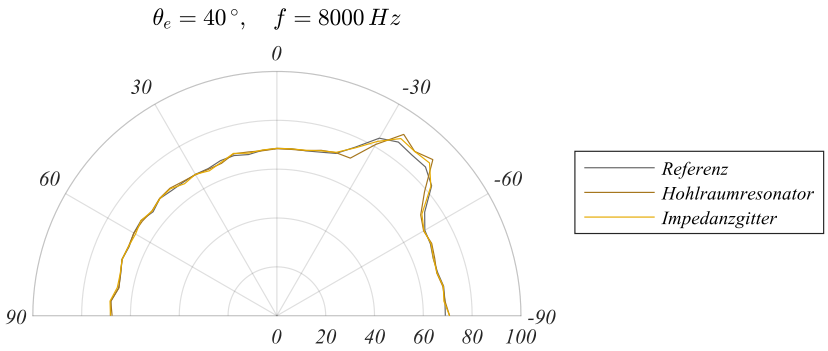

Abbildung B.103 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 8000 Hz

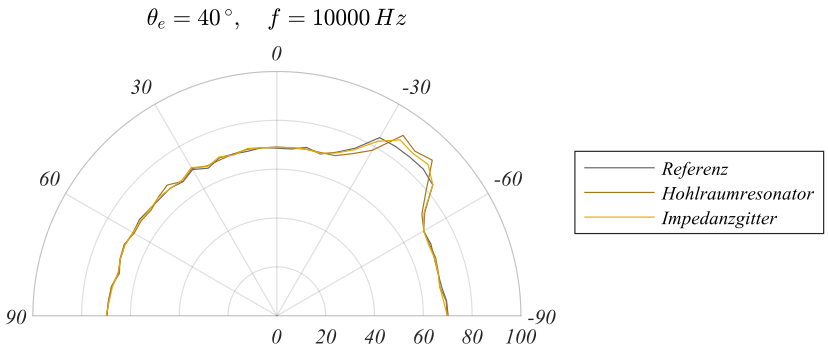

Abbildung B.104 Polarplot der Messergebnisse der Reflexion im Terzband 10 000 Hz